

PARTE III

DISCUSIÓN GENERAL

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES PARCIALES

En la primera parte de este trabajo nos centramos en estudiar la especialidad del álgebra de Jordan asociado a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual a 3 y la especialidad del subcociente asociado a un ideal interno abeliano ([36]).

En el caso del álgebra de Jordan L_a asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual a 3 de un álgebra de Lie L fuertemente prima sobre un

anillo de escalares ϕ , con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, tenemos que L_a es especial si el conjunto

$$\text{Ker}_L a = \{x \in L : [a, [a, x]] = 0\}$$

no es un subálgebra de L . Para ello, utilizamos el trabajo de Esther García y Miguel Gómez [35] en el que se demuestra que para cualquier elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 $a \in L$ da lugar a una filtración

$$G_{-2} \subset G_{-1} \subset G_0 \subset G_1 \subset G_2,$$

donde $G_{-2} = (a)_L = [a, [a, L]] + \Phi a$, $G_1 = \text{Ker}_L a$ y $G_2 = L$, lo que induce un álgebra 5-graduada

$$\hat{L} = G_{-2} \oplus G_{-1} / G_{-2} \oplus G_0 / G_{-1} \oplus G_1 / G_0 \oplus G_2 / G_1.$$

Nótese que, es este caso, se tiene que

$$[(a)_L, \text{Ker}_L a] = [G_{-2}, G_1] \subset G_{-1}$$

con lo que $[(a)_L, \text{Ker}_L a]^2 \subset G_{-2} = (a)_L$ y $[(a)_L, \text{Ker}_L a]^3 = 0$. Esta filtración principal asociada a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 y sus propiedades serán de utilidad para poder construir posteriormente una filtración asociada a un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie.

Cuando B es un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie L fuertemente prima, no solo tenemos que pedir que el conjunto

$$\text{Ker}_L B = \left\{ x \in L : [B, [B, x]] = 0 \right\}$$

no sea un subálgebra de L , sino que necesitamos que $[B, \text{Ker}_L B]$ sea una subálgebra nilpotente de L . Esta condición se tiene cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$, ya que esto implica que

$$[B, \text{Ker}_L B]^{n+1} \subset [B, [B, \text{Ker}_L B]] = 0.$$

Bajo la condición $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$ para, algún $n \in \mathbb{N}$. podemos construir una $\mathbb{Z}$ -filtración acotada asociada al ideal interno abeliano B de manera, que B es el primer submódulo no nulo de la filtración. Además, el par de Jordan asociado al álgebra de Lie $\mathbb{Z}$ -graduada inducida por esta filtración coincide con el subcociente $(B, L/\text{Ker}_L B)$. Esta filtración extiende a la filtración principal inducida por un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 definida en [35].

Por lo tanto, si pedimos como condición extra que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$, no solo tendremos que $[B, \text{Ker}_L B]$ es nilpotente, sino que además podremos utilizar la filtración inducida por el ideal interno abeliano B para demostrar la especialidad del subcociente $(B, L/\text{Ker}_L B)$.

En ese caso, debemos analizar la hipótesis $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$ para algún $n \in \mathbb{N}$, llegando a la conclusión de que no es una hipótesis muy restrictiva, ya que se verifica en las álgebras de Lie más usuales: si B es un ideal interno abeliano de un álgebra asociativa semiprima R , B es un ideal interno abeliano de los elementos antisimétricos de un álgebra asociativa semiprima con involución, o B es un ideal interno abeliano de longitud finita de un álgebra de Lie no degenerada, la condición $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$ siempre se verifica para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, queda abierta la cuestión de si siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$ en mi álgebra, de Lie L no degenerada, fuertemente prima o simple.

Analizamos también la relación existente entre la filtración principal asociada a un elemento ad-nilpotente $a \in L$ de índice menor o igual que 3 en un álgebra

de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ , con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y la filtra-

ción asociada al ideal interno abeliano $B = (a)_L = [a, [a, L]] + \Phi a$. Si denotamos por $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a la filtración principal definida por a dada en [35] y por $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a la filtración asociada al ideal interno abeliano $B = (a)_L$, tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccccccccc}
 F_{-2} & \subset & F_{-1} & \subset & F_0 & \subset & F_1 & = & K & \subset & F_2 & = & L \\
 \parallel & & \parallel & & \cup & & \parallel & & & & \parallel & & \\
 G_{-2} & \subset & G_{-1} & \subset & G_0 & \subset & G_1 & = & K & \subset & G_2 & = & L
 \end{array}$$

Además, ambas filtraciones coinciden cuando $a \in [a, [a, L]]$.

En la segunda parte del trabajo obtenemos una forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario ([38]). Si $a \in R$ es un elemento nilpotente del índice n y a^{n-1} es regular von Neumann, podemos construir un idempotente $e \in R$, que conmuta con a , y tal que $eRe \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario. Además, el elemento a se descompone como $a = ea + (1-e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$ y $(1-e)a$ un elemento nilpotente de índice menor que n . Tal idempotente e aparece gracias al concepto de inverso de Rus del elemento a , esto es, un elemento b de R verificando que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1}b = b$ y $ba^kb = 0$ para, todo $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$. Dado un inverso de Rus de a , definimos una familia de idempotentes

$$\{e_i\}_{i=1}^n, \text{ con } e_i = a^{i-1}ba^{n-i}, \text{ tal que } e = \sum_{i=1}^n e_i.$$

Gracias a este resultado, demostramos que si $a \in R$ es un elemento nilpotente tal que as es regular von Neumann para todo $s \in \mathbb{N}$, entonces existe una familia

de idempotentes ortogonales no nulos $\{u_i\}_{i=1}^k$, todos ellos conmatando con a .

tales que a se pueden descomponer como $a = \sum_{i=1}^k u_i a$, donde cada elemento

$u_i a$ es mi elemento bloque nilpotente de índice n_i , con $n = n_1 > n_2 > \dots > n_k$, asociado al idempotente bloque u_i . Al ser cada sumando $u_i a$ un bloque de Jordan, llamaremos forma canónica de Jordan del elemento nilpotente a a la suma de estos bloques de Jordan.

Aplicamos estos resultados para describir la estructura de los anillos con un elemento nilpotente a de índice máximo n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Con algunas condiciones adicionales sobre la regularidad del anillo, damos descripciones más precisas sobre los coeficientes de los anillos de matrices involucrados. Por ejemplo, si R es regular von Neumann, entonces $eRe \cong M_n(S)$, donde S es regular abeliano y, si además R es indescomponible, entonces S resulta ser un anillo de división.