

CAPÍTULO 7. CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

En este tema utilizamos los resultados teóricos del tema anterior para analizar los circuitos de corriente continua. Comenzamos enunciando las leyes de Kirchhoff y analizando el circuito divisor de tensión. Con objeto de abordar circuitos más complejos, enunciaremos los teoremas de Thévenin y Norton. Finalmente, describimos el comportamiento de algunos circuitos sencillos de corriente continua con condensadores.

7.1. Leyes de Kirchhoff

Como vimos en el tema anterior, un *circuito eléctrico* es un conjunto de cables conductores y otros dispositivos que permiten mantener de forma ininterrumpida una corriente eléctrica. Para simplificar su estudio, son especialmente útiles las *leyes de Kirchhoff*, que son consecuencia de la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía:

- La *ley de Kirchhoff para las corrientes* indica que la suma de las corrientes que entran en un punto de unión de varios elementos de un circuito es igual a la suma de las corrientes que salen de él. Estos puntos de unión se llaman *nodos*, como el punto central de la figura 7.1, que muestra una parte de un circuito. En ese nodo, la ley de Kirchhoff de las corrientes implica que $I_1 + I_3 + I_4 = I_2$.
- La *ley de Kirchhoff para las caídas de tensión* indica que la suma de las caídas de tensión a lo largo de un circuito cerrado o *mall*a vale cero. La caída de tensión en cada elemento se toma positiva si recorremos el elemento desde su terminal positivo hasta su terminal negativo, y negativa si entramos por el terminal negativo. Por ejemplo, en la figura 7.2 la ley de Kirchhoff implica

Figura 7.1: Ejemplo de un trozo de circuito con un nodo.

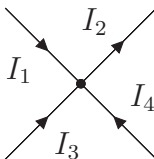
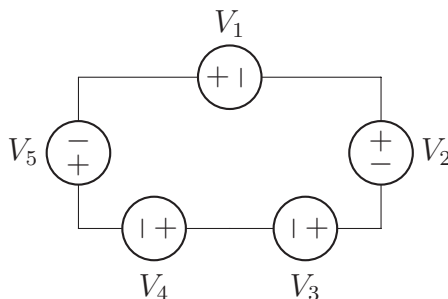


Figura 7.2: Ejemplo de circuito con una malla.



que $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = 0$.

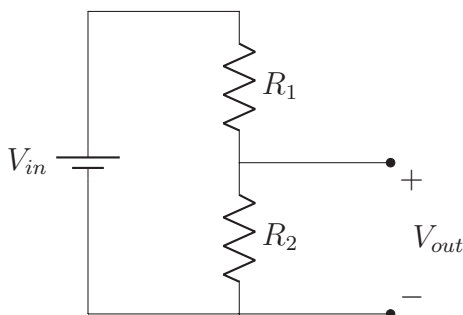
El sentido de recorrido de la malla es indiferente y lo elegimos a priori según nos convenga. Para las resistencias, la caída de tensión se toma positiva en la ley de Kirchhoff si el sentido de la corriente en ellas es el mismo que el sentido en el que estamos recorriendo la malla, y se toma negativa si estamos recorriendo la malla en sentido opuesto al de la corriente en la resistencia.

Circuito divisor de tensión

Un ejemplo sencillo en teoría de circuitos es el *divisor de tensión*. Consta de una *fente de tensión conectada a varias resistencias en serie*. Podemos verlo montado en la figura 7.3.

En el divisor de tensión de la figura 7.3, V_{in} es el *voltaje de entrada* proporcionado por la fuente, es decir, $V_{in} = \varepsilon$. La idea es tratar de calcular el valor del llamado

Figura 7.3: Circuito divisor de tensión con dos resistencias.



voltaje de salida V_{out} , que, como vemos en la figura, se corresponde en este caso con la caída de tensión en la resistencia R_2 , es decir, $V_{out} = V_2$.

Usando la ley de Kirchhoff de las mallas, recorriendo ésta en sentido horario, obtenemos

$$-V_{in} + V_1 + V_2 = 0,$$

donde hemos supuesto que la (única) corriente en el circuito es I recorre la malla desde el terminal positivo de la fuente hasta su terminal negativo. Usando la ley de Ohm con las resistencias, tendremos

$$V_1 = IR_1, \quad V_2 = IR_2.$$

Por tanto, la ley de Kirchhoff de la malla nos da la corriente según

$$-V_{in} + I(R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2}.$$

Como podemos ver, el valor de I obtenido es positivo, lo que indica que el sentido elegido anteriormente es el correcto. De aquí

$$V_2 = IR_2 = V_{in} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right),$$

que es la llamada *ecuación del divisor*. Dice simplemente que, en un circuito divisor de tensión, el voltaje de entrada se divide entre todas las resistencias proporcionalmente al valor de cada una. Conviene memorizar esta ecuación, ya que es extremadamente útil. El valor de la caída de tensión en la otra resistencia sería, con la misma regla,

$$V_1 = V_{in} \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

En general, si tenemos un circuito divisor de tensión formado por una fuente ideal de fem ε y un conjunto de N resistencias en serie, la caída de tensión en la resistencia R_i vendrá dada por la expresión

$$V_i = \varepsilon \left(\frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \right). \quad (7.1)$$

Ejemplo 7.1.1 Analicemos el circuito divisor de tensión con tres resistencias, tomando como V_{in} la tensión de la fuente y V_{out} la caída de tensión en la resistencia R_3 .

Sol. Hagamos el ejercicio de varias maneras. Procediendo como en el tema anterior, podemos calcular primero la resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$ y, utilizando la ley de Ohm, calcular la corriente I que atraviesa todos los elementos:

$$I = \frac{V_{in}}{R_{eq}} = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Así, la caída de tensión por la resistencia R_3 es

$$V_{out} = I R_3 = V_{in} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Una segunda manera es mediante la ley de Kirchhoff para la malla. Si la recorremos en sentido horario y asumimos que I también circula en sentido horario, llegamos a

$$-V_{in} + V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$

Usando la ley de Ohm con las resistencias, la ecuación anterior se escribe

$$-V_{in} + IR_1 + IR_2 + IR_3 = 0,$$

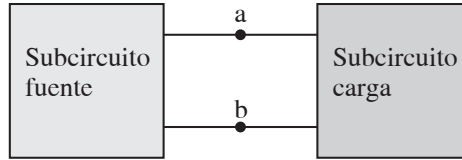
con la que obtenemos la misma expresión de I que con el método anterior,

y con ella la misma relación entre V_{out} y V_{in} ya obtenida. Finalmente, también podemos llegar al resultado deseado empleando la ecuación (7.1), donde $i = 3$, $\varepsilon = V_{in}$ y $N = 3$.

7.2. Circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton

Una fracción importante de los circuitos utilizados en la práctica es la de los

Figura 7.4: Esquema de un circuito con subcircuito fuente y subcircuito carga.



circuitos de acoplamiento. Un acoplamiento es una conexión, a través de dos terminales a y b , entre dos subcircuitos que realizan funciones diferentes. En el caso más simple, un subcircuito realiza funciones de *fuentes*, generando una señal para otro subcircuito que se llama *carga* (o *load*, del inglés). Un subcircuito está conectado al otro mediante cables conductores con puntos de contacto a y b . La situación se puede observar en el esquema de la figura 7.4.

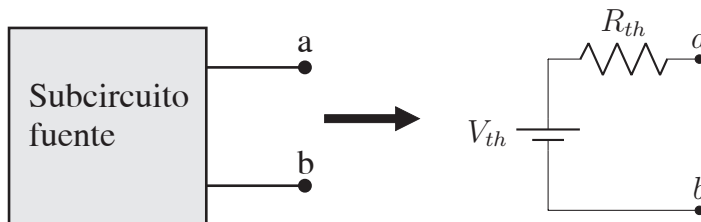
Circuito equivalente de Thévenin

No resulta práctico tener que calcular todas las corrientes y tensiones del circuito total cada vez que hagamos un cambio en el subcircuito de carga. Lo bueno es que en realidad no tenemos que hacerlo en muchos casos (siempre que el subcircuito fuente esté formado por elementos lineales tales como fuentes de tensión o de corriente y resistencias), y esto es debido a la posibilidad de usar el llamado *teorema de Thévenin*:

Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de resistencias y fuentes, es equivalente a una única fuente de fem ideal en serie con una única resistencia.

El teorema de Thévenin se ilustra en la figura 7.5. Entre los terminales a y b , toda la red de resistencias y fuentes de tensión que forman el subcircuito fuente puede sustituirse por una única fuente de fem de valor V_{th} y una única resistencia de valor R_{th} .

Figura 7.5: Ilustración del teorema de Thévenin.



Veamos cómo calcular los valores de V_{Th} y R_{Th} :

- El *voltaje de Thévenin* V_{Th} es el que hay entre los terminales de salida a y b cuando el subcircuito fuente original se deja en abierto, es decir, cuando no se conecta ningún subcircuito de carga,

$$V_{Th} = V_{abierto}. \quad (7.2)$$

- La *resistencia de Thévenin* R_{Th} es el cociente entre el voltaje de Thévenin V_{Th} y la corriente que hay entre los terminales de salida a y b si se conecta un cortocircuito entre ambos,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cortocircuito}}. \quad (7.3)$$

- Una manera alternativa de calcular R_{Th} es igualarla con la resistencia equi-

valente entre los terminales a y b cuando todas las fuentes de tensión del circuito original se sustituyen por cortocircuitos (o por las resistencias internas de las fuentes si éstas no son ideales) y las fuentes de corriente del circuito original (dispositivos que veremos un poco más abajo) se sustituyen por circuitos abiertos.

Una vez obtenido el equivalente de Thévenin, podemos conectarle el subcircuito de carga y obtener cualquier cantidad que se nos pida sobre él.

Ejemplo 7.2.1 Supongamos que usamos el circuito de la figura 7.3 como subcircuito fuente. Para ello, conectamos en la salida una resistencia R_3 (subcircuito carga). Usemos el equivalente de Thévenin del subcircuito fuente para calcular la corriente por R_3 .

Sol. Para obtener la resistencia Thévenin, cortocircuitamos la fuente y calculamos la resistencia equivalente del subcircuito fuente respecto de los terminales de salida. En este caso las resistencias R_1 y R_2 están en paralelo por lo que

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Para calcular V_{Th} debemos calcular la caída de potencial en R_2 . Como tenemos un divisor de tensión, usamos los resultados ya conocidos:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}.$$

Así, respecto de los terminales de salida, el subcircuito carga se puede escribir como el circuito de la figura 7.5 con las expresiones de R_{Th} y V_{Th} anteriores. Para obtener la corriente I en la resistencia R_3 , observemos que, de nuevo, el equivalente de Thévenin y R_3 forman un divisor de tensión. Por ello,

$$I_3 = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_3} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{R_2 V_{in}}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}.$$

Fuentes de corriente

Una *fente de corriente* ideal es un dispositivo que mantiene cierto valor de la corriente independientemente de lo que se conecte a ella. Hay dispositivos en la práctica que se comportan como fuentes de corriente, construidos con transistores. El símbolo que emplearemos para una fuente de corriente es el que podemos ver en la figura 7.6.

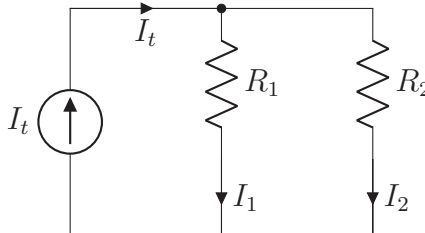
Un ejemplo de uso de fuentes de corriente es el *circuito divisor de corriente*, formado por una fuente de corriente de valor I_t conectada a un conjunto de resistencias en paralelo, como vemos en la figura 7.7.

Para calcular el valor de I_1 e I_2 (las corrientes que circulan por las resistencias), podemos usar la ley de Kirchhoff de los nodos en la confluencia de éstas con I_t

Figura 7.6: Símbolo de fuente de corriente.



Figura 7.7: Circuito divisor de corriente.



y la ley de Kirchhoff de las mallas en la que no contiene a la fuente de corriente. Se obtienen las ecuaciones

$$I_t = I_1 + I_2,$$

$$0 = -I_1 R_1 + I_2 R_2,$$

donde suponemos que el valor I_t de la fuente es conocido. Resolviendo este sistema,

$$I_1 = I_t \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right), \quad I_2 = I_t \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right).$$

La expresión general de las corrientes en las resistencias de un divisor de corriente es

$$I_i = I_t \left(\frac{R_{eq}}{R_i} \right), \quad (7.4)$$

donde R_{eq} es la resistencia equivalente de la asociación en paralelo de las resistencias del divisor y R_i es la resistencia en la que estamos calculando la corriente.

Ejemplo 7.2.2 Analicemos el divisor de corriente con tres resistencias, añadiendo R_3 en paralelo a las resistencias del circuito de la figura 7.7.

Sol. Al igual que hicimos en el ejemplo 7.1.1, podemos proceder, al menos, de tres maneras. En primer lugar, podemos calcular la resistencia equivalente. Al estar las tres en paralelo, tenemos

$$R_{eq} = (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})^{-1}.$$

Así, la caída de tensión en las resistencias es

$$V = I_t R_{eq} = \frac{I_t}{R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}}.$$

Por tanto, la intensidad por cada resistencia es

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{I_t}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}},$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{I_t}{\frac{R_2}{R_1} + 1 + \frac{R_2}{R_3}},$$

$$I_3 = \frac{V}{R_3} = \frac{I_t}{\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + 1}.$$

A idénticos resultados llegamos usando la ecuación (7.4). Por último, también podríamos usar las leyes de Kirchoff para analizar el circuito. Por una parte, tendríamos que toda la intensidad que pasa por la fuente de corriente I_t se reparte por las resistencias

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3,$$

y, recorriendo las dos mallas que contienen sólo resistencias en sentido horario:

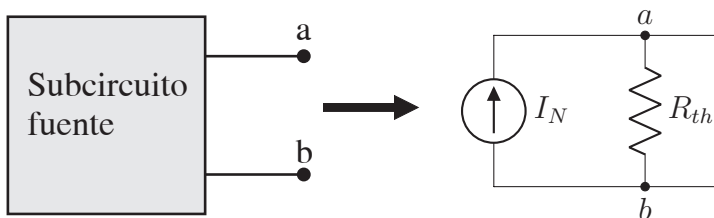
$$0 = -I_1 R_1 + I_2 R_2,$$

$$0 = -I_2 R_2 + I_3 R_3,$$

donde hemos usado la ley de Ohm para expresar las caídas de tensión en las resistencias como función de las corrientes y las resistencias. Las dos relaciones anteriores no expresan más que el hecho de que las tres resistencias están en paralelo, sus caídas de tensión por tanto son iguales.

Estas mismas relaciones nos permiten, por ejemplo, expresar I_2 e I_3 en función de I_1 . Y, usando luego la ecuación para I_t , llegamos a

Figura 7.8: Ilustración del teorema de Norton.



$$I_t = I_1 = \frac{R_1}{R_2} I_1 = \frac{R_1}{R_3} I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{I_t}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}}.$$

Análogamente, llegamos a las ecuaciones para I_2 e I_3 ya obtenidas previamente.

Circuito equivalente de Norton

Además del equivalente de Thévenin existe otra opción para tratar un subcircuito fuente formado por una red de fuentes y resistencias. Se trata del *teorema de Norton*:

Cualquier subcircuito fuente lineal, formado por una red de resistencias y fuentes, es equivalente a una única fuente de corriente ideal en paralelo con una única resistencia.

El teorema de Norton se ilustra en la figura 7.8.

Veamos cómo calcular los valores de I_N y R_N :

- La *corriente de Norton* I_N es la que hay entre los terminales de salida a y b del subcircuito fuente original si se conecta un cortocircuito entre ambos,

$$I_N = I_{\text{cortocircuito}}.$$

- La *resistencia de Norton* R_N es el cociente entre el voltaje que hay entre los terminales a y b del subcircuito original si se deja un circuito abierto entre ellos y la corriente de Norton, es decir,

$$R_N = \frac{V_{\text{abierto}}}{I_N}.$$

Dado que, tanto el circuito de Thévenin como el de Norton, son equivalentes al subcircuito fuente original, han de serlo entre ellos. Esto implica que los valores de ambos circuitos han de coincidir, por lo que

$$R_N = R_{Th},$$

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}},$$

$$V_{Th} = I_N R_N.$$

Ejemplo 7.2.3 Volvamos al ejemplo 7.2.1 y resolvámoslo obteniendo el equivalente de Norton del subcircuito fuente.

Sol. Debemos calcular el equivalente de Norton de un divisor de tensión, donde se toma la salida entre los terminales de la resistencia R_2 . Primero calculamos la resistencia Norton R_N o resistencia equivalente entre los terminales de salida cuando cortocircuitamos la fuente. Como ésta coincide con la resistencia Thévenin, $R_N = R_{Th}$, que ya calculamos en el ejemplo 7.2.1:

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

La intensidad Norton es la que hay entre los terminales de salida cuando ésta se cortocircuita. En este caso, la resistencia R_2 queda en paralelo con un corto y por tanto la asociación es equivalente a un corto. Por tanto, nos queda la fuente V_{in} en serie con R_1 por lo que

$$I_N = \frac{V_{in}}{R_1}.$$

Finalmente, el subcircuito fuente simplificado y la resistencia R_3 forman un divisor de corriente, por lo que, la corriente I_3 a través de R_3 , usando la ecuación (7.4), es

$$I_3 = I_N \frac{(R_3^{-1} + R_N^{-1})^{-1}}{R_3} = \frac{R_2 V_{in}}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)},$$

que es el resultado obtenido en el ejemplo 7.2.1.

7.3. Circuitos de corriente continua con condensadores

En los circuitos que hemos considerado hasta ahora, los voltajes e intensidades permanecían constantes en el tiempo. Sin embargo, es posible que los voltajes e intensidades varíen en el tiempo aunque el circuito sea de corriente continua. Esto ocurre, por ejemplo, si conectamos condensadores descargados a fuentes

y resistencias. Los condensadores permiten construir, por ejemplo, circuitos temporizadores (en los que algo ocurre una vez ha ocurrido otra cosa).

Los condensadores se representan, en los diagramas de circuitos, mediante dos barras paralelas de la misma longitud, como ya vimos en el tema anterior. Este símbolo recuerda al de un condensador plano, aunque en realidad hay gran variedad de formas y tamaños. La *ecuación característica* de un condensador la vimos en el tema anterior y era

$$Q = CV,$$

donde Q es la carga acumulada en la placa positiva del condensador, C es su capacidad y V es la diferencia de potencial entre sus placas. Para el estudio de los condensadores en circuitos, se requiere, sin embargo, una relación entre voltaje y corriente. Obtenemos esta relación derivando la ecuación del condensador respecto al tiempo y usando que $I = dQ/dt$. Así llegamos a la ecuación

$$I = C \frac{dV}{dt},$$

siendo I la corriente que va, por el exterior del condensador, desde su placa negativa a su placa positiva, que es el sentido convencional que hemos adoptado. Esta relación expresa que cuanto mayor sea la corriente más deprisa crece el voltaje. Como vemos, *un condensador no satisface la ley de Ohm*.

Descarga de un condensador

Figura 7.9: Circuito con un condensador y una resistencia (izquierda) y la curva de descarga del condensador (derecha).

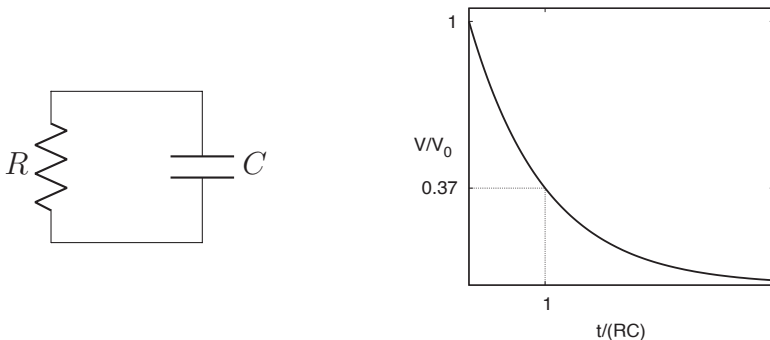
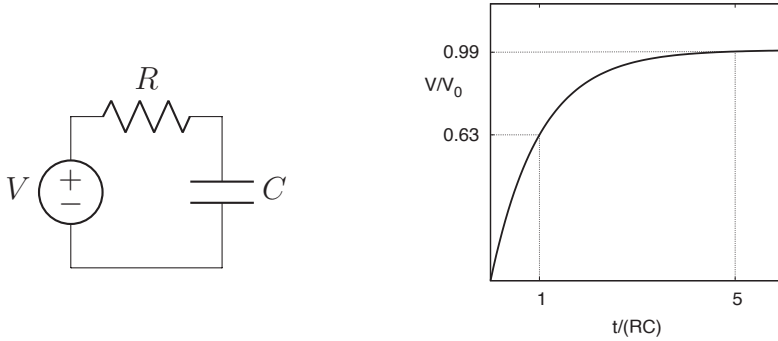


Figura 7.10: Circuito con una fuente de tensión, un condensador y una resistencia (izquierda) y la curva de carga del condensador (derecha).



Veamos, en primer lugar, un circuito básico de *descarga de un condensador*, que es algo tan sencillo como un condensador cargado conectado a una resistencia, como muestra la figura 7.9.

A la derecha de la figura 7.9 vemos cómo varía el voltaje del condensador con el tiempo. Inicialmente tiene un voltaje V_0 , y una carga $Q_0 = CV_0$. Como está conectado con la resistencia, ésta tiene el mismo voltaje y, por la ley de Ohm, deja pasar una corriente inicial $I_0 = V_0/R$ que comienza a descargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador es cero, el condensador se ha descargado y ya no hay corriente por la resistencia. El tiempo característico de descarga del condensador en este circuito es igual al producto RC y se llama *constante de tiempo* del circuito. De hecho, cuando ha pasado un tiempo $t = RC$, el voltaje ha decaído en el condensador hasta un 37 % aproximadamente del valor inicial.

Carga de un condensador

Para *cargar un condensador* que esté inicialmente descargado, se puede conectar a una fuente de tensión en serie con una resistencia, como vemos en la figura 7.10.

Inicialmente, el condensador tiene voltaje nulo y carga nula. Por ello, la resistencia tiene inicialmente todo el voltaje que proporciona la fuente y comienza a dejar pasar una corriente inicial $I_0 = V/R$ que comienza a cargar el condensador. Esto ocurre hasta que el voltaje del condensador iguala el de la fuente, con lo que ningún voltaje cae en la resistencia y la corriente es cero. En ese momento, la carga final del condensador es $Q = CV$. El comportamiento del voltaje del condensador con el tiempo se ve en la figura, y la constante de tiempo del

circuito es, de nuevo, el producto RC . A efectos prácticos, después de transcurrido un tiempo igual a cinco veces la constante de tiempo, esto es, $5RC$, el voltaje ha alcanzado el 99 % de su valor final y consideramos cargado el condensador.

Condensadores en régimen estacionario de corriente continua

Finalmente, vamos a tratar también el comportamiento de los condensadores en circuitos de corriente continua en los que los voltajes y las corrientes son constantes. Esta situación se conoce con el nombre de *régimen estacionario*, que es el que hemos estado tratando todo el tiempo en circuitos con resistencias.

El comportamiento de un condensador en el régimen estacionario de corriente continua está dado por su ecuación característica

$$I = C \frac{dV}{dt}, \quad (7.5)$$

pero con V constante. Por tanto, en el estacionario de corriente continua, un condensador cumple

$$I = 0,$$

y es, por tanto, *equivalente a un circuito abierto*.

Ejemplo 7.3.1 Conectamos la salida del circuito de la figura 7.3 a un condensador de capacidad C , inicialmente descargado. Calculemos la constante de tiempo del proceso de carga así como la carga de la placa positiva del condensador cuando está completamente cargado.

Sol. Si reemplazamos el circuito fuente por su equivalente de Thévenin, el resultado es una fuente V_{Th} en serie con una resistencia R_{Th} y un condensador C . Así, usando los resultados del ejemplo 7.2.1, la constante de tiempo vale

$$R_{Th}C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Por otra parte, cuando el condensador está completamente cargado, se com-

porta como un abierto. Así, la diferencia de potencial entre sus placas vale V_{Th} , por lo que la carga Q de su placa positiva es

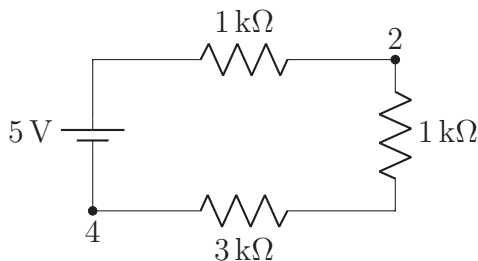
$$Q = CV_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} CV_{in}.$$

7.4. Tabla resumen

Fórmula/ magnitud	Definición	Ecuación
$V_i = \mathcal{E} \left(\frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} \right)$	Divisor de tensión con N resistencias	(7.1)
V_i	Caída de tensión en la resistencia R_i	
$\mathcal{E}$	Fem de la fuente ideal	
$V_{Th} = V_{abierto}$	Voltaje Thévenin	(7.2)
$V_{abierto}$	Voltaje subcircuito fuente en abierto	
$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cortocircuito}}$	Resistencia Thévenin	(7.3)
$I_{cortocircuito}$	Intensidad subcircuito fuente en corto	
$I_i = I_t \left(\frac{R_{eq}}{R_i} \right)$	Divisor de corriente	(7.4)
I_i	Intensidad de la resistencia R_i	
I_t	Intensidad de la fuente de corriente	
R_{eq}	Resistencia equivalente	
Fórmula/ magnitud	Definición	Ecuación
$I = C \frac{dV}{dt}$	Ecuación característica del condensador	(7.5)
I	Intensidad del condensador	
C	Capacidad del condensador	
V	Voltaje del condensador	
t	Tiempo	

7.5. Problemas resueltos

1. Determina la diferencia de potencial $V_2 - V_4$ entre los puntos 2 y 4 del circuito de la figura.



Sol. Aplicamos la regla de Kirchhoff de las mallas a la única malla del circuito. Dado que sólo hay una corriente I , resulta

$$-\varepsilon + IR_1 + IR_2 + IR_3 = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{5}{1000 + 1000 + 3000} = 10^{-3} \text{ A.}$$

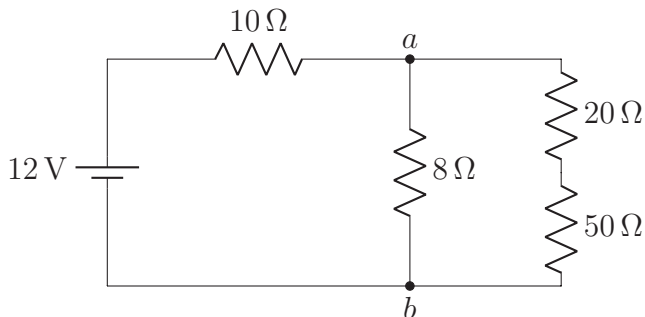
Ya tenemos lo que necesitamos para calcular cualquier diferencia de potencial. Para determinar $V_2 - V_4$, nos dirigimos desde el punto 2 al punto 4 por cualquier camino del circuito y vamos sumando las caídas de potencial que nos encontremos en el camino. Por ejemplo, si vamos por el camino de las resistencias de $1 \text{ k}\Omega$ (derecha) y $3 \text{ k}\Omega$,

$$V_2 - V_4 = IR_2 + IR_3 = 10^{-3} \cdot 10^3 + 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^3 = 4 \text{ V.}$$

Si vamos por el camino de la resistencia de $1 \text{ k}\Omega$ (arriba) y la batería,

$$V_2 - V_4 = -IR_1 + \varepsilon = -10^{-3} \cdot 10^3 + 5 = 4 \text{ V.}$$

2. Obtén la potencia disipada por la resistencia de 50Ω del circuito de la figura. Además, calcula la diferencia de potencial entre los puntos a y b .



Sol. Para realizar el ejercicio, necesitamos las corrientes a través de las resistencias. Llamaremos I_1 a la corriente que atraviesa la batería y la resistencia $R_1 = 10 \Omega$, I_2 será la corriente que atraviesa la resistencia $R_2 = 80 \Omega$ (hacia abajo) e

I_3 será la corriente que pasa por $R_3 = 20 \Omega$ y $R_4 = 50 \Omega$ (hacia abajo).

NOTA: El sentido de las corrientes se toma inicialmente como queramos. Si alguna resulta negativa después, es que el sentido es el contrario del que habíamos imaginado al principio.

Dado que tenemos 3 incógnitas (las corrientes), nos hacen falta 3 ecuaciones. Planteamos las reglas de Kirchhoff en las dos mallas internas del circuito y en el nodo a ,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ 0 &= -\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ 0 &= -I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4. \end{aligned}$$

Poniendo los datos $\varepsilon = 12 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 8 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$ y $R_4 = 50 \Omega$ en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene

$$I_1 \simeq 0,903 \text{ A}, \quad I_2 \simeq 0,372 \text{ A}, \quad I_3 = 0,0425 \text{ A}.$$

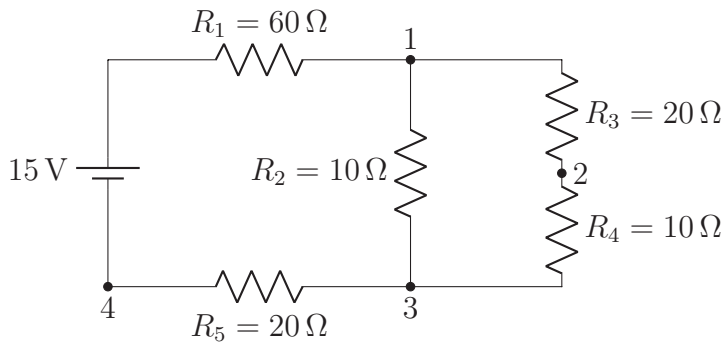
Una vez resuelto el circuito, podemos responder a las preguntas que se nos plantean. La potencia disipada en la resistencia $R_4 = 50 \Omega$ es

$$P_4 = I_3 V_4 = I_3^2 R_4 \simeq (0,0425)^2 \cdot 50 \simeq 0,0902 \text{ W}.$$

La diferencia de potencial entre los puntos a y b es

$$V_a - V_b = I_2 R_2 \simeq 0,372 \cdot 8 \simeq 2,97 \text{ V}.$$

3. Calcula todas las corrientes del circuito de la figura. Además, calcula la diferencia de potencial entre los puntos 1 y 2, entre 2 y 3, y entre 1 y 4.



Sol. Llamamos I_1 a la corriente que parte del terminal positivo de la batería y pasa por R_1 , I_2 a la que pasa por R_2 hacia abajo e I_3 a la que pasa por R_3 y R_4 hacia abajo. Las reglas de Kirchhoff en el nodo 1 y en las dos mallas interiores dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, \\ 0 &= -\varepsilon + I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_1 R_5, \\ 0 &= -I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_3 R_4. \end{aligned}$$

De estas tres ecuaciones, se obtienen

$$I_1 \simeq 0,171 \text{ A}, \quad I_2 \simeq 0,129 \text{ A} \quad I_3 \simeq 0,0429 \text{ A}.$$

La diferencia de potencial entre 1 y 2 es

$$V_1 - V_2 = I_3 R_3 \simeq 0,857 \text{ V},$$

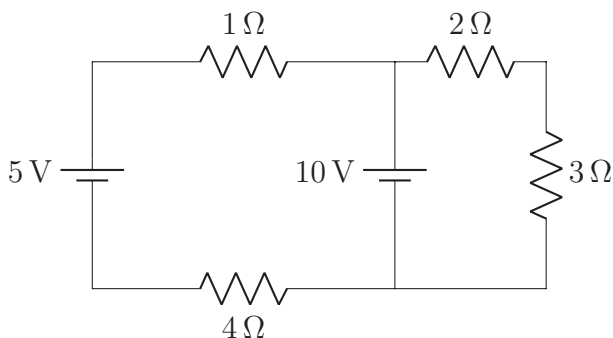
entre 2 y 3 es

$$V_2 - V_3 = I_3 R_4 \simeq 0,429 \text{ V},$$

y entre 1 y 4 es

$$V_1 - V_4 = -I_1 R_1 + \varepsilon \simeq 4,71 \text{ V}.$$

4. Calcula la potencia suministrada por la fuente de 10 V así como la potencia disipada por las resistencias del siguiente circuito.



Sol. Para aligerar la notación, escribimos directamente el valor de las resistencias en lugar de nombrarlas con letras. Las reglas de Kirchhoff en las dos mallas interiores y en el nodo de arriba dan las ecuaciones

$$I_{10} = I_5 + I',$$

$$0 = 4I_5 - 10 + I_5 + 5,$$

$$0 = -10 + 2I' + 3I'.$$

donde I' es la corriente por las resistencias de $2\ \Omega$ y $3\ \Omega$ (hacia abajo), I_{10} es la corriente por la batería de 10 V (hacia arriba) e I_5 es la corriente por la batería de 5 V (hacia abajo). Resolviendo el sistema,

$$I_{10} = 3\text{A}, \quad I_5 = 1\text{A} \quad I' = 2\text{A}.$$

La potencia suministrada por la batería de 10 V es igual a la corriente que la atraviesa (de su terminal negativo a su terminal positivo) por su fem, es decir,

$$P_{10} = I_{10} \cdot 10 = 3 \cdot 10 = 30\text{W}.$$

La potencia disipada por las resistencias es la suma de las disipadas por cada una de ellas,

$$P_R = I_5^2 \cdot 4 + I_5^2 \cdot 1 + (I')^2 \cdot 2 + (I')^2 \cdot 3 = 1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 5 = 25\text{W}.$$

Los resultados anteriores nos dicen que la batería de 10 V proporciona más potencia que la que disipan todas las resistencias. Por tanto, la batería de 5 V no proporciona ninguna potencia al circuito, sino que consume parte de la potencia que proporciona la de 10 V . La potencia consumida por la batería de 5 V es igual a la que proporciona la batería de 10 V menos la que consumen las resistencias, es decir,

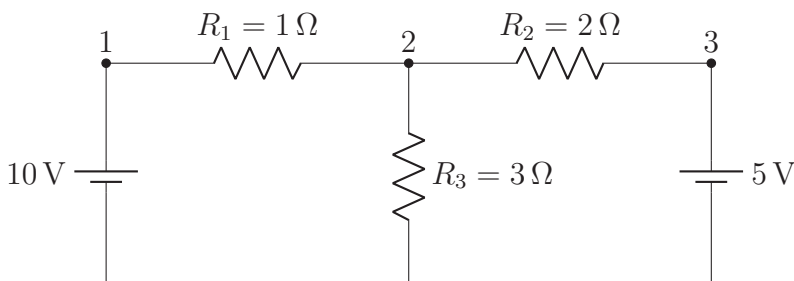
$$P_{5, \text{consumida}} = P_{10} - P_R = 30 - 25 = 5\text{W}.$$

Para explicar esto, podemos calcular la potencia que proporciona esa misma batería. Será igual a la corriente que la atraviesa del terminal negativo al positivo por su fem. Pero la corriente I_5 va del terminal positivo al negativo de la batería, por lo que

$$P_5 = -I_5 \cdot 5 = -2 \cdot 10 = -5\text{W},$$

lo que coincide con el cálculo anterior. De hecho, en este circuito, la batería de 10 V se usa para cargar la batería de 5 V .

5. Calcula el potencial de los puntos 1, 2 y 3 del siguiente circuito teniendo en cuenta que el potencial del punto 0 es cero.



Sol. El potencial del punto 1 se puede calcular fácilmente porque entre él y el punto 0 está solo la batería de $\varepsilon_1 = 10 \text{ V}$, por lo que

$$V_1 = V_1 - V_0 = \varepsilon_1 = 10 \text{ V}.$$

Lo mismo ocurre en el punto 3, pero ahora con la batería de $\varepsilon_2 = 5 \text{ V}$:

$$V_3 = V_3 - V_0 = \varepsilon_2 = 5 \text{ V}.$$

Para calcular el potencial del punto 2 nos hace falta la corriente que pasa por alguna resistencia. Suponemos que I_1 es la corriente que parte del terminal positivo de 10 V , I_2 parte del terminal positivo de 5 V e I' pasa por R_3 de arriba hacia abajo. Por las reglas de Kirchhoff en el nodo 2 y las dos mallas interiores, tenemos

$$I' = I_1 + I_2,$$

$$0 = -10 + 1I_1 + 3I',$$

$$0 = -3I' - 2I_2 + 5.$$

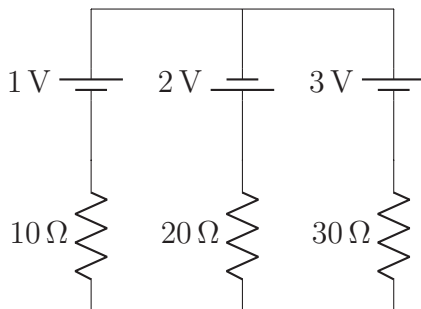
La solución es

$$I_1 = \frac{35}{11} \text{ A}, \quad I_2 = -\frac{10}{11} \text{ A}, \quad I' = \frac{25}{11} \text{ A}.$$

El resultado nos indica que I_2 va en sentido opuesto al que habíamos pensado (recorre la batería de 5 V hacia abajo). Con todo esto, el potencial del punto 2 es

$$V_2 = V_2 - V_0 = I'R_3 = 3\frac{25}{11} \approx 6,82 \text{ V}.$$

6. Calcula la potencia suministrada o disipada por cada elemento del siguiente circuito.



Sol. Tomamos las intensidades I_1 , I_2 e I_3 de las fuentes de 1 V, 2 V y 3 V saliendo de los polos positivos, respectivamente. Las reglas de Kirchhoff en el nodo central superior y las dos mallas interiores dan las ecuaciones

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 + I_3, \\ 0 &= 10I_1 - 1 - 2 + 20I_2, \\ 0 &= -20I_2 + 2 + 3 - 30I_3. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, tenemos

$$I_1 = \frac{1}{22} \text{ A}, \quad I_2 = -\frac{7}{55} \text{ A}, \quad I_3 = \frac{9}{110} \text{ A}.$$

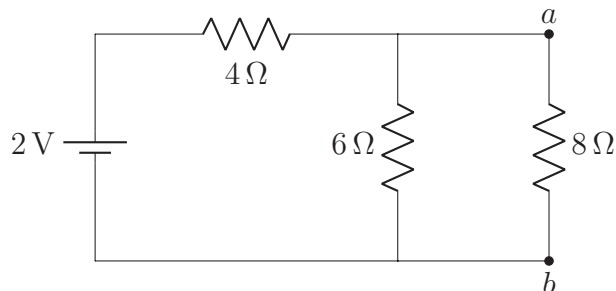
Las potencias proporcionadas por las baterías son

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \cdot I_1 = \frac{1}{22} \approx 0,0455 \text{ W}, \\ P_2 &= 2I_2 = \frac{14}{55} \approx 0,255 \text{ W}, \\ P_3 &= 3I_3 = \frac{27}{110} \approx 0,245 \text{ W}, \end{aligned}$$

Las potencias disipadas por las resistencias son

$$\begin{aligned} P_{10} &= \left(\frac{1}{22} \right)^2 10 \approx 0,0207 \text{ W}, \\ P_{20} &= \left(\frac{7}{55} \right)^2 20 \approx 0,324 \text{ W}, \\ P_{30} &= \left(\frac{9}{110} \right)^2 30 \approx 0,201 \text{ W}. \end{aligned}$$

7. Usando el equivalente de Thévenin del circuito fuente, calcula la corriente en la resistencia de carga conectada entre los terminales a y b .



Sol. Para calcular el equivalente de Thévenin, lo primero es quitar la resistencia de carga entre los terminales a y b . El voltaje de Thévenin es la diferencia de potencial entre los puntos a y b , que coincide con la caída de potencial en la resistencia de $6\ \Omega$. Dado que el circuito es un divisor de tensión, tenemos

$$V_{Th} = V_a - V_b = \varepsilon \frac{R_{ab}}{R_{eq}} = 2 \cdot \frac{6}{4+6} = 1,2\text{ V}.$$

Para calcular la resistencia de Thévenin, podemos poner un cortocircuito entre a y b . En la asociación en paralelo entre ese cortocircuito (con resistencia nula) y la resistencia de $6\ \Omega$, toda la corriente pasa por el cortocircuito. Por tanto, la corriente entre a y b coincide con la que habría en el circuito sin la resistencia de $6\ \Omega$, que es

$$I_{\text{cortocircuito}} = \frac{2}{4} = 0,5\text{ A}.$$

De aquí,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{\text{cortocircuito}}} = \frac{1,2}{0,5} = 2,4\ \Omega.$$

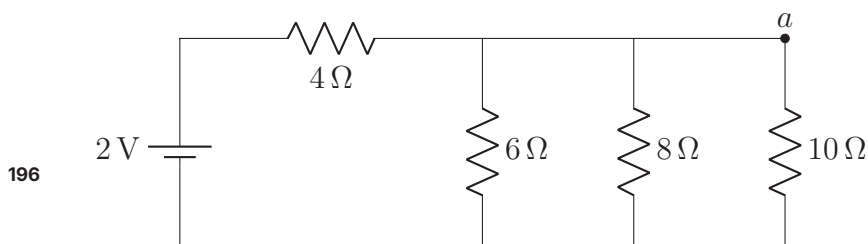
De manera alternativa, podemos calcular la resistencia de Thévenin como la equivalente entre a y b cuando se reemplaza la batería de 2 V por un cortocircuito. Entonces, las resistencias de $4\ \Omega$ y $6\ \Omega$ están en paralelo y resulta

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow R_{Th} = 2,4\ \Omega.$$

Ya tenemos calculado el equivalente de Thévenin, así que volvemos a colocar la resistencia de carga entre a y b . El ejercicio nos pide la corriente a través de esa resistencia. En el circuito que nos ha quedado, las resistencias R_{Th} y la de carga R_L están en serie. La corriente en ese

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{1,2}{2,4 + 8} = 0,115\text{ A}.$$

8. Usando el equivalente de Norton del circuito fuente, calcula la corriente en la resistencia de carga.



Sol. Primero, quitamos la resistencia de carga. La resistencia de Norton (que es igual a la de Thévenin) puede obtenerse reemplazando la batería por un cortocircuito y calculando la resistencia equivalente de la configuración resultante entre a y b . Como las tres resistencias están en paralelo, tenemos

$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{13}{24} \Rightarrow R_N = \frac{24}{13} \approx 1,85 \Omega.$$

Por otro lado, la corriente de Norton es la que hay entre a y b cuando ponemos un cortocircuito entre ellos. Al ponerlo, este cortocircuito está en paralelo con las resistencias de 6Ω y 8Ω , por lo que no pasa corriente por estas dos resistencias. Así, I_N es la corriente total en un circuito en el que sólo está la resistencia de 4Ω ,

$$I_N = I_{\text{cortocircuito}} = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ A}.$$

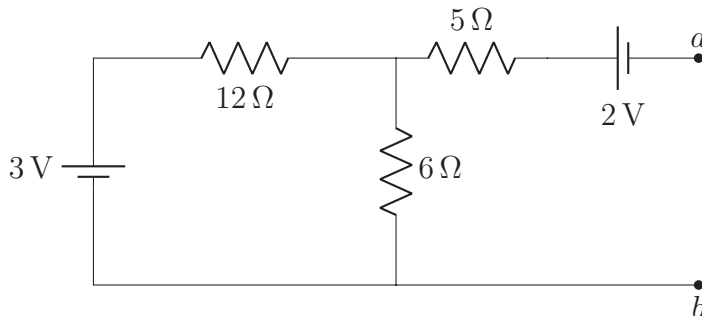
Una vez calculado el equivalente de Norton, colocamos en él la resistencia de carga $R_L = 10 \Omega$. Este circuito es un divisor de corriente, con la fuente de corriente $I_N = 0,5 \text{ A}$ en paralelo con la resistencia de Norton $R_N \approx 1,85 \Omega$ y la resistencia de carga $R_L = 10 \Omega$. La resistencia equivalente de la asociación en paralelo de R_N y R_L es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_L} = \frac{13}{24} + \frac{1}{10} = \frac{77}{120} \Rightarrow R_{eq} = \frac{120}{77} \approx 1,56 \Omega.$$

Por la ecuación del divisor, la corriente a través de R_L es

$$I_L = I_N \frac{R_{eq}}{R_L} = 0,5 \cdot \frac{120}{77 \cdot 10} \approx 0,0779 \text{ A}.$$

9. Obtén el equivalente de Thévenin respecto de los terminales a y b del siguiente subcircuito fuente.



Sol. Para obtener el voltaje de Thévenin, hemos de calcular la diferencia de potencial entre a y b . Dado que no pasa corriente por la batería de 2 V ni por la resistencia de 5 Ω , la corriente por la resistencia de 6 Ω es

$$I_6 = \frac{\varepsilon_1}{R_{eq}} = \frac{3}{12+6} = \frac{1}{6} \text{ A.}$$

Con esto,

$$V_a - V_b = -\varepsilon_2 + I_6 R_6 = -2 + \left(\frac{1}{6} \cdot 6 \right) = -1 \text{ V.}$$

Por tanto, resulta que el terminal positivo del equivalente de Thévenin no es a , sino b . El voltaje de Thévenin es

$$V_{Th} = V_b - V_a = 1 \text{ V.}$$

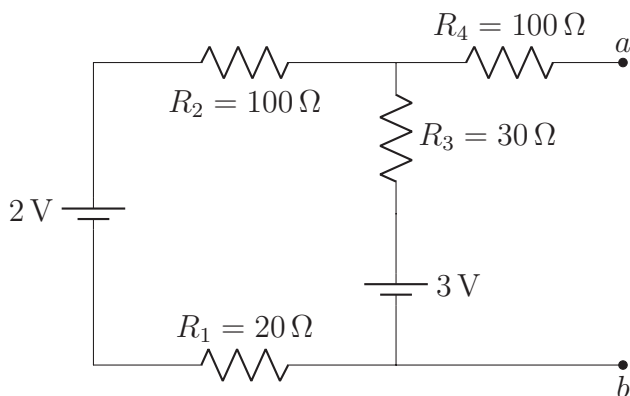
Para la resistencia de Thévenin, sustituimos todas las baterías por cortocircuitos. Las resistencias de 12 Ω y 6 Ω están en paralelo, de modo que

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} \Rightarrow R_{12} = 4 \Omega.$$

Dado que R_{12} está en serie con la resistencia de 5 Ω ,

$$R_{Th} = R_{12} + R_5 = 4 + 5 = 9 \Omega.$$

10. Calcula el equivalente de Norton del siguiente subcircuito fuente.



Sol. Para obtener la resistencia de Norton, sustituimos todas las baterías por cortocircuitos y calculamos la resistencia equivalente entre a y b . Las resistencias R_1 y R_2 están en serie, de manera que

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 + 100 = 120 \, \Omega.$$

R_{12} está en paralelo con R_3 :

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{120} + \frac{1}{30} = \frac{5}{120} \Rightarrow R_{123} = \frac{120}{5} = 24 \, \Omega.$$

Finalmente, R_{123} está en serie con R_4 , por lo que

$$R_N = R_{123} + R_4 = 24 + 100 = 124 \, \Omega.$$

La corriente de Norton es la corriente entre a y b cuando se coloca un cortocircuito entre esos puntos. Para este caso, sin embargo, es mucho más sencillo calcular el voltaje en circuito abierto entre a y b (voltaje de Thévenin) y luego usar la resistencia de Norton que ya tenemos. Dado que no hay corriente en R_4 , la corriente en la malla cerrada (tomada en sentido antihorario), usando la regla de Kirchhoff, está dada por

$$0 = 2 + I(20 + 100 + 30) - 3 \Rightarrow I = \frac{1}{150} \, \text{A}.$$

Por tanto,

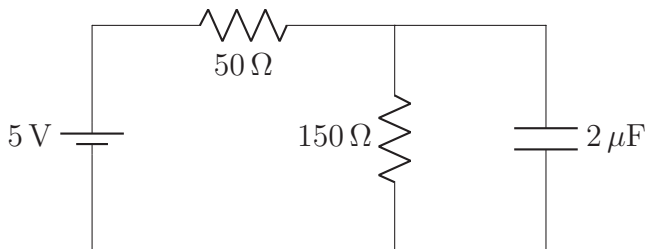
$$V_{abierto} = V_a - V_b = -I30 + 3 = -\frac{30}{150} + 3 = \frac{14}{5} \, \text{V}.$$

Y, usando la resistencia de Norton, tenemos

$$I_N = \frac{V_{abierto}}{R_N} = \frac{14}{5 \cdot 124} \approx 0,0223 \, \text{A}.$$

11. En el circuito de la figura, $V_0 = 10 \, \text{V}$, $R_1 = 100 \, \Omega$, $R_2 = 300 \, \Omega$, $C = 4 \, \mu\text{F}$.

12. Teniendo en cuenta que el condensador del siguiente circuito está inicialmente descargado, calcula la constante de tiempo del proceso de carga, así como la carga de su placa positiva una vez finalizado el proceso de carga.



Sol. Sabemos que la constante de tiempo de la carga de un condensador conectado a una batería y a una resistencia en serie es RC . Pero, en este circuito, tenemos dos resistencias. Para reducirlo, hacemos el equivalente de Thévenin quitando el condensador. El voltaje de Thévenin será el de la resistencia de $150\ \Omega$ en el divisor de tensión resultante:

$$V_{Th} = 5 \frac{150}{50 + 150} = 10 \cdot \frac{30}{100 + 300} = 3,75\text{ V}.$$

La resistencia de Thévenin, sustituyendo la batería por un cortocircuito, estará dada por

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150} = \frac{4}{150} \Rightarrow R_{Th} = \frac{150}{4} = 37,5\ \Omega.$$

Una vez calculado el equivalente de Thévenin, colocamos en él el condensador. Tenemos ahora una batería con $V_{Th} = 3,75\text{ V}$ en serie con una resistencia $R_{Th} = 37,5\ \Omega$ y un condensador $C = 2\ \mu\text{F}$. La constante de tiempo del proceso de carga será

$$RC = 37,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 7,5 \cdot 10^{-5}\text{ s}.$$

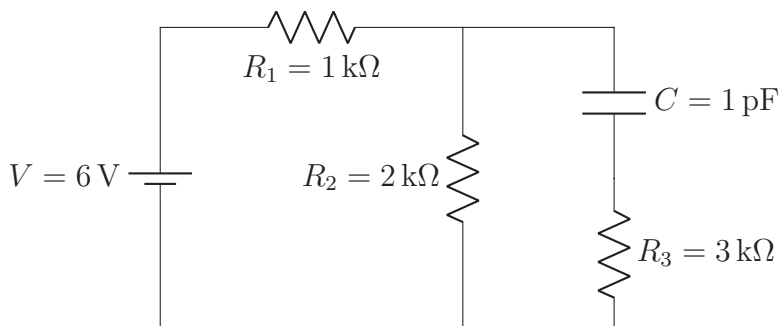
Una vez cargado el condensador, ya no hay corriente en el equivalente de Thévenin y el voltaje del condensador se iguala al voltaje de la batería, por lo que

$$V_C = V_{Th} = 3,75\text{ V}.$$

De aquí, la carga del condensador resulta

$$C = \frac{Q}{V_C} \Rightarrow Q = CV_C = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3,75 = 7,5 \cdot 10^{-6}\text{ C}.$$

13. Determina la carga del condensador una vez está completamente cargado.



Sol. En el régimen estacionario, por la rama en la que está el condensador no circula corriente (C se comporta como un circuito abierto), de modo que no hay corriente por R_3 . La diferencia de potencial V_C entre las placas del condensador es, entonces, igual a la caída de potencial V_2 en R_2 . Dado que el circuito formado por V , R_1 y R_2 es un divisor de tensión,

$$V_C = V_2 = V \frac{R_2}{R_{eq}} = V \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \frac{2}{3} = 4 \text{ V}.$$

Con esto, la carga de la plaza positiva del condensador resulta

$$Q = CV_C = 10^{-12} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-12} \text{ C}.$$