

## **PARTE IV**

### **CONCLUSIONES GENERALES**



# PRINCIPALES HALLAZGOS E IMPLICACIONES

La posibilidad de poder ver un sistema de Jordán dentro de un sistema asociativo ha sido considerada desde el comienzo de la Teoría de Jordan. Por ello, uno de los resultados principales de este trabajo ha sido dar condiciones bajo las cuales sistemas de Jordan asociados a un álgebra de Lie  $L$  fuertemente prima son especiales. Se ha estudiado la especialidad tanto del álgebra de Jordan asociado a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 como del subcociente asociado a un ideal interno abeliano. Además, ambas condiciones son condiciones Lie, aunque tratamos con sistemas de Jordan.

En el caso del álgebra de Jordan  $L_a$  asociada a un elemento ad-nilpotente  $a$  de índice menor o igual que 3 de un álgebra de Lie  $L$  fuertemente prima sobre

un anillo de escalares  $\phi$ , con  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ , tenemos que  $L_a$  es especial si  $\text{Ker}_L a$  no es un subálgebra de  $L$ .

Cuando  $B$  es un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie  $L$  fuertemente prima, tal que  $[B, \text{Ker}_L B]^n \subset B$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $\text{Ker}_L B$  no sea un subálgebra de  $L$ , entonces el subcociente  $(B, L/\text{Ker}_L B)$  es especial. Gracias a este resultado obtenemos que si  $R$  es un álgebra asociativa sobre un anillo de escalares

$\phi$ , tal que  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ , y consideramos el álgebra de Lie  $L = R^- / Z(R)$ , entonces

el subcociente  $(B, L/\text{Ker}_L B)$  es especial y fuertemente primo para cualquier ideal interno abeliano  $B$  de  $L$ . Estos resultados se encuentra en el artículo publicado [36].

Otro resultado de suma importancia es poder caracterizar un elemento  $ea \in R$  como un bloque de Jordan de tamaño  $n \times n$ , donde  $a$  es un elemento nilpotente de  $R$  de índice  $n$ , con  $a_{n-1}$  regular von Neumann, y  $e$  es un idempotente de  $R$ . Concretamente, si  $a \in R$  es un elemento nilpotente del índice  $n$  con  $a^{n-1}$  es regular von Neumann, podemos encontrar un elemento  $b \in R$  tal que  $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$ ,  $ba^{n-1}b = b$  y  $ba^k b = 0$  para, todo  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ .

A un elemento con estas características se le denomina inverso de Rus de  $b$ . Dado un inverso de Rus del elemento  $a$ , construimos una familia de idempotentes  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , con  $e_i = a^{i-1}ba^{n-i}$ . De esta forma, obtenemos que  $e = \sum_{i=1}^n e_i$  es un

idempotente que conmuta con  $a$  y tal que  $eRe \cong M_n(S)$ , donde  $S$  es un anillo

unitario. Haciendo uso de este idempotente  $e$ , el elemento  $a$  se descompone como  $a = ea + (1 - e)a$ , siendo  $ea \in eRe \cong M_n(S)$  un bloque de Jordan de tamaño  $n \times n$ , asociado al idempotente bloque  $e$ , y  $(1 - e)a$  un elemento nilpotente de índice menor que  $n$ .

Gracias a esto podemos describir la estructura de los anillos con un elemento nilpotente  $a$  de índice máximo  $n$  y tal que  $a^{n-1}$  es regular von Neumann. Concretamente, si  $R$  es indescomponible, entonces  $a$  es un elemento bloque asociado al idempotente  $e = 1$  y  $R \cong M_n(S)$ , donde  $S$  es un anillo unitario sin elementos nilpotentes no nulos. Si además  $R$  es regular von Neumann, entonces  $R \cong M_n(\Delta)$ , donde  $\Delta$  es un anillo de división. Por otra parte, si  $R$  es regular von Neumann, entonces  $eRe \cong M_n(S)$ , donde  $S$  es regular abeliano y, si  $R$  es primo,  $R \cong M_n(S)$ , donde  $S$  es dominio unitario.

Además, podemos utilizar también este resultado para determinar la forma canónica de un elemento nilpotente en un anillo  $R$ . Si  $a$  es un elemento nilpotente de  $R$  tal que para todo  $s \in \mathbb{N}$  se verifica que  $a^s$  es regular von Neumann, podemos construir una familia de idempotentes ortogonales no nulos  $\{u_i\}_{i=1}^k$ , tales que  $u_i a = a u_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , de manera que  $a$  se puede descomponer en una suma finita de elementos bloques nilpotentes de índices decrecientes asociados a esos idempotentes. Concretamente, se tiene

que  $a = \sum_{i=1}^k u_i a$ , donde cada elemento  $u_i a$  es un elemento bloque nilpotente de

índice  $n_i$ , con  $n = n_1 > n_2 > \dots > n_k$ , asociado al idempotente bloque  $u_i$ . A esta descomposición en bloques de Jordan se le denomina forma canónica de Jordan del elemento nilpotente  $a$ . Estos resultados pueden verse en el artículo publicado [38].