

CAPÍTULO 1. GASES

Estudiamos la ecuación de estado del gas ideal que relaciona la presión con el número de partículas, el volumen y la temperatura. A través de ésta, junto con una expresión cinética para la presión, obtenemos la energía interna del gas ideal que toma distintas formas según se trate de un gas monoatómico, diatómico o poliatómico. Finalmente, analizamos la dilatación en líquidos y sólidos, lo que nos permite relacionar variaciones de volumen con cambios de temperatura.

1.1. Gases ideales

Debido a la pequeña densidad de los gases, sus moléculas están en promedio bastante separadas unas de otras en comparación con su tamaño. De este modo, las partículas siguen un movimiento rectilíneo y uniforme excepto cuando colisionan de forma elástica entre ellas o con las paredes del recipiente que contiene el gas. Sin embargo, a pesar de la aparente simplicidad de los gases, una *descripción microscópica* de los mismos que nos proporcione la posiciones y velocidades de las moléculas en todo instante de tiempo es imposible, pues hay demasiadas (un centímetro cúbico de aire contiene unas $2,7 \cdot 10^{19}$ moléculas).

Afortunadamente, aún es posible recurrir a una *descripción macroscópica* de los gases que tiene en cuenta un conjunto pequeño de variables (macroscópicas), tales como la presión p , el volumen V y la temperatura T .

Estas variables o magnitudes determinan los estados de equilibrio del gas, es decir, situaciones estacionarias (independientes del tiempo) que los sistemas alcanzan cuando están aislados (no intercambian energía con su exterior). Vamos a estudiar estas propiedades macroscópicas y cómo se relacionan con los valores medios de las cantidades microscópicas.

Como la cantidad de partículas de un gas macroscópico es enorme, se usa también como unidad de cantidad de materia el *mol*, que es la cantidad de materia que contiene

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ partículas,}$$

sean éstas átomos, moléculas, iones, etc. El número N_A se llama *número de Avogadro* y se definió inicialmente como el número de átomos que hay en 12 g

de carbono. Como el número de moles se usa para partículas muy diferentes, se suele especificar de qué partículas se trata. Así, tenemos moles de átomos, de moléculas, etc.

La *masa molar* de un elemento es la masa de un mol. Usando la tabla periódica podemos ver, por ejemplo, que un mol de moléculas de O_2 tiene una masa muy aproximada de 32 g. Para el aire, formado principalmente por un 76 % de N_2 , un 23 % de O_2 y un 1 % de Ar, la masa molar es muy aproximadamente de 29 g/mol.

Supongamos n moles de gas dentro de un recipiente de volumen V a una temperatura T . El gas ejercerá una presión p que obedecerá, en buena aproximación, la *ley de los gases ideales*

$$p = \frac{nRT}{V},$$

donde $R = 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ es la *constante universal de los gases*. En la ley de los gases ideales, la temperatura T se mide en la *escala absoluta de temperaturas (Kelvin)*, en la cual el punto de congelación del agua corresponde a $T = 273,15 \text{ K}$, y su punto de ebullición a $T = 373,15 \text{ K}$. Aunque la escala absoluta de temperaturas es la única con significado fundamental, es de uso común la *escala Celsius*, definida tal que $T_C = T - 273,15 \text{ }^\circ\text{C}$. En ella, el punto de congelación del agua es $0 \text{ }^\circ\text{C}$ y su punto de ebullición es $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

La ley de los gases ideales es una relación simple entre las cantidades macroscópicas que caracterizan un gas. En condiciones normales de densidad y presión, los gases reales obedecen esta ley bastante bien, pero si un gas se comprime hasta llegar a tener una densidad muy alta, su comportamiento se desviará del de un gas ideal. Un *gas ideal* es uno que obedece exactamente la ecuación anterior, y es el caso límite de un gas real cuando la densidad y presión tienden a cero. Podemos pensar en un gas ideal como consistente en átomos o moléculas de tamaño infinitesimal que no ejercen fuerzas entre ellas o sobre las paredes del recipiente que los contiene excepto en los brevísimos instantes en los que se produce una colisión.

