

7 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

7.1 Ecuaciones relevantes.

■ Ley de Faraday.

Cuando el flujo magnético, ϕ_m , a través de la superficie delimitada por un circuito cerrado varía, se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.= ε) en el circuito que está relacionada con la tasa de variación del flujo. El valor de esta fuerza electromotriz viene dada por la Ley de Faraday

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.1)$$

El signo – de la ecuación (7.1) viene determinado por la Ley de Lenz, según esta ley, la corriente inducida en el circuito tiende a oponerse al cambio que la genera.

Por todo ello en muchos casos calcularemos el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida para posteriormente aplicar la Ley de Lenz y deducir el sentido de la corriente inducida. Puesto que la fuerza electromotriz es el trabajo por unidad de carga, habrá fuerzas que se ejercerán sobre las cargas móviles que realizan trabajo sobre ellas. Como las fuerzas magnéticas no pueden realizar trabajo, no podemos atribuir la fuerza electromotriz a estas fuerzas y por lo tanto serán las fuerzas eléctricas las responsables de ella. Esto nos lleva a señalar que estas fuerzas eléctricas estarán asociadas a un campo eléctrico **no conservativo**.

■ Inductancia.

La autoinducción L , es una magnitud que permite relacionar el flujo magnético ϕ_m que atraviesa la superficie delimitada por un conductor con la intensidad que circula él.

$$\phi_m = LI \quad (7.2)$$

La unidad en el Sistema Internacional de la inductancia es el Henrio (H), que se define como $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1}$. La unidad del flujo magnético ϕ_m es el *Weber* Wb.

Haciendo uso de la ecuación (7.2) y considerando que el coeficiente de autoinducción es constante en el tiempo, podemos reescribir la Ley de Faraday como:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.3)$$

Si consideramos un solenoide de longitud l y con N espiras, podemos deducir que el coeficiente de autoinducción del solenoide viene dado por la expresión:

$$L = \mu_0 n^2 A l \quad (7.4)$$

donde n es la densidad de espiras por unidad de longitud $n = N/l$, A es el área de cada una de las espiras que forman el solenoide.

Cuando dos circuitos o más están próximos el uno al otro, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no solo de la corriente en el propio circuito sino que depende también de la corriente que circula por los otros circuitos. De este modo, supongamos que tenemos dos circuitos próximos, 1 y 2 por los cuales circulan las corrientes I_1 e I_2 . En la superficie delimitada por el circuito 2 existirá un campo magnético que será el resultado de la superposición de los campos generados respectivamente por las corrientes I_1 e I_2 . El flujo a través de la superficie del circuito 2 debido a la corriente I_1 la podemos escribir como:

$$\phi_{m12} = M_{12} I_1 \quad (7.5)$$

De igual modo el flujo magnético a través de la superficie del circuito 1 debido a la corriente I_2 se puede escribir como:

$$\phi_{m21} = M_{21} I_2 \quad (7.6)$$

a los coeficientes M_{12} y M_{21} se les denomina coeficiente de inducción mutua y se puede demostrar que ambos coeficientes tienen el mismo valor $M_{12} = M_{21} = M$.

Un ejemplo de cálculo del coeficiente de inducción mutua es el de dos solenoides de radios r_1 y r_2 respectivamente, con $r_1 < r_2$ y densidades de espiras n_1 y n_2 y ambos de longitud l . Para este caso, obtenemos:

$$M = \mu_0 n_1 n_2 l \pi r_1^2 \quad (7.7)$$

■ Energía magnética almacenada en un solenoide.

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.8)$$

■ Densidad de energía magnética por unidad de volumen.

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (7.9)$$

7.2 Ejercicios

1. El flujo magnético a través de una bobina viene dado por la expresión:

$$\phi_m(t) = \frac{1}{\pi} N \cos(100\pi t),$$

donde todas las unidades vienen expresadas en el Sistema Internacional.

Si la bobina tiene $N = 100$ vueltas, calcule el valor de la fuerza electromotriz inducida en la bobina en el instante de tiempo $t = 1/200$ s.

Solución

Para resolver este problema debemos aplicar la ley de Faraday y particularizar para el tiempo que se nos dice.

$$\varepsilon(t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\pi} N \cos(100\pi t) \right) = \frac{1}{\pi} N 100\pi \sin(100\pi t)$$

$$\varepsilon(0,005) = 100^2 \sin(\pi/2) = 100^2 \text{ V}$$

2. Una bobina tiene una longitud de 15 cm y está compuesta por 400 espiras circulares de 2 cm de radio. Por la bobina pasa una corriente continua $I = 0,05$ A. Calcule:

- El flujo magnético a través de la bobina.
- La fuerza electromotriz inducida en la bobina si la corriente se extingue uniformemente de forma lineal en 0,05 s.

Solución

- a) Para calcular el flujo lo primero que debemos hacer es calcular el campo magnético generado por la bobina para lo cual consideraremos la aproximación de solenoide infinito:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 400/0,15 0,05 = 400\mu_0/3 \text{ T}$$

Una vez conocido el campo magnético en el interior de la bobina obtenemos el flujo total multiplicando por la sección total siendo la

sección de una espira por el número total de espiras:

$$S = 400\pi r^2 = 400\pi 0,02^2 = 0,16\pi \text{ m}^2$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el campo magnético y el vector superficie de la bobina son paralelos, obtenemos:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = 400\mu_0/3 \cdot 0,16\pi = 8,42 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

- b) Para la segunda cuestión, el concepto clave es el hecho de que la corriente se extinga uniformemente. Esto nos permite calcular la variación temporal del flujo magnético como un cociente entre la variación de flujo magnético y el tiempo total que tarda en extinguirse la corriente eléctrica.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{8,42 \cdot 10^{-5}}{0,05} = 1,68 \text{ mV}$$

3. Una espira circular de 16 cm de diámetro y $0,05 \Omega$ de resistencia está situada en una zona donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano de la espira. Inicialmente el campo magnético tiene un valor de $0,1 \text{ T}$ y disminuye uniformemente hasta anularse a razón de $0,2 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcule:

- a) la fuerza electromotriz inducida.
b) la intensidad de la corriente inducida en la espira.

Solución

- a) Para calcular la fuerza electromotriz inducida, en este caso no es necesario calcular el flujo a través de la espira, ya que el propio enunciado nos da la tasa de variación del campo magnético en función del tiempo y la superficie de la espira permanece constante, por lo tanto:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{dB}{dt} S \right| = 0,2 \pi r^2 = 4,02 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- b) Una vez conocida la fuerza electromotriz inducida, deducir la intensidad es automático

$$I = \frac{2,01 \cdot 10^{-3}}{0,05} = 8,04 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

4. Una bobina de 500 espiras, de sección circular de 6 cm de radio, está colocada en un campo magnético uniforme. La dirección del campo coincide con el eje de la bobina y su valor varía según $B = 0,2 - 0,004t^2$, en unidades del S.I. Calcule:
- El flujo magnético que atraviesa la bobina y la fuerza electromotriz inducida en ella en función del tiempo.
 - La intensidad de la corriente inducida para $t = 5$ s si su resistencia es de 3Ω .

Solución

- a) Para calcular el flujo magnético debemos aplicar su definición, teniendo en cuenta que la superficie es el producto de las 500 espiras por el área de una de ellas.

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (0,2 - 0,004t^2)\pi r^2 500 = 1,8\pi(0,2 - 0,004t^2) \text{ Wb}$$

La fuerza electromotriz inducida la obtenemos aplicando la ecuación (7.1),

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{1,8\pi(0,2 - 0,004t^2)}{dt} \right| = 0,0144\pi t \text{ V}$$

- b) Para obtener la corriente inducida, simplemente debemos aplicar la ley de Ohm, particularizada para $t = 5$ s

$$|\varepsilon| = 0,0144\pi t = 0,0144\pi 5 = 0,072\pi = IR \rightarrow I = \frac{0,072\pi}{3} = 0,024\pi \text{ A}$$

5. Una espira de superficie S se mueve siguiendo un movimiento rectilíneo uniforme en un espacio donde existe un campo magnético uniforme y estático perpendicular al plano de la espira, $B = 1 \text{ T}$.

- ¿Cuánto vale la inducción electromagnética en este caso?
- Se para la espira y empieza a girar respecto de un eje perpendicular al campo con una velocidad angular ω . Calcule la inducción electromagnética en este caso.

Solución

- a) Al ser el campo uniforme, el flujo del campo magnético sobre la espira es constante. No hay variación de flujo y como consecuencia la tensión inducida es nula.
- b) Ahora la espira gira con velocidad angular constante sobre un eje perpendicular al campo magnético. El flujo del campo magnético sobre la espira se calcula como:

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos(\theta) \text{ Wb}$$

siendo $\theta = \omega t$ el ángulo que forma el vector normal al plano de la espira con el campo magnético. La tensión inducida se obtiene con la ley de Faraday:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = BS\omega \sin(\omega t) \text{ V}$$

6. Por un solenoide de 2000 vueltas, área 4 cm^2 y longitud 30 cm circula una corriente de 4 amperios . Calcule la energía acumulada en el solenoide.

Solución

Para calcular la energía que nos piden podemos proceder de dos formas distintas.

La primera de ellas aplicaremos directamente la fórmula (7.8) donde el valor de la autoinducción de un solenoide lo obtenemos a partir de (7.4) ($L = \mu_0 n^2 Al$). Sustituyendo ambas expresiones obtenemos:

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 Al I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{2000}{0,3} \right)^2 4 \cdot 10^{-4} 0,3 \cdot 4^2 = 53,6 \text{ mJ}$$

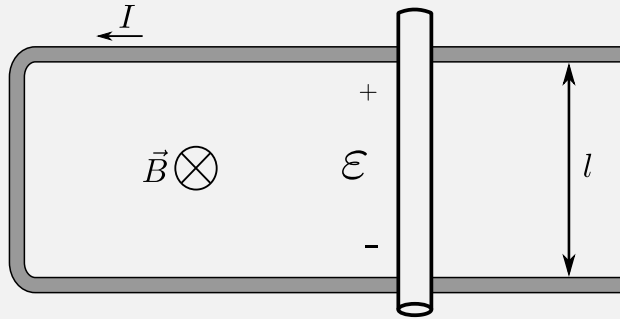
Otra forma sería aplicando la ecuación (7.9) donde el campo magnético sería el generado por el solenoide y cuya ecuación conocemos (5.6) ($B = \mu_0 nI$).

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0}$$

Si una vez conocida la densidad de energía multiplicamos por el volumen del solenoide $V = Al$, obtenemos la misma expresión que hemos obtenido mediante la primera forma que hemos propuesto

$$U_m = u_m V = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0} Al = 53,6 \text{ mJ}$$

7. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme de valor $0,5 \text{ T}$ que penetra perpendicularmente al plano del papel, tal y como se muestra en la figura. La resistencia de la varilla vale 2Ω y su longitud es $l = 20 \text{ cm}$. ¿Hacia dónde y con qué velocidad constante hay que desplazar la varilla, permaneciendo constante el valor del campo magnético, para producir una corriente de 1 A en sentido antihorario? Se puede despreciar la resistencia de los raíles.



Solución

Para resolver este problema, debemos estudiar cómo varía la sección de la espira en función del tiempo. Para ello consideraremos que en un instante inicial los lados del circuito eléctrico son x_0 y l respectivamente, con lo que el área total será $x_0 l$. Conforme se desplace la varilla hacia un lado u otro esta superficie vendrá dada por $l(x_0 \pm vt)$, donde el signo $+$ nos indica que la varilla se mueve hacia la derecha y el signo $-$ hacia la izquierda. De este modo, la ecuación de Faraday queda:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d(B \cdot S)}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt}(Bl(x_0 - vt)) \right| = B l v$$

El enunciado nos dice que la corriente tiene que ser de 1 A y que la resistencia de la varilla es 2Ω , por lo tanto la fuerza electromotriz inducida tiene que ser de 2 V . Igualando este valor a la expresión anterior y sustituyendo por los valores numéricos correspondientes, obtenemos:

$$B l v = 2 \text{ V} \rightarrow 0,5 \cdot 0,2 \cdot v = 2 \rightarrow v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

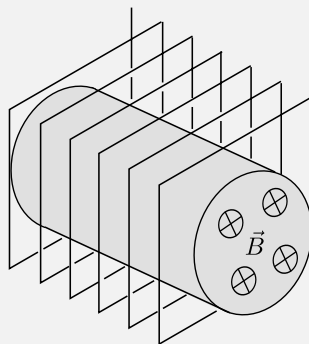
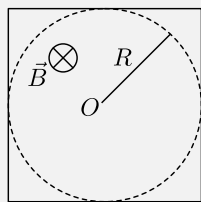
Ahora queremos averiguar hacia qué lado tiene que ir la varilla para generar una corriente en sentido antihorario. Aquí es útil calcular las fuer-

zas que se van a ejercer sobre las cargas situadas en la barra conductora. La fuerza magnética es:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza sobre los electrones tiene que ir en sentido opuesto a la corriente I . Aplicando la regla de la mano derecha, para que la fuerza $\vec{F}_B$ vaya hacia abajo, encontramos que el vector $q\vec{v}$ va hacia la izquierda. Dado que una carga q es negativa, el vector $\vec{v}$ va hacia la derecha.

8. Un campo magnético uniforme espacialmente tiene un módulo que aumenta linealmente con el tiempo $B(t) = kt$. El campo es perpendicular al plano del papel y entrante y se limita a una región cilíndrica cuya sección recta es la circunferencia de radio R de la figura. Se introduce en el campo una espira conductora cuadrada de resistencia $r \, \Omega$ tal y como se muestra en la figura. Calcule la corriente inducida en la espira e indicar su sentido.



Solución

Para calcular el flujo magnético a través de la espira cuadrada, únicamente debemos tener en cuenta la sección circular en la que el campo magnético está definido. De este modo el flujo magnético es:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = kt\pi R^2 \text{ Wb}$$

Aplicamos la ley de Faraday para calcular la fuerza electromotriz inducida

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt}(kt\pi R^2) \right| = k\pi R^2 \text{ V}$$

La corriente inducida vendrá dada por la ley de Ohm:

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{r} = \frac{k\pi R^2}{r} \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente inducida deberemos tener en cuenta la ley de Lenz, la cual nos dice que la corriente inducida se opone al cambio que la genera. En este caso el campo magnético aumenta conforme pasa el tiempo y por lo tanto el flujo también aumenta, si la corriente inducida se opone al cambio, en este caso deberá generar un campo magnético cuyo sentido sea hacia fuera del plano del papel para disminuir el flujo del campo magnético. Por lo tanto aplicando la regla de la mano derecha la corriente inducida deberá tener sentido antihorario.

9. Una bobina circular de 10 espiras y de 10 cm de radio se coloca perpendicularmente a un campo de intensidad $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$ T. ($B_0 = 0,5$ T, $\tau = 1$ ms)
- Calcular el flujo magnético que atraviesa la bobina en función del tiempo.
 - Calcular la fuerza electromotriz inducida.
 - Siendo la resistencia de la espira $r = 0,1 \Omega$, calcule la potencia disipada en función del tiempo.
 - ¿Cuánta energía se habrá disipado al cabo de 1 s? (consideramos el tiempo inicial $t = 0$).

Solución

- a) El área total de la bobina incluyendo todas las espiras viene dada por $S = n\pi R^2 = 10\pi 0,1^2 = 0,1\pi \text{ m}^2$.

Para calcular el flujo magnético, debemos aplicar su definición:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 e^{-t/\tau} \cdot 0,1\pi = 0,5 e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \text{ Wb}$$

- b) La fuerza electromotriz inducida vendrá dada por la Ley de Faraday

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} 0,5 e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \right| = \left| \frac{-0,5}{0,001} e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \right| =$$

$$|\varepsilon| = 157,07 e^{-t/0,001} \text{ V}$$

- c) Para calcular la potencia disipada en la espira, primero deberemos obtener la intensidad que circula por la espira

$$I = \frac{|\varepsilon|}{r} = \frac{157,07 e^{-t/0,001}}{r} = 1570,7 e^{-t/0,001} \text{ A}$$

Una vez conocida dicha corriente calculamos la potencia disipada

$$P(t) = |\varepsilon| \cdot I = 157,07 e^{-t/0,001} \cdot 1570,7 e^{-t/0,001} = 246740,1 e^{-2t/0,001} \text{ W}$$

- d) La energía disipada en el intervalo $t = 0 \rightarrow 1 \text{ s}$, se obtiene integrando la potencia disipada.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 P(t) \cdot dt = \int_0^1 246740,1 e^{-2t/0,001} dt = 246740,1 \int_0^1 e^{-2t/0,001} dt = \\ &= 246740,1 \left[\frac{-1}{2000} e^{-2t/0,001} \right]_0^1 = 123,3 \text{ J} \end{aligned}$$

10. Queremos lanzar un objeto metálico a alta velocidad y para ello disponemos de dos rieles paralelos deslizantes separados una distancia de 0,5 m. Los rieles se encuentran inmersos en un campo magnético $B = 0,2 \text{ T}$ perpendicular al plano definido por los rieles. Si el proyectil es una barra metálica de masa $m = 0,2 \text{ kg}$ que se apoya en ambos rieles, calcule:

- ¿La intensidad de corriente que debe circular por la barra para, una vez colocada sobre los rieles, experimente una aceleración de $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
- ¿Si los rieles tienen una longitud de $l = 1 \text{ m}$, ¿qué velocidad alcanzará la barra cuando salga despedida de los rieles?

Solución

Para este problema se va a despreciar el rozamiento.

- a) En este caso lo primero que debemos calcular es la fuerza que actúa sobre la barra que queremos proyectar, para posteriormente aplicar la 2ª Ley de Newton. Dicha fuerza vendrá dada por:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

En este caso los vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y por lo tanto, al aplicar la 2ª Ley de Newton obtenemos:

$$F = I l B = m a$$

Finalmente despejamos el valor de la intensidad de corriente que se nos pide:

$$I = \frac{m a}{l B} = \frac{0,2 \cdot 10}{0,5 \cdot 0,2} = 20 \text{ A}$$

- b) El segundo apartado es un simple problema de cinemática, para lo cual calcularemos el tiempo que tarda la barra en recorrer los rieles teniendo en cuenta que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}10 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,447 \text{ s}$$

Una vez conocido el tiempo simplemente deberemos sustituir en la ecuación de la velocidad, siendo la velocidad inicial nula

$$v = a \cdot t = 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

11. En el centro de un solenoide de 2 cm de radio, 10 cm de longitud y 5000 espiras se sitúa una espira de 1 cm de radio y 0,5 Ω de resistencia. El plano de la espira es perpendicular al eje del solenoide.

Si por el solenoide circula una corriente de 2 A, calcule:

- El campo magnético en el interior del solenoide.
- El coeficiente de inducción mutua M entre el solenoide y la espira.
- Si la corriente del solenoide se extingue uniformemente en 0,5 ms calcule la fuerza electromotriz inducida y la corriente inducida en la espira.

Solución

- a) El campo magnético generado por el solenoide se obtiene directamente con la aplicación de la fórmula:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \cdot 5000/0,1 \cdot 2 = 100000\mu_0 \text{ T}$$

- b) Para el cálculo del coeficiente de inducción mutua, primero debemos calcular el flujo magnético a través de la espira situada en el interior del solenoide,

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = 100000\mu_0 \pi r^2 = 100000\mu_0 \pi 0,01^2 = 10\pi\mu_0 \text{ Wb}$$

Es el flujo entre espira y solenoide. Finalmente aplicamos su definición, es decir la relación entre flujo y corriente I del solenoide:

$$M = \frac{\phi_m}{I} = \frac{10\pi\mu_0}{2} = 5\pi\mu_0 \text{ H}$$

- c) Para calcular la fuerza electromotriz inducida, aplicaremos la Ley de Faraday teniendo en cuenta que la corriente en el solenoide se extingue uniformemente:

