

CAPÍTULO 4. ONDAS

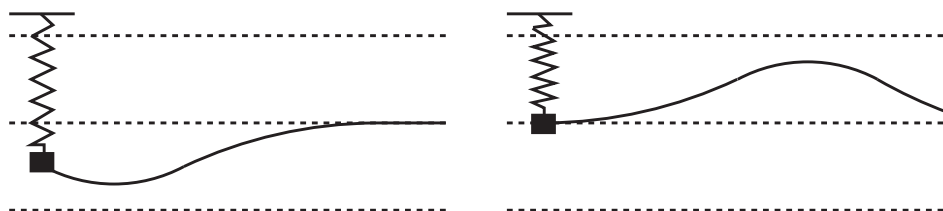
Iniciamos con este tema el estudio de las ondas. Como ejemplo de onda transversal, estudiamos la propagación de una perturbación por una cuerda tensa. Presentamos la ecuación de ondas y estudiamos en detalle las soluciones armónicas. Como ejemplo de onda longitudinal, estudiamos el sonido. En este último caso, prestamos especial interés a tres propiedades: la onda de desplazamiento de las moléculas, la onda de presión acústica y la onda de variación de la densidad. Finalmente, estudiamos los fenómenos de superposición e interferencia de ondas armónicas.

4.1. Propagación de una perturbación

Consideremos un medio homogéneo y fijémonos en un punto cualquiera de éste, que llamaremos *foco*, en el cual realizamos una perturbación de las propiedades del medio. La perturbación se va propagando al resto de los puntos con un retraso que depende de la distancia. Esta *propagación de una perturbación*, en la que no hay transporte neto de materia pero sí de energía, es lo que llamamos *onda*.

Un ejemplo de onda es el de la figura 4.1. Un muelle en posición vertical comienza a oscilar y hay una cuerda conectada a él. La oscilación se propaga por la cuerda hasta que cada punto de ella realiza el mismo tipo de movimiento. Pero los puntos materiales de la cuerda no se han transportado en horizontal: se limitan a oscilar en torno a su posición de equilibrio verticalmente.

Figura 4.1. Propagación de una onda en una cuerda.

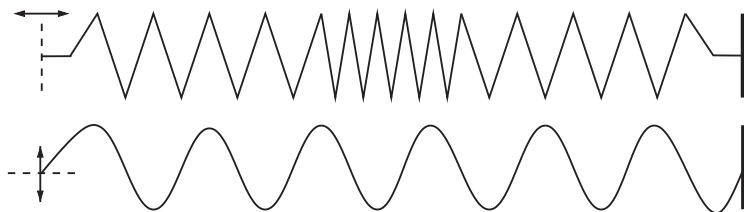


Todos los puntos de un medio homogéneo e isótropo a los que la perturbación transportada por una onda llega en un cierto instante de tiempo tienen el mismo estado o valor de la perturbación. El conjunto o lugar geométrico de estos

puntos forma en el espacio una superficie que se llama *frente de onda* (en el caso particular de una cuerda, el frente de ondas es un punto; en el caso particular de una onda sobre la superficie del agua, el frente de onda es una curva). La forma de estos frentes es también una manera de clasificar las ondas, ya que podemos distinguir entre ondas planas, circulares, cilíndricas, esféricas, etc.

Además, las ondas se pueden también clasificar atendiendo a la relación entre la dirección en que se propaga la energía y la dirección de vibración de la perturbación. Según esto, las ondas pueden ser *longitudinales*, si la vibración y la propagación son paralelas, o *transversales*, si ambas direcciones son perpendiculares.

Figura 4.2. Ejemplo de onda longitudinal en un muelle (arriba) y ejemplo de onda transversal en una cuerda (abajo).



Las ondas en las que, al propagarse, los puntos del medio vibran elásticamente, se llaman *ondas mecánicas*, como las ondas en el agua, en una cuerda, el sonido o las ondas sísmicas. Para que una onda mecánica transversal se propague en un medio, hace falta que éste soporte esfuerzos cortantes.

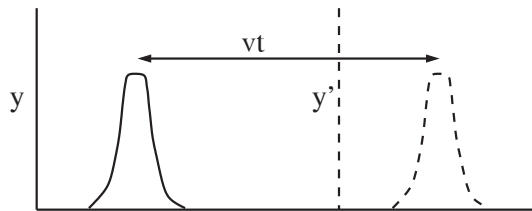
Esta es la razón por la que en los gases prácticamente no se propagan ondas mecánicas transversales de tamaño macroscópico, y en los líquidos las únicas de ellas que se propagan son superficiales (usando los esfuerzos debidos a la tensión superficial). Las ondas en la superficie del agua del mar, así como las sísmicas, son tanto longitudinales como transversales.

4.2. Ondas en una cuerda tensa

Consideremos una cuerda tensa en posición horizontal en equilibrio. Colocamos el eje x a lo largo de la cuerda y el origen en su extremo izquierdo, de manera que y será la altura de cada punto de la cuerda respecto a su posición de equilibrio $y = 0$. Está claro que y es una función que depende del punto x y del tiempo t , es decir $y = y(x, t)$. La propagación del estado de perturbación y a lo largo de la cuerda constituye una onda unidimensional, que tomaremos sin amortiguamiento.

Supongamos que, en el instante inicial $t = 0$, generamos una perturbación $y(x, 0) = f(x)$ en los puntos de la cuerda. A medida que pasa el tiempo, la perturbación se propaga sin amortiguarse a velocidad constante v hacia la derecha, según se ve en la figura 4.3. El objetivo, conocida $y(x, 0)$, es dar la función dependiente del tiempo $y(x, t)$.

Figura 4.3. Propagación de la perturbación $f(x)$ generada inicialmente (línea sólida) hasta el tiempo t (línea a trazos).



Para ello, como vemos en la figura 4.3, tomamos dos sistemas de referencia: el original xy y uno auxiliar $x'y'$ tal que su origen se mueve a la misma velocidad v que la perturbación. Esto significa que, respecto al sistema de referencia $x'y'$, la perturbación no se mueve y siempre tiene la forma $y' = f(x')$. Pero, como vemos en la figura, las alturas desde ambos sistemas de referencia coinciden, así que $y' = y$, y las distancias horizontales respecto a ambos orígenes están relacionadas mediante $x' = x - vt$. En consecuencia, llegamos a una ecuación para la propagación en el sentido del eje x positivo, que es

$$y(x, t) = f(x - vt),$$

siendo $f(x)$ la perturbación en $t = 0$. De la misma forma, si la onda se propaga en el sentido del eje x negativo,

$$y(x, t) = f(x + vt),$$

sin más que cambiar el signo de la velocidad.

Ambas funciones son solución de la *ecuación de ondas unidimensional*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Podemos ahora definir, de forma muy general, una onda como todo fenómeno físico que se propaga obedeciendo esta ecuación. La cantidad v^2 que multiplica al término de derivada espacial determina la *velocidad de propagación*

o *velocidad de fase* v de la onda. La velocidad de propagación depende del medio que utilice la onda para viajar. Por ejemplo, en el caso de una *cuerda tensa*, podemos escribir

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/l}}, \quad (4.1)$$

donde F es la tensión de la cuerda y m/l es su masa por unidad de longitud.

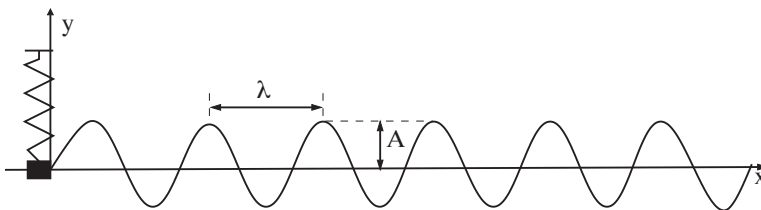
Ejemplo 4.2.1 La fórmula anterior también la podemos utilizar para calcular la tensión F . Por ejemplo, sabemos que los cables principales que soportan el Puente de George Washington en Nueva York tiene una densidad lineal de masa de 4100 kg/m y que la velocidad de propagación de las ondas transversales por ellos es de 250 m/s . Calculemos la tensión a la que están sometidos los cables.

Sol. Despejando la tensión F de la ecuación (4.1), tenemos

$$F = \frac{m}{l} v^2 = 4100 \cdot 250^2 = 256 \cdot 10^6 \text{ N}.$$

De todas las posibles funciones $f(x)$ que determinan una onda unidimensional mediante la expresión $y(x, t) = f(x - vt)$ (propagación a lo largo del eje x positivo) o la análoga $y(x, t) = f(x + vt)$ (propagación a lo largo del eje x negativo), las más importantes son las *funciones armónicas*, en las que f es un seno o un coseno. Esto es así, primero, porque expresan el ejemplo físico de una cuerda tensa que ha sido perturbada en un extremo mediante un movimiento armónico simple, pero sobre todo porque *todas las soluciones de la ecuación de onda se pueden escribir mediante una suma de ondas armónicas*. Por eso, podemos centrarnos en el estudio de este tipo de movimiento ondulatorio.

Figura 4.4. Onda armónica en una cuerda con amplitud A y longitud de onda λ .



Una *onda armónica* unidimensional es aquella tal que, en el estado inicial, se escribe

$$y(x, 0) = A \sin(kx + \varphi_0).$$

Como vemos en la figura 4.4, A es la *amplitud* de la perturbación (en las mismas unidades que y), φ_0 es la *fase inicial en el origen* (en radianes), y k es el *número de onda* (en rad/m), que determina el periodo espacial de la perturbación λ (distancia en metros entre dos máximos o dos mínimos) según

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (4.2)$$

El periodo espacial λ se conoce con el nombre de *longitud de onda*.

Si ahora introducimos la propagación de la perturbación a lo largo del eje x positivo (por ejemplo), tendremos que cambiar x por $x - vt$, resultando la onda armónica

$$y(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \varphi_0] = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0). \quad (4.3)$$

La cantidad

$$\omega = kv. \quad (4.4)$$

se llama *frecuencia angular* (en rad/s) y proporciona el *periodo*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (4.5)$$

que es el tiempo que transcurre desde que un punto dado alcanza un máximo de la perturbación hasta que el mismo punto alcanza otro máximo. La inversa del periodo se llama *frecuencia*,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (4.6)$$

La unidad de frecuencia en el SI es el hercio o hertz, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. La frecuencia indica el número de oscilaciones que realiza la perturbación en un punto por cada segundo. Finalmente, conviene recordar que todo el argumento de la función trigonométrica en la expresión de la onda (en este caso, el argumento del seno es $kx - \omega t + \varphi_0$) se llama *fase* de la onda.

Ejemplo 4.2.2 Consideremos una onda armónica que se propaga por una cuerda cuya tensión es $F = 1 \text{ N}$ y que tiene una masa por unidad de longitud igual a $m/l = 0,01 \text{ kg/m}$. Determinemos la ecuación de la onda armónica sabiendo que su amplitud es $A = 10 \text{ cm}$ y que un punto de la cuerda tarda 1 s en completar una oscilación. Además, en el instante inicial, el punto de coordenadas $x = 0 \text{ cm}$ tiene un desplazamiento $y = 10 \text{ cm}$.

Sol. Si prestamos atención a la fórmula (4.3), para determinar la onda armónica, debemos conocer la amplitud A , el número de onda k , la frecuencia angular ω y la fase ϕ_0 . Sabemos la amplitud, $A = 10 \text{ cm}$, pero nos quedan por determinar las otras tres magnitudes. El tiempo que tarda un punto de la cuerda en completar una oscilación es el periodo $T = 1 \text{ s}$, que lo podemos utilizar para calcular ω mediante la fórmula (4.6):

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \text{ rad / s.}$$

Para conocer el número de onda, no podemos usar la relación (4.2), pues desconocemos la longitud de onda, sino que debemos hacer uso de la ecuación (4.4), para lo que necesitamos calcular previamente la velocidad de propagación v mediante la fórmula (4.1):

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/l}} = \sqrt{\frac{1}{0,01}} = 10 \text{ m / s.}$$

Así,

$$\omega = kv \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{\pi}{5} \text{ rad / m.}$$

Finalmente, la fase ϕ_0 la podemos obtener a partir de la información del valor de la perturbación inicial en el origen. Como $y(0, 0) = 10 \text{ cm} = A$, tenemos:

$$y(0,0) = A \Rightarrow A \sin(0 - 0 + \phi_0) = A \Rightarrow \sin(\phi_0) = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Con todo esto,

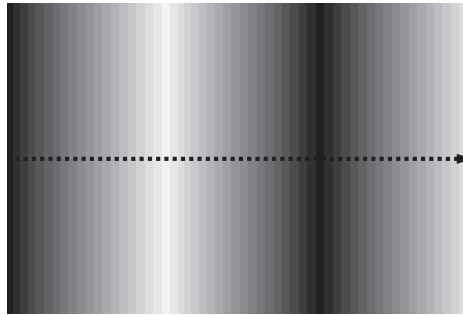
$$y(x,t) = 10 \text{ cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x - 2\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 10 \text{ cm} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}x - 2\pi t\right),$$

donde hemos usado en la última igualdad la relación trigonométrica $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

4.3. Ondas de sonido

El sonido está constituido por *ondas mecánicas longitudinales* que se originan en focos situados en los medios materiales (sólidos, líquidos y gases) y se propagan a través de ellos. Si el foco es puntual, las ondas producidas en medios homogéneos serán esféricas. Sin embargo, a distancia grande del foco, las ondas esféricas se comportan en volúmenes pequeños como *ondas planas*.

Figura 4.5. Representación de una onda de sonido plana. Los distintos tonos indican distintos valores de la amplitud y la flecha la dirección de propagación.



En la figura 4.5 tenemos una imagen de una onda de sonido en un instante de tiempo fijo. La fuente de la onda ha sido la vibración del diafragma de un altavoz, que ha provocado pulsos sucesivos en el aire que está en contacto con él. La onda de sonido consta de zonas alternas de baja densidad y alta densidad, que vemos como zonas claras y oscuras. Estas zonas viajan hacia la derecha en la figura, alejándose del foco. Sin embargo, el aire como un todo no se propaga: las posiciones (medias) de las moléculas simplemente oscilan hacia adelante y hacia atrás. La fuerza elástica que provoca la oscilación proviene de la presión del aire, que trata de mantener la densidad uniforme, oponiéndose a la deformación que supone una zona de alta o baja densidad.

En una onda de sonido, por tanto, hay tres cantidades que oscilan: la densidad del medio, su presión y la posición de las partículas del medio. La onda de densidad y la onda de presión están en fase, pero ambas están desfasadas $\pi/2$ rad respecto de la onda de desplazamiento. Las variaciones típicas de estas propiedades en las ondas de sonido son muy pequeñas: en el aire, aunque la onda de sonido sea muy intensa, los desplazamientos medios de las moléculas son del orden de una décima de milímetro, y las sobrepresiones son del orden del 1 % de la presión normal.

No todas las ondas mecánicas longitudinales son audibles, es decir, no todas excitan el nervio auditivo humano. La zona audible va desde una frecuencia de 20 Hz hasta una frecuencia de 20000 Hz, y las ondas en esta zona se

denominan *ondas sonoras*. Fuera de estos límites, las ondas elásticas longitudinales se siguen llamando sonido aunque no sean audibles por el hombre. Si la frecuencia es inferior a 20 Hz, tenemos *infrasonidos* y, si es superior a 20000 Hz, tenemos *ultrasonidos*.

La variación de la presión respecto a la que corresponde al medio sin perturbar se denomina *presión acústica*. Si la presión en un punto del medio es p y la presión del medio no perturbado es p_0 , la presión acústica en ese punto es $\Delta p = p - p_0$. De manera análoga, la *variación de densidad* respecto a la densidad sin perturbar será $\Delta \rho = \rho - \rho_0$. Por último, llamaremos Δx al *desplazamiento* medio de las moléculas del medio respecto a su punto de equilibrio.

La propagación de una *onda de sonido en un fluido* depende de la densidad del fluido sin perturbar, ρ_0 , y de su *módulo de compresibilidad* κ . Supongamos un material de volumen V sometido a una presión uniforme en su superficie. Debido a esta presión, el material disminuye su volumen conservando su forma. La disminución relativa de volumen del material ($-\Delta V / V$) por unidad de variación de presión Δp se llama coeficiente de compresibilidad, y su inversa es el módulo de compresibilidad

$$\kappa = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V},$$

que se mide en pascuales en el SI. Esta cantidad determina lo compresible (κ pequeños) o incompresible (κ grandes) que es un material y, por tanto, cómo se comporta frente a perturbaciones elásticas.

La velocidad con la que se propaga una onda mecánica armónica plana en un fluido es

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_0}}, \quad (4.7)$$

y se llama *velocidad del sonido en el fluido*.

Cuando el sonido se propaga por un gas podemos suponer que los procesos inducidos son *adiabáticos*. Además, en ese caso, el módulo de compresibilidad del gas crece linealmente con la temperatura. Como consecuencia, si v_0 es la velocidad del sonido en el gas a una temperatura T_0 (medida en Kelvin), la velocidad del sonido en el mismo gas a una temperatura T es

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (4.8)$$

Ejemplo 4.3.1 Con la fórmula (4.8) podemos hacernos una idea de la influencia de la temperatura en la propagación de una onda. Supongamos, por ejemplo, que una onda sonora tarda 3 s en propagarse a través del aire entre dos puntos. El aire está a 20°C y la velocidad del sonido para dicha temperatura es de 340 m/s. Veamos cuánto tardaría el sonido en viajar entre esos mismos dos puntos si el aire estuviera a 0°C.

Sol. Conviene, en primer lugar, calcular la distancia entre estos dos puntos. Si d es dicha distancia, v es la velocidad del sonido a 20°C y $t = 3$ s, tenemos:

$$d = vt = 340 \cdot 3 = 1020 \text{ m/s.}$$

El nuevo tiempo t' a 0°C es

$$t' = \frac{d}{v'},$$

donde v' es la velocidad del sonido a 0°C:

$$v' = v \sqrt{\frac{T'}{T}} = 340 \cdot \sqrt{\frac{0 + 273,15}{20 + 273,15}} \quad 328 \text{ m/s.}$$

Así,

$$t' = \frac{1020}{328} \quad 3,11 \text{ s.}$$

Puede parecer, a simple vista, que la deferencia de tiempos no es muy significativa. Sin embargo, puede ser relevante cuando se diseñan edificios o espacios con unas propiedades acústicas específicas.

Si la onda de desplazamiento de un sonido en un fluido es una *onda armónica plana* como

$$\Delta x(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0), \quad (4.9)$$

con *amplitud de desplazamiento* A , número de onda k y frecuencia angular $\omega = kv$, entonces la onda de presión acústica se puede obtener a partir de ella mediante

$$\begin{aligned}\Delta p(x,t) &= -\kappa \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\kappa Ak \cos(kx - \omega t + \phi_0) \\ &= \kappa Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0 - \pi/2).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Analizando los argumentos, vemos que la onda acústica está retrasada respecto a la de desplazamiento en $\pi/2$ rad, tal como habíamos comentado antes. La presión acústica máxima o *amplitud de presión acústica* resulta

$$\Delta p_{\max} = \kappa Ak.$$

De la misma forma, la onda de variación de densidad se calcula haciendo

$$\begin{aligned}\Delta \rho(x,t) &= -\rho_0 \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x} = -\rho_0 Ak \cos(kx - \omega t + \phi_0) \\ &= \rho_0 Ak \sin(kx - \omega t + \phi_0 - \pi/2).\end{aligned}\quad (4.11)$$

que está en fase con la presión acústica y tiene una amplitud dada por $\rho_0 Ak$. Como la variación de densidad es $\Delta \rho = \rho - \rho_0$, podemos despejar ρ y encontrar los valores máximo y mínimo de la densidad del fluido cuando es atravesado por una onda armónica plana de sonido, que estarán dados por

$$\begin{aligned}\rho_{\max} &= \rho_0 (1 + Ak), \\ \rho_{\min} &= \rho_0 (1 - Ak).\end{aligned}$$

Pasemos ahora a la *propagación del sonido en materiales sólidos*. Las ecuaciones que siguen las ondas de sonido en una *varilla sólida* son completamente similares a las del caso de los fluidos, pero cambiando la velocidad del sonido por

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}, \quad (4.12)$$

donde E es el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young*, que representa la fuerza longitudinal por unidad de sección que hay que aplicar a la varilla para producir en ella un alargamiento igual a la longitud inicial de la misma (su unidad en el SI es 1 Pa).

Ejemplo 4.3.2 Como hemos visto, a partir de la onda de desplazamiento, el módulo de compresibilidad y la densidad del aire sin perturbar, podemos obtener la onda de presión y densidad. También es cierto lo anterior si partimos de cualquier onda. Por ejemplo, consideremos la onda sonora de variación de densidad en el aire dada por $\Delta\rho(x, t) = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \cdot \sin(2\pi x - 680\pi t)$ y determinemos las ondas sonoras de desplazamiento y presión acústica. Para obtener la onda de desplazamiento necesitaremos un dato adicional, por ejemplo, la densidad sin perturbar $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$.

Sol. Consideremos primero la onda de presión acústica. La amplitud de la onda de densidad es

$$\Delta\rho_{\max} = \rho_0 A k$$

y la de la presión

$$\Delta p_{\max} = K A k = \frac{K}{\rho_0} \Delta\rho_{\max},$$

donde κ viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \Rightarrow K = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k} \right)^2.$$

Así

$$\Delta p_{\max} = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \Delta\rho_{\max} = \left(\frac{680}{2} \right)^2 3,5 \cdot 10^{-4} = 40,5 \text{ Pa}$$

y la onda de presión acústica resulta

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_{\max} \sin(2\pi x - 680\pi t) \simeq 40,5 \text{ Pa} \cdot \sin(2\pi x - 680\pi t).$$

Observemos que, para calcular $\Delta p_{\max}$ a partir de $\Delta\rho_{\max}$ sólo necesitamos κ/ρ_0 que se puede calcular a partir de $v = \omega/k$. Esto no es así para la onda de desplazamiento, para la cual necesitamos κ ó ρ_0 (pues $v = \omega/k$ es conocida). Usando ρ_0 , la amplitud A viene dada por

$$\Delta\rho_{\max} = \rho_0 A k \Rightarrow A = \frac{\Delta\rho_{\max}}{\rho_0 k} = \frac{3,5 \cdot 10^{-4}}{1,28 \cdot 2\pi} = 4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Así, la onda de desplazamiento resulta

$$\Delta x(x, t) = A \sin\left(2\pi x - 680\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 4,35 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \sin\left(2\pi x - 680\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Hemos tenido en cuenta que la fase de la onda de desplazamiento es $\pi/2$ mayor que la de densidad.

4.4. Superposición e interferencia

Veamos lo que sucede cuando dos ondas coinciden durante un tiempo en la misma región del espacio. Por ejemplo, cuando la música llega a nuestros oídos desde varios sitios, cuando dos ondas de agua chocan, etc. En estos casos se cumple el *principio de superposición lineal*, que dice que cuando dos ondas coinciden simultáneamente en el mismo punto, la onda resultante es la *suma algebraica* de las ondas individuales. La superposición de ondas armónicas suele llamarse *interferencia*. El principio de superposición se muestra gráficamente en la figura 4.6.

Un caso sencillo es la superposición de dos ondas armónicas de la misma amplitud y frecuencia en una cuerda con cierto desfase entre ellas, que vemos en la figura 4.7.

La expresión matemática de estas dos ondas es

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t),$$

$$y_2 = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0).$$

La onda resultante es la suma $y = y_1 + y_2$. Usando la relación trigonométrica

Figura 4.6. Proceso de interferencia de dos ondas.

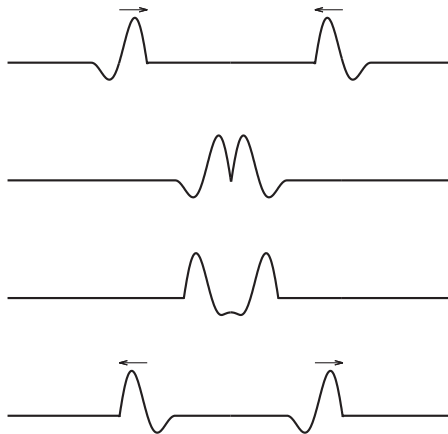
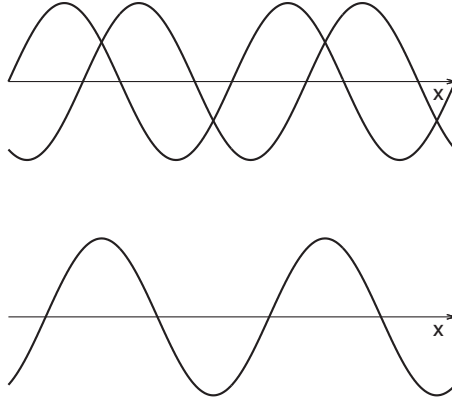


Figura 4.7. Superposición de dos ondas armónicas. Arriba se representan las dos ondas por separado y abajo la onda resultante de la superposición.



$\sin a + \sin b = 2 \cos [(a - b)/2] \sin [(a + b)/2]$, resulta

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right). \quad (4.13)$$

Por tanto, la onda resultante es otra onda armónica con la misma frecuencia, desfasada en $\phi_0/2$ respecto de las dos ondas originales, y cuya amplitud es

$$A_{\text{tot}} = 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)$$

Si $\phi_0 = 2n\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces la amplitud total alcanzará su valor máximo $A_{\text{tot}} = \pm 2A$, y la interferencia se llamará *constructiva*. Por su parte, si $\phi_0 = (2n + 1)\pi$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces la amplitud total alcanzará su valor mínimo $A_{\text{tot}} = 0$, y la interferencia se llamará *destruktiva*.

Ejemplo 4.4.1 Consideremos la superposición de dos ondas armónicas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud $A = 1 \text{ cm}$, que se mueven en el mismo sentido, pero que con una diferencia de fase de $\pi/2 \text{ rad}$. Determinemos la amplitud de la onda resultante.

Sol. Las dos ondas armónicas a lo largo de la cuerda pueden escribirse como

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \pi/2)$$

Usando la fórmula trigonométrica $\sin a + \sin b = 2 \sin(a+b)/2 \cos(a-b)/2$, la interferencia de ambas ondas es

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

La amplitud de interferencia es

$$A_{\text{tot}} = \left| 2A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = \left| 2 \cdot 10^{-2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right| = 0,0141 \text{ m}.$$

4.5. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$v = \sqrt{\frac{F}{m/\ell}}$	Velocidad de propagación de la onda en la cuerda	(4.1)
F	Tensión de la cuerda	
m	Masa de la cuerda	
ℓ	Longitud de la cuerda	

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$y(x, t) = A \sin (kx - \omega t + \varphi_0)$	Onda armónica que se propaga hacia la derecha	(4.3)
y	Perturbación	
x	Coordenada espacial	
t	Coordenada temporal	
A	Amplitud	
k	Número de ondas	
ω	Frecuencia angular	
φ_0	Fase inicial	
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$	Longitud de onda	(4.2)
$v = \frac{k}{\omega}$	Velocidad de propagación	(4.4)
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	Periodo de la onda	(4.5)
$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$	Frecuencia de la onda	(4.6)
$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$	Velocidad del sonido en un fluido	(4.7)
K	Módulo de compresibilidad	
ρ_0	Densidad del fluido sin perturbar	
$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$	Velocidad del sonido en sólidos	(4.12)
E	Módulo de Young	
$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$	Velocidad como función de la temperatura	(4.8)
v_0	Velocidad a la temperatura T_0 (en Kelvin)	
T	Temperatura (en Kelvin)	
$\Delta x(x, t) = A \sin (kx - \omega t + \varphi_0)$	Onda de desplazamiento	(4.9)

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$\Delta p(x,t) = -K \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$	Presión acústica	(4.10)
$\Delta \rho(x,t) = -\rho_0 \frac{\partial(\Delta x)}{\partial x}$	Onda de densidad	(4.11)
$y = y_1 + y_2$ $= 2A \cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_0}{2}\right)$ $y_1 = A \sin(kx - \omega t)$ $y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi_0)$	Interferencia de dos ondas armónicas	(4.13)

4.6. Problemas resueltos

- Un teatro cerrado tiene una longitud de 200 m. Desde el escenario se emite sonido que se dirige hacia la pared opuesta. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido es de 340 m/s, calcula el tiempo que tardamos en escuchar el eco de un sonido emitido desde el escenario.

Sol. La distancia que ha de recorrer el sonido hasta la pared posterior desde el escenario y de vuelta a nosotros es

$$d = 2 \cdot 200 = 400 \text{ m.}$$

El tiempo que tarda el sonido en recorrer esa distancia es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{400}{340} = 1,18 \text{ s.}$$

- Una onda armónica transversal se desplaza a lo largo de una cuerda. La onda tiene amplitud de 1 cm, una longitud de onda de 5 cm y una frecuencia de 10 Hz. Además, se sabe que en el instante inicial el desplazamiento del punto en origen de coordenadas ($x = 0$) es de 0,5 cm. Calcula la velocidad de propagación de la onda y obtén la función de onda en la cuerda.

Sol. Para calcular la velocidad de propagación, hacemos:

$$\omega = kv \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi / \lambda} = \lambda f = 0,05 \cdot 10 = 0,5 \text{ m/s.}$$

Para la función de onda, necesitamos el número de onda y la frecuencia

angular,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10 = 20\pi \text{ rad/s},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi \text{ rad/m}.$$

Con lo anterior y el dato de la amplitud, la onda armónica es

$$y(x, t) = 1 \text{ cm} \cdot \sin(40\pi x - 20\pi t + \phi_0)$$

Para calcular la fase inicial en el origen, tenemos la siguiente condición:

$$y(0, 0) = 0,5 \text{ cm} = 1 \text{ cm} \cdot \sin \phi_0 \Rightarrow \sin \phi_0 = 0,5 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

Finalmente,

$$y(x, t) = 1 \text{ cm} \cdot \sin\left(40\pi x - 20\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Una onda transversal armónica se propaga inicialmente por una cuerda tensa con una velocidad de 5 m/s. Teniendo en cuenta que la amplitud es 0,5 cm y el número de onda de $20 \pi \text{ rad/m}$, determina la función de onda y la velocidad de vibración de los puntos de la cuerda.

Sol. La onda tiene una forma inicial armónica, dada por

$$f(x) = A \sin(kx) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(200\pi x).$$

Hemos tomado nula la fase en el origen porque no nos dan datos de la perturbación en un punto y un tiempo dados, así que podemos tomar $\phi_0 = 0$ eligiendo el momento en que empieza a contar el tiempo. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = kv = 20\pi \cdot 5 = 100\pi \text{ rad/s}.$$

Con esto, la función de onda que se propaga hacia el eje x positivo resulta

$$y(x, t) = f(x - vt) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \sin(20\pi x - 100\pi t).$$

La velocidad de vibración es aquella con la que oscila cada punto de la

cuerda:

$$\begin{aligned} v_{vib}(x,t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = -100\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(20\pi x - 100\pi t) \\ &= -0,5\pi \text{ m/s} \cdot \cos(20\pi x - 100\pi t) \end{aligned}$$

4. Considera una onda armónica con periodo 2 ms y velocidad de propagación 400 m/s. Calcula:
- a) La separación espacial entre dos puntos que, en el mismo instante de tiempo, tengan una diferencia de fase de 30° .
 - b) La diferencia de fase entre dos puntos separados por, en el mismo instante de tiempo, estén separados media longitud de onda.
 - c) La diferencia de fase de un mismo punto en dos instantes de tiempo separados 0,5 ms.

Sol. El ejercicio involucra la fase de una onda armónica, de modo que lo primero que hay que hacer es determinarla. En nuestro caso, tenemos una frecuencia angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3}} = 1000\pi \text{ rad/s.}$$

y un número de onda

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{400} = \frac{5}{2}\pi \text{ rad/m.}$$

Por tanto, la onda armónica es

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t + \phi_0) = A \sin\left(\frac{5}{2}\pi x - 1000\pi t + \phi_0\right)$$

La fase de la onda armónica es la función que determina el ángulo cuyo seno o coseno aparece en $y(x, t)$, es decir,

$$\phi(x,t) = kx - \omega t + \phi_0 = \frac{5}{2}\pi x - 1000\pi t + \phi_0.$$

- a) La diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 en el mismo instante de tiempo $t_1 = t_2 = t$ se escribe

$$\begin{aligned}\phi_2 - \phi_1 &= (kx_2 - \omega t + \phi_0) - (kx_1 - \omega t + \phi_0) \\ &= k(x_2 - x_1) = \frac{5}{2}\pi \Delta x.\end{aligned}$$

Así, si la diferencia de fase es de 30° , o sea,

$$\phi_2 - \phi_1 = 30^\circ = 30 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

entonces

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2}\pi \Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\pi/6}{5\pi/2} = \frac{1}{15} \quad 6,67 \text{ cm}.$$

- b) Si la distancia entre dos puntos con $t_1 = t_2 = t$ es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \lambda/2 = \frac{\pi}{k},$$

su diferencia de fase es, de acuerdo con la ecuación deducida anteriormente

$$\phi_2 - \phi_1 = k(x_2 - x_1) = k\Delta x = k \frac{\pi}{k} = \pi \text{ rad}.$$

El resultado ilustra que la longitud de onda es el periodo espacial de una onda armónica.

- c) Si tenemos un mismo punto $x_1 = x_2 = x$ en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 tales que

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s},$$

entonces la diferencia de fase es

$$\begin{aligned}\phi_2 - \phi_1 &= (kx - \omega t_2 + \phi_0) - (kx - \omega t_1 + \phi_0) = -\omega(t_2 - t_1) \\ &= -\omega \Delta t = -1000\pi \Delta t = -1000\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \\ &= -0,5\pi \text{ rad}.\end{aligned}$$

5. Una onda armónica se propaga por una cuerda de 30 m de longitud, 3 kg de peso y una tensión de 100 N. Calcula:

- (a) La velocidad de propagación de la onda.
- (b) Si la distancia entre dos puntos con amplitud máxima es de 1 m, calcula la longitud de onda y la frecuencia.
- (c) Determina la amplitud de la onda sabiendo que la altura de la cuerda es de 1 cm cuando su fase vale $\frac{\pi}{6}$.

Sol.

- (a) La velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/l}} = \sqrt{\frac{100}{3/30}} = \sqrt{1000} \quad 31,6 \text{ m/s.}$$

- (b) La longitud de onda λ es la distancia que nos dan

$$\lambda = 1 \text{ m}$$

y la frecuencia f la sacamos de λ y v :

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \sqrt{1000} \quad 31,6 \text{ Hz.}$$

- (c) Tenemos

$$1 = A \sin\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

por lo que la amplitud A vale

$$A = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2 \text{ cm.}$$

6. Considera la función de onda $\Delta x(x, t) = 1 \mu\text{m} \cdot \sin(0,5x - \omega t)$ que describe el desplazamiento de las moléculas de una onda sonora armónica con velocidad de propagación 340 m/s. Calcula la velocidad máxima de vibración de las moléculas.

Sol. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = kv = 0,5 \cdot 340 = 170 \text{ rad/s.}$$

La función de onda de desplazamiento es, por tanto,

$$\Delta x(x, t) = 1 \mu\text{m} \cdot \sin(0,5x - 170t).$$

La velocidad de vibración es

$$\begin{aligned} v_{\text{vib}}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta x = -1 \mu\text{m} \cdot 170 \cdot \cos(0,5x - 170t) \\ &= -0,17 \text{ mm/s} \cdot \cos(0,5x - 170t). \end{aligned}$$

La velocidad máxima de vibración es la amplitud de la velocidad de vibración (obviando el signo negativo),

$$v_{\text{vib,max}} = 0,17 \text{ mm/s.}$$

De manera alternativa, se puede calcular la velocidad máxima de vibración recordando la fórmula de teoría

$$v_{\text{vib,max}} = A\omega = 1 \mu\text{m} \cdot 170 = 0,17 \text{ mm/s.}$$

Las ondas de sonido son ondas longitudinales. Por tanto, las moléculas del aire vibran al pasar la onda en la misma dirección en la que la onda se propaga que, en el ejercicio, es el eje x .

7. La función de onda sonora de desplazamiento a lo largo del eje x de las moléculas del aire viene dada por $\Delta x(x, t) = 5 \mu\text{m} \cdot \sin(0,1x - 60t + \pi/5)$. Teniendo en cuenta que densidad del aire sin perturbar es $\rho_0 = 1,3 \text{ kg/m}^3$, determina la función de onda de variación de densidad y los valores máximo y mínimo de la densidad en el aire.

Sol. La función de onda de variación de densidad se puede calcular a partir de la de desplazamiento mediante

$$\begin{aligned}\Delta\rho(x,t) &= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta x = -1,3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1 \cdot \cos\left(0,1x - 60t + \frac{\pi}{5}\right) \\ &= -6,5 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3 \cdot \cos\left(0,1x - 60t + \frac{\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

La amplitud de la onda de variación de densidad es

$$\Delta\rho_{\max} = 6,5 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3.$$

El valor máximo de la densidad del aire se obtiene de esta amplitud y del valor de la densidad del aire sin perturbar:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 \Rightarrow \rho_{\max} = \rho_0 + \Delta\rho_{\max} = 1,3 + 6,5 \times 10^{-7} = 1,3000065 \text{ kg/m}^3.$$

Para el valor mínimo, de manera análoga,

$$\rho_{\min} = \rho_0 - \Delta\rho_{\max} = 1,3 - 6,5 \times 10^{-7} = 1,29999935 \text{ kg/m}^3.$$

8. En condiciones en las que el aire tiene una densidad sin perturbar $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$ y una presión sin perturbar $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, se propaga una onda armónica de desplazamiento de ecuación $\Delta x(x, t) = 0,5 \text{ mm} \cdot \sin(0,3x - 80t)$. Determina la ecuación de la onda de presión y, a partir de ella, los valores máximo y mínimo de la presión del aire, así como la presión en $x = 10 \text{ cm}$, $t = 10 \text{ s}$.

Sol. Necesitaremos el módulo de compresibilidad del aire, que podemos calcular, usando que $\omega = kv$, a partir de su relación con la velocidad del sonido:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \Rightarrow K = \rho_0 v^2 = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1,28 \cdot \left(\frac{80}{0,3}\right)^2 = 9,10 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

La función de onda de presión acústica resulta

$$\begin{aligned}\Delta p(x,t) &= -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta x = -9,10 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3 \cdot \cos(0,3x - 80t) \\ &= -13,7 \text{ Pa} \cdot \cos(0,3x - 80t),\end{aligned}$$

La amplitud de presión acústica resulta $\Delta p_{\max} \simeq 13,7 \text{ Pa}$. Los valores máximo y mínimo de la presión del aire a consecuencia de la onda serán

$$p_{max} = p_0 + \Delta p_{max} \simeq 101325 + 13,7 = 101338,7 \text{ Pa},$$

$$p_{min} = p_0 - \Delta p_{max} \simeq 101325 - 13,7 = 101311,3 \text{ Pa}.$$

La presión en el punto $x = 10 \text{ cm}$ en el instante $t = 10 \text{ s}$ es

$$p = p_0 + \Delta p(30 \text{ cm}, 12 \text{ s}) = 101325 - 13,7 \cdot \cos(0,3 \cdot 0,1 - 80 \cdot 10) \\ 101330,8 \text{ Pa}.$$

9. Una onda sonora armónica plana se propaga por el aire, de densidad sin perturbar igual a $1,28 \text{ kg/m}^3$. La onda tiene una frecuencia de 500 Hz y una velocidad de 340 m/s . Además, sabemos que la amplitud de presión de la onda acústica es de 50 Pa . Escribe la función de onda de presión acústica y, a partir de ella, la onda de variación de densidad.

Sol. La frecuencia angular de la onda es

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi \text{ rad/s}$$

y su número de onda

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{1000\pi}{340} = \frac{50\pi}{17} \text{ rad/m}.$$

Con esos datos y el de amplitud de presión acústica, la función de onda de la onda de presión acústica se puede escribir

$$\Delta p = 50 \text{ Pa} \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17}x - 1000\pi t\right).$$

Por una parte, las funciones de onda de variación de densidad y de presión acústica se relacionan con la onda de desplazamiento mediante las expresiones

$$\Delta p(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t); \Delta p(x, t) = -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t).$$

Dividiendo la primera por la segunda, se llega a

$$\frac{\Delta p(x, t)}{\Delta p(x, t)} = \frac{\rho_0}{K} \Rightarrow \Delta p(x, t) = \frac{\rho_0}{K} \Delta p(x, t).$$

Por otra parte, el módulo de compresibilidad se relaciona con la velocidad del sonido mediante

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \Rightarrow K = \rho_0 v^2.$$

Usando estos dos resultados de forma conjunta,

$$\Delta p(x, t) = \frac{\rho_0}{K} \Delta p(x, t) = \frac{\rho_0}{\rho_0 v^2} \Delta p(x, t) = \frac{1}{v^2} \Delta p(x, t).$$

Así, con los datos y resultados anteriores,

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &= \frac{1}{v^2} \Delta p(x, t) = \frac{1}{340^2} \cdot 50 \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17}x - 1000\pi t\right) \\ &4,33 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \cdot \sin\left(\frac{50\pi}{17}x - 1000\pi t\right). \end{aligned}$$

10. Halla la función de onda de desplazamiento a partir de la siguiente función de onda de presión acústica $\Delta p(x, t) = 15 \text{ Pa} \cdot \sin(2\pi x - 1500\pi t)$. Ten en cuenta que la densidad del aire sin perturbar es $\rho_0 = 1,28 \text{ kg/m}^3$. **Sol.** Necesitaremos el módulo de compresibilidad del aire:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \Rightarrow K = \rho_0 v^2 = \rho_0 \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = 1,28 \cdot \left(\frac{1500\pi}{2\pi}\right)^2 \approx 7,30 \cdot 10^4 \text{ Pa}.$$

De la relación entre la función de onda de desplazamiento y la de presión acústica en una onda de sonido armónica, llegamos a

$$\Delta p(x, t) = -K \frac{\partial}{\partial x} \Delta x(x, t) \Rightarrow \Delta x(x, t) = \frac{-1}{K} \int dx \Delta p(x, t).$$

Con los datos del ejercicio,

$$\begin{aligned} \Delta p(x, t) &\frac{-1}{7,30 \cdot 10^4} \int dx 15 \cdot \sin(2\pi x - 1500\pi t) \\ &= \frac{-1}{7,30 \cdot 10^5} \frac{-15 \cdot \cos(2\pi x - 1500\pi t)}{2\pi} \\ &2,18 \mu\text{m} \cdot \cos(2\pi x - 1500\pi t). \end{aligned}$$

11. En un punto P incide sonido procedente de dos fuentes sonoras que oscilan en fase con la misma amplitud $A = 0,2 \text{ mm}$ y frecuencia $f = 60 \text{ Hz}$. Teniendo en cuenta que el punto P está a 3 m de una fuente y $3,3 \text{ m}$ de la otra, calcula la diferencia de fase de las ondas, supuestas armónicas, procedentes de cada fuente en el punto P , así como la amplitud total de desplazamiento en P .

Sol. Las funciones de onda de desplazamiento de cada una de las ondas en el punto P son:

$$\Delta x_1 = A \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$\Delta x_2 = A \sin(kx_2 - \omega t),$$

donde hemos supuesto que la fase inicial en el origen de ambas es cero y hemos usado variables espaciales para cada onda, pues tienen orígenes distintos. Así, la diferencia de fase entre las ondas en P es

$$\phi_2 - \phi_1 = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1)$$

Necesitamos el número de onda, que resulta

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \phi_2 - \phi_1 &= k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi f}{v}(x_2 - x_1) \\ &= \frac{2\pi \cdot 60}{340}(3,3 - 3) = 0,333\text{rad} \quad 19,1^\circ. \end{aligned}$$

La interferencia de las ondas en P es la suma de ambas ondas en dicho punto:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t) \\ &= 2A \sin\left(\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t\right) \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Usando el resultado sobre la diferencia de fase, la amplitud total en P resulta

$$\begin{aligned}
 A_{\text{tot}} &= \left| 2A \cos \left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\frac{2\pi f(x_2 - x_1)}{2v} \right) \right| \\
 &= \left| 2A \cos \left(\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{2} \right) \right| = |2 \cdot 0,2 \text{ mm} \cdot \cos 9,53^\circ| = 0,394 \text{ mm}.
 \end{aligned}$$

12. Desde un punto P se escucha música de dos altavoces separados una cierta distancia. Hacemos que por ambos altavoces se generen sendas ondas armónica de desplazamiento, de igual amplitud A y longitud de onda λ . Teniendo en cuenta que la distancia del primer altavoz a P supera a la distancia del segunda altavoz a P en $\lambda/2$, calcula la amplitud total en P cuando:

- Los altavoces están en fase.
- Los altavoces tienen un desfase de π rad.

Sol.

- Si los altavoces están en fase, las ondas sonoras de desplazamiento en P son

$$\Delta x_1 = A \sin(kx_1 - \omega t),$$

$$\Delta x_2 = A \sin(kx_2 - \omega t),$$

donde $x_2 = x_1 + \lambda/2$ y hemos elegido la fase inicial en la posición de cada altavoz como cero. La interferencia en P es

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t) \\
 &= 2A \sin \left[\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t \right] \cos \left[\frac{k(x_1 - x_2)}{2} \right].
 \end{aligned}$$

La amplitud total en P es, dado que $x_2 - x_1 = \lambda/2$,

$$\begin{aligned} A_{\text{tot}} &= \left| 2A \cos \left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\frac{k\lambda}{4} \right) \right| \\ &= \left| 2A \cos \left(\frac{2\pi\lambda}{2} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = 0. \end{aligned}$$

b) Si los altavoces están desfasados en π rad,

$$\Delta x_1 = A \sin(kx_1 - \omega t)$$

$$\Delta x_2 = A \sin(kx_2 - \omega t + \pi)$$

y la interferencia es

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta x_1 + \Delta x_2 = A \sin(kx_1 - \omega t) + A \sin(kx_2 - \omega t + \pi) \\ &= 2A \sin \left(\frac{k(x_1 + x_2)}{2} - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{k(x_2 - x_1) + \pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $x_2 - x_1 = \lambda/2$, la amplitud total en P es

$$\begin{aligned} A_{\text{tot}} &= \left| 2A \cos \left(\frac{k(x_2 - x_1) + \pi}{2} \right) \right| = \left| 2A \cos \left(\frac{k\lambda}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right| \\ &= \left| 2A \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| = 2A. \end{aligned}$$

13. Sabemos que en el punto medio entre dos altavoces interfieren sendas ondas sonoras de forma constructiva. Además, ambas ondas son armónicas con la misma longitud de onda $\lambda = 1$ m. Calcula la distancia más próxima a un punto donde se produzca una interferencia destructiva.

Sol. Supongamos que los altavoces están a distancia d entre sí. Las ondas de desplazamiento desde cada altavoz son

$$\Delta x_1 = A \sin(kx - \omega t),$$

$$\Delta x_2 = A \sin(kx + \omega t),$$

donde hemos tomado el eje X sobre la recta que une los dos altavoces, siendo el origen uno de ellos (el de subíndice 1) y hemos tenido en cuenta que las ondas tienen sentidos de propagación contrarios. La interferencia resulta

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2A \sin(kx) \cos(\omega t),$$

por lo que la amplitud de interferencia es

$$A_{\text{tot}}(x) = |2A \sin(kx)|.$$

Si la interferencia es constructiva a media distancia entre los altavoces, es decir, con $x = d/2$, se ha de tener

$$A_{\text{tot}}(d/2) = \left| 2A \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \right| = 2A$$

Esto se obtiene si

$$\sin\left(\frac{kd}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{kd}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow kd = (2n+1)\pi.$$

donde n es un número entero.

Si nos acercamos al primer altavoz una distancia Δx , tendremos $x = d/2 - \Delta x$. La amplitud de interferencia en ese punto es

$$A_{\text{tot}}(d/2 - \Delta x) = \left| 2A \sin\left(\frac{kd}{2} - k\Delta x\right) \right|.$$

Para que la interferencia sea destructiva,

$$A_{\text{tot}}(d/2 - \Delta x) = 0 \Rightarrow \frac{kd}{2} - k\Delta x = n\pi.$$

Dado que teníamos que $kd = (2n + 1)\pi$, la ecuación anterior resulta

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = n\pi \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m.}$$

El resultado sería el mismo si nos hubiéramos acercado al otro altavoz. Así, la distancia del centro de los altavoces a los dos puntos más cercanos donde se produce interferencia destructiva es 0,25 m.