La ley de los gases ideales se puede escribir también en términos del *número de partículas* (átomos o moléculas) N . Como el mol es la cantidad de materia que contiene exactamente el número de Avogadro N_A de partículas, resulta que se puede escribir

$$N = nN_A,$$

de manera que la ley de los gases ideales se expresa

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A} RT = N \frac{R}{N_A} T = N k_B T, \quad (1,1)$$

donde la cantidad

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

se llama *constante de Boltzmann*.

Ejemplo 1.1.1 Un manómetro es un aparato de medida que nos proporciona la presión de un gas tomando como referencia (cero) la presión atmosférica. Uno de estos aparatos nos proporciona una medida de 500 kPa para un gas (ideal) cuando su temperatura es de 10 °C. Si el gas no sale ni entra de su recipiente y la presión atmosférica se mantiene a 1 atm $\simeq$ 101 kPa, queremos calcular la presión del gas cuando el gas está a 40 °C.

Sol. El número de moles y el volumen del gas en el interior del recipiente se mantienen constantes. Según la ecuación de estado de los gases ideales, esto implica, entre un estado 1 y un estado 2, que

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}$$

Un aspecto clave es que se nos pide la presión interna o manométrica del gas, que se define como la diferencia entre la presión del gas p y la presión atmosférica p_0 , es decir, aquella presión p_{man} tal que

$$p = p_0 + p_{man}.$$

En el estado 1,

$$p_1 = p_0 + p_{man,1} = 101 \text{ kPa} + 500 \text{ kPa} = 601 \text{ kPa}.$$

Usando la primera ecuación, en el estado 2,

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} = 601 \text{ kPa} \frac{273,15 + 40}{273,15 + 10} = 665 \text{ kPa}.$$

La presión manométrica final es, entonces,

$$p_{\text{man},2} = p_2 - p_0 \simeq 665 - 101 = 564 \text{ kPa}.$$

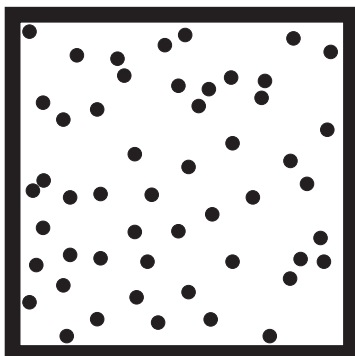
1.2. Presión cinética

La presión ejercida por un gas sobre el recipiente que lo contiene se debe a los impactos de las moléculas del gas contra las paredes. Se puede saber cuánto vale esta presión a partir de los valores medios del movimiento de las moléculas, lo que permite comprender cómo una propiedad macroscópica (la presión) emerge del comportamiento microscópico de las moléculas individuales del gas.

Supondremos que el recipiente es un cubo de lado L , que las moléculas chocan con las paredes pero no lo hacen entre sí y que las colisiones con las paredes son elásticas, así que se conservan el momento lineal y la energía cinética en cada choque. Estas suposiciones no son absolutamente necesarias pero hacen los cálculos más sencillos.

En la figura 1.1 vemos una representación esquemática del recipiente lleno de moléculas de gas. El movimiento de cada molécula se puede descomponer en componentes x , y , z , todas ellas equivalentes por la simetría de la situación. Veamos el movimiento en el eje x .

Figura 1.1: Representación esquemática de un gas ideal.



Una molécula dada tiene, a lo largo del eje x , una velocidad v_x que suponemos positiva y cuyo valor permanece constante hasta colisionar con la pared en $x = L$, por sufrir sólo colisiones elásticas con las paredes. Cuando la molécula choca con la pared en $x = L$, le transfiere un momento lineal igual a $2mv_x$, donde m es la masa de la molécula. Si, además, suponemos que la mitad de las partículas $N/2$ tienen velocidad v_x y la otra mitad $-v_x$, entonces la fuerza promedio f ejercida por las moléculas del gas sobre la pared es igual al cambio de momento en cada colisión, $2mv_x$, multiplicado por $N/2$ y dividido por el tiempo que tardan en colisionar L/v_x :

$$f = N \frac{mv_x^2}{L}$$

La presión del gas sobre la pared es la fuerza dividida por el área $S = L^2$ de la pared, de modo que

$$\frac{f}{S} = \frac{Nmv_x^2}{L^3} = \frac{Nmv_x^2}{V},$$

donde $V = L^3$ es el volumen total del gas.

Hemos supuesto en el cálculo anterior que todas las moléculas tienen la misma velocidad en módulo, pero esto no es verdad: las velocidades de las moléculas tienen cierta distribución. La fuerza promedio por unidad de área proporciona la presión. De este modo, hemos de reemplazar la cantidad v_x^2 en la fórmula de la presión del gas por el valor medio $\overline{v_x^2}$, llegando a

$$p = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{V}.$$

Por la simetría del problema, el movimiento en cada uno de los ejes x , y , z es básicamente el mismo, por lo que los valores promedios de las velocidades al cuadrado son todos iguales, esto es, $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$. El valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas cumple entonces

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}.$$

De aquí, la presión se puede escribir como

$$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}, \quad (1.2)$$

que es el resultado que buscábamos, relacionando p con los valores promedio del movimiento de las moléculas. Se suele llamar a esta expresión la fórmula de la *presión cinética*.

En el caso de un gas ideal, la fórmula de la presión permite interpretar microscópicamente la temperatura, obteniendo un significado físico para ella. Usamos la ley de los gases ideales en la forma $pV = Nk_B T$. Despejando p de aquí e introduciendo el resultado en la fórmula de la presión, obtenemos

$$T = \frac{\overline{mv^2}}{3k_B},$$

o bien, en términos del valor medio del cuadrado de la velocidad,

$$\overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m}$$

La raíz cuadrada del valor medio $\overline{v^2}$ se llama *velocidad cuadrática media* v_{rms} y cumple

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}, \quad (1.3)$$

lo que indica que la velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas aumenta cuando la temperatura del gas aumenta. Esto relaciona el concepto de temperatura con una medida de la rapidez del movimiento de las partículas.

Ejemplo 1.2.1 Podemos aprovechar la relación (1.3) para hacernos una idea de la velocidad a la que van las moléculas del aire en condiciones físicas normales. Para ello, podemos calcular la velocidad cuadrática media de la molécula de nitrógeno y de oxígeno a 15 °C, por ejemplo.

Sol. Para poder usar la ecuación (1.3), necesitamos la masa de la molécula en cuestión. La masa de una molécula de N_2 es

$$m = \frac{M(N_2)}{N_A} = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

de modo que su velocidad cuadrática media es

$$v(N_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (273,15 + 15)}{4,65 \cdot 10^{-26}}} = 507 \text{ m/s.}$$

Para el oxígeno,

$$m = \frac{M(O_2)}{N_A} = \frac{32 \cdot 10^{-3}}{6,022 \cdot 10^{23}} = 5,31 \cdot 10^{-26} \text{ kg,}$$

por lo que

$$v(O_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (273,15 + 15)}{5,31 \cdot 10^{-26}}} = 474 \text{ m/s.}$$

1.3. Energía interna de un gas ideal

Consideremos un gas encerrado en un recipiente. La energía de este sistema tiene varias contribuciones. Una de ellas es la energía cinética del movimiento macroscópico del sistema como un todo (podemos llevarnos el recipiente de un lado a otro a cierta velocidad, o rotarlo con cierta velocidad angular); otra es la energía potencial macroscópica del sistema, con sus contribuciones gravitatoria, elástica, electrostática, etc; y otra es la energía cinética y potencial microscópica de las moléculas del gas cuando el recipiente está en reposo. Esta última contribución es la que nos interesa ahora, y se llama *energía interna* U del gas.

En un gas ideal, las moléculas no interactúan entre sí a menos que choquen, de manera que su energía potencial de interacción no varía y puede tomarse como nula eligiendo el origen de energías apropiadamente (en un gas real, en un líquido o en un sólido sí han de considerarse variaciones de energía potencial para la energía interna). Esto implica que sólo hemos de tener en cuenta la energía cinética de las moléculas, pudiendo escribir la energía interna como

$$U = NE_c,$$

donde N es el número de moléculas y E_c la energía cinética media de cada una de ellas, que se expresa

$$E_c = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

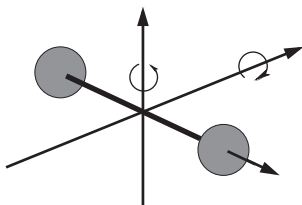
Usando la relación de $\overline{v^2}$ con T obtenida en el apartado anterior, llegamos a

$$U = N \frac{1}{2} m \frac{3k_B T}{m} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T. \quad (1.4)$$

En este cálculo hemos supuesto implícitamente que las moléculas del gas son puntuales, sin estructura. Esto es válido en el caso de *gases monoatómicos* como el helio o el argón, pero no en general.

Los *gases diatómicos*, como los compuestos por N_2 y O_2 , tienen, además del movimiento traslacional de sus moléculas, otros movimientos posibles. Podemos ver las moléculas de estos gases como dos átomos puntuales unidos entre sí rígidamente por una varilla, como se representa en la figura 1.2. Al colisionar con la pared del recipiente, estas moléculas pueden empezar a rotar respecto a su centro de masas. Así, hay que tener en cuenta también la energía cinética de rotación respecto a dos ejes perpendiculares entre sí y que pasan por el centro de masas de las moléculas, ejes que vemos en la figura 1.2.

Figura 1.2: Representación esquemática de una molécula diatómica.



En el caso de los gases monoatómicos, los valores medios de las cantidades v_x^2 , v_y^2 , v_z^2 contribuyen de la misma manera a la energía interna del gas. Esto ocurre también para el movimiento de rotación. El resultado general se conoce con el nombre de *teorema de equipartición de la energía*: cada componente

traslacional o rotacional del movimiento de una molécula tiene una energía cinética media de valor $\frac{1}{2} k_B T$. Aplicando este teorema, la energía cinética media de rotación de una molécula de un gas diatómico será

$$E_{c,rot} = \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T = k_B T,$$

y la *energía interna de un gas diatómico*, considerando también el movimiento de traslación, será

$$U = \frac{3}{2} Nk_B T + Nk_B T = \frac{5}{2} Nk_B T = \frac{5}{2} nRT. \quad (1.5)$$

Para *gases poliatómicos* con moléculas que no poseen simetría de rotación, como la del vapor de agua, hay que tener en cuenta la posibilidad de rotación respecto a un tercer eje. Esto implica que hemos de añadir un término más, de valor $\frac{1}{2} k_B T$, con lo que la energía interna resulta

$$U = \frac{5}{2} Nk_B T + \frac{1}{2} Nk_B T = 3Nk_B T = 3nRT. \quad (1.6)$$

Ejemplo 1.3.1 Podemos utilizar las expresiones obtenidas de la energía interna para determinar cuánta energía se necesita para calentar un gas ideal. Tomemos, por ejemplo, 100 g de helio a 10 °C y calculemos la energía necesaria para calentarlo hasta 40 °C.

Sol. El helio es un gas monoatómico con una masa molar $M(\text{He}) = 4 \text{ g/mol}$. Aunque no nos lo pidan, vamos a calcular también la energía interna de 100 g de helio a 10 °C. Por ser monoatómico, su energía interna se puede escribir como

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \frac{m}{M(\text{He})} RT = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 10) = 8,85 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Cuando la temperatura del helio cambia, su variación de energía interna es

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T = \frac{3}{2} \frac{m}{M(\text{He})} R \Delta T = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,1}{4 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (40 - 10) = 9,35 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Dado que la energía del gas crece al aumentar la temperatura, esta es la energía que debemos proporcionarle para conseguirlo.

1.4. Dilatación térmica de sólidos y líquidos

Según la ley de los gases ideales que hemos estado estudiando, a presión constante el volumen de un gas crece linealmente con la temperatura. Tal aumento de volumen ocurre también para sólidos y líquidos, aunque de forma mucho más modesta. Este fenómeno se llama *dilatación térmica*. Durante la dilatación, el sólido mantiene su forma pero sus dimensiones crecen proporcionalmente. Los líquidos no tiene que mantener ninguna forma y sólo llenan más el recipiente que los contiene.

La dilatación térmica de un sólido se puede describir matemáticamente por el aumento de sus dimensiones lineales. Para muchos sólidos, y en un intervalo de temperaturas cercanas a la temperatura ambiente, el aumento ΔL de su longitud L_0 es proporcional al aumento de temperatura ΔT , de manera que

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad \Rightarrow \quad L = L_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]. \quad (1.7)$$

La constante de proporcionalidad α se llama *coeficiente de dilatación lineal* y su unidad es K^{-1} . De manera análoga, el incremento ΔV de volumen V_0 de un sólido sigue una ley similar,

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad \Rightarrow \quad V = V_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right], \quad (1.8)$$

siendo β , también medido en K^{-1} , el *coeficiente de dilatación volumétrica*. Se puede demostrar que, para el mismo sólido en las mismas condiciones,

$$\beta = 3\alpha.$$

La fórmula de la dilatación volumétrica de los sólidos sirve también para los líquidos.

La dilatación térmica ha de tenerse en cuenta en el diseño de estructuras de grandes dimensiones, tales como puentes y vías de tren. Las cubiertas de los puentes tienen normalmente juntas de dilatación con huecos que permiten cambios de longitud, evitando que el puente se combe. También se instalan juntas de dilatación entre los segmentos de las vías de tren, pero si la temperatura excede las expectativas, los resultados pueden ser desastrosos.

1.5. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$pV = nRT = Nk_B T$	Ecuación de estado del gas ideal	(1.1)
p	Presión	
V	Volumen	
n	Número de moles	
R	Constante universal de los gases	
T	Temperatura en escala absoluta	
N	Número de moléculas	
k_B	Constante de Boltzmann	
$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}$	Fórmula de la presión cinética	(1.2)
m	Masa de las moléculas	
$\overline{v^2}$	Valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas	
$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$	Velocidad cuadrática media	(1.3)
$U = \frac{3}{2}nRT$	Energía interna gas ideal monoatómico	(1.4)
$U = \frac{5}{2}nRT$	Energía interna gas ideal diatómico	(1.5)
$U = 3nRT$	Energía interna gas ideal poliatómico	(1.6)
$\Delta L = L_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$	Dilatación lineal de sólidos	(1.7)
$\Delta L = L - L_0$	Longitud a la temperatura T menos la longitud a la temperatura T_0	
α	Coeficiente de dilatación lineal	
$\Delta V = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]$	Dilatación volumétrica en sólidos y líquidos	(1.8)
$\Delta V = V - V_0$	Volumen a la temperatura T menos el volumen a la temperatura T_0	
β	Coeficiente de dilatación volumétrica	

Ejemplo 1.4.1 Tomemos un material sólido que tiene un coeficiente de dilatación lineal de $5 \cdot 10^{-9}/^{\circ}\text{C}$. Calculemos el incremento de temperatura necesario para aumentar su volumen en un $10^{-4} \%$.

Sol. El coeficiente de dilatación volumétrica del sólido se relaciona con el lineal mediante

$$\beta = 3\alpha = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 15 \cdot 10^{-9} \text{ K}^{-1}.$$

El aumento de volumen del sólido es

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T.$$

Despejando el aumento de temperatura,

$$\Delta T = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1}{15 \cdot 10^{-9}} \frac{10^{-4}}{100} = 66,7^{\circ}\text{C}.$$

1.6. Problemas resueltos

1. Un gas ideal está encerrado en un cilindro provisto de un pistón a la presión ambiente (1 atm). Por medio del pistón disminuimos el volumen del gas hasta una décima parte de su valor inicial. Teniendo en cuenta que la temperatura final del gas es igual a la inicial, determina la lectura de presión manométrica.

Sol. El número de moles y la temperatura son iguales entre el estado inicial 1 y el final 2, de manera que, por la ecuación de estado de los gases ideales,

$$pV = nRT = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2}.$$

La presión inicial es la ambiental, por lo que $p_1 = p_0 = 1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$.

La presión en el estado 2 será

$$p_2 = p_1 \frac{V_1}{V_2} = p_0 \frac{V_1}{V_1/10} = 10 p_0.$$

La presión manométrica final estará dada por

$$p_{\text{man},2} = p_2 - p_0 = 10 p_0 - p_0 = 9 p_0 = 9 \cdot 101 \text{ kPa} = 909 \text{ kPa}.$$

2. Un litro de gas ideal tiene una presión y temperatura de 1 atm y -30°C , respectivamente. Calcula la presión de la misma cantidad de gas si su volumen se reduce a medio litro y su temperatura se eleva hasta los 30°C .

Sol. El número de moles se mantiene constante en el proceso, de manera que

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = \text{constante} \Rightarrow p_2 = p_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}.$$

Poniendo los datos en la última ecuación, resulta

$$p_2 = 101 \text{ kPa} \frac{10^{-3} \cdot (273,15 + 30)}{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (273,15 - 30)} = 252 \text{ kPa}.$$

3. Cierta cantidad de hidrógeno (gas ideal) ocupa 120 cm^3 , tiene una temperatura de 15°C de temperatura y está a 150 kPa de presión. Calcula su volumen cuando su temperatura es -15°C y su presión vale 300 kPa .

Sol. Dado que el número de moles es constante,

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{pV}{T} = nR = \text{constante} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$$

Con los datos del ejercicio,

$$V_2 = 120 \text{ cm}^3 \frac{150 \cdot (273,15 - 15)}{300 \cdot (273,15 + 15)} = 53,8 \text{ cm}^3.$$

4. El gas de N_2 se puede considerar un gas ideal en un rango muy amplio de presiones y temperaturas. Teniendo en cuenta que a 1 atm y 0°C su densidad es de $1,25 \text{ kg/m}^3$, calcula su densidad a 98 kPa y 15°C .

Sol. La relación entre la densidad de una masa m de gas en el estado 2 y la densidad de la misma masa en el estado 1 se puede obtener a partir de su cociente,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{m/V_2}{m/V_1} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2}$$

Usamos ahora la ecuación de estado de los gases ideales para calcular V_1/V_2 , teniendo en cuenta que el número de moles es el mismo en ambos estados (ya que la masa lo es),

$$nR = \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}.$$

Con todo esto,

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{V_1}{V_2} = \rho_1 \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2} = 1,25 \frac{98 \cdot (273,15 + 0)}{101 \cdot (273,15 + 15)} = 1,15 \text{ kg/m}^3.$$

5. Calcula la masa de oxígeno contenida en un recipiente de 3 l a una presión manométrica de 300 kPa y a una temperatura de 25°C .

Sol. El número de moles de O_2 en el tanque es

$$n = \frac{pV}{RT}$$

De aquí, la masa de gas, conociendo su masa molar que en este caso es $M(O_2) = 32 \text{ g/mol}$, se puede obtener como

$$\begin{aligned} m &= nM(O_2) = \frac{pVM(O_2)}{RT} \\ &= \frac{(300 + 101) \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot (273,15 + 25)} = 15,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg.} \end{aligned}$$

6. Un recipiente de 50 cm^3 de volumen contiene 5 mg de nitrógeno líquido. Si calentamos el sistema hasta que alcanza 25°C , calcula la presión del gas en el nuevo estado.

Sol. El nitrógeno líquido no es un gas ideal pero, al llegar el tubo a temperatura ambiente, todo el líquido se ha convertido en gas de N_2 , cuya masa molar es $M(N_2) = 28 \text{ g/mol}$. El número de moles de este gas en el recipiente es

$$n = \frac{m}{M(N_2)}$$

La presión resulta

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{M(N_2)V} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 25)}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 8850 \text{ Pa.}$$

7. Calcula la masa molar de un gas ideal sabiendo que, cuando su temperatura es de 20°C y su presión de 1 atm , ocupa $1,5 \text{ litros}$ y su masa es de $2,8 \text{ g}$.

Sol. Tomando $m = n M_m$, donde M_m es la masa molar del gas, de la ecuación de estado de los gases ideales, tenemos

$$\begin{aligned} pV &= nRT = \frac{m}{M_m} RT \\ \Rightarrow M_m &= \frac{mRT}{pV} = \frac{2,8 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 20)}{101 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}} = 0,0450 \text{ kg/mol.} \end{aligned}$$

8. Teniendo en cuenta que la masa molar del metano es de 16 g/mol, calcula su densidad a 25 °C y 4 atm.

Sol. De la ecuación de los gases ideales,

$$V = \frac{nRT}{p}.$$

La densidad del gas se puede escribir (usando $m = n M_m$) como

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mp}{nRT} = \frac{M_m p}{RT} = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 101 \cdot 10^3}{8,31 \cdot (273,15 + 25)} = 2,61 \text{ kg/m}^3.$$

9. Un recipiente de 2 m³ de volumen contiene 3 moles de N₂ en equilibrio a 400 kPa de presión. Calcula la velocidad cuadrática media de las moléculas.

Sol. La velocidad cuadrática viene dada por

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

donde la temperatura $T = \frac{pV}{nR}$ y la masa de una molécula de N₂ es $m = \frac{M}{N_A}$,

siendo $M = 28$ g/mol la masa molar de N₂. Sustituyendo las dos últimas fórmulas en la primera

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3pV}{nM} \frac{k_B N_A}{R}} = \sqrt{\frac{3pV}{nM}},$$

donde hemos usado que $\frac{k_B N_A}{R} = 1$. Sustituyendo los valores

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 400 \cdot 10^3 \cdot 2}{3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 5350 \text{ m/s}.$$

10. Calentamos un depósito de gas que contiene 50 litros de N₂ a 250 K y 200 atm hasta 350 K. Calcula el aumento de la energía interna del gas.

Sol. El número de moles puede extraerse de la ecuación de los gases ideales en su estado inicial,

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1}.$$

La variación de energía interna, dado que el gas es diatómico, es

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{5}{2} n R \Delta T = \frac{5}{2} \frac{p_1 V_1 R}{RT_1} (T_2 - T_1) = \frac{5 p_1 V_1}{2 T_1} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{5 \cdot 200 \cdot 101 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 250} \cdot (350 - 250) = 1,01 \cdot 10^6 \text{ J}.\end{aligned}$$

11. Teniendo en cuenta que al incrementar la temperatura de un sólido en 2 °C su volumen aumenta en un $10^{-5} \%$, calcula su coeficiente de dilatación volumétrica.

Sol. El aumento relativo de volumen de un sólido se relaciona con el incremento de su temperatura según la expresión

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta T.$$

Despejando el coeficiente de dilatación, tenemos

$$\beta = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta T} = \frac{10^{-5}}{100} \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-1}.$$

12. Teniendo en cuenta que la densidad del mercurio a 0 °C es de 13600 kg/m³ y su coeficiente de dilatación volumétrica es de $1,82 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, calcula su densidad a 20 °C.

Sol. La densidad de una masa m de mercurio a temperatura T se relaciona con la densidad de la misma masa a temperatura T_0 según

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{m/V}{m/V_0} = \frac{V_0}{V} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{V/V_0}.$$

Para calcular V/V_0 , usamos la ley de dilatación volumétrica:

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T) \Rightarrow \frac{V}{V_0} = 1 + \beta \Delta T.$$

Poniendo esto en la ecuación anterior, obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0}{V/V_0} = \frac{\rho_0}{1 + \beta \Delta T} = \frac{13600}{1 + 1,82 \cdot 10^{-4} \cdot 20} \quad 13551 \text{ kg/m}^3.$$

13. Almacenamos aceite en una botella de vidrio de 1 ℓ. Teniendo en cuenta que la botella está completamente llena, calcula el aceite que se derrama si se aumenta la temperatura en 20 °C. Ten en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica del aceite es de $0,7 \cdot 10^{-3}/^\circ\text{C}$ y el coeficiente de dilatación lineal del vidrio de $10^{-5}/^\circ\text{C}$.

Sol. El volumen inicial de aceite que está dentro de la botella es $V_0 = 10^{-3} \text{ m}^3$. El volumen final es

$$V_{\text{aceite}} = V_0 (1 + \beta \Delta T) = 1 + 0,7 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 1,014 \text{ ℓ}.$$

Por su parte, el interior de la botella de vidrio aumenta como si fuera maciza, es decir,

$$V_{\text{hueco}} = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T) = 1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 = 1,00006 \text{ ℓ}.$$

El aceite que se derrama al aumentar la temperatura es, por tanto,

$$V_{\text{derramado}} = V_{\text{aceite}} - V_{\text{hueco}} = 1,014 - 1,00006 = 1,34 \cdot 10^{-2} \text{ ℓ}.$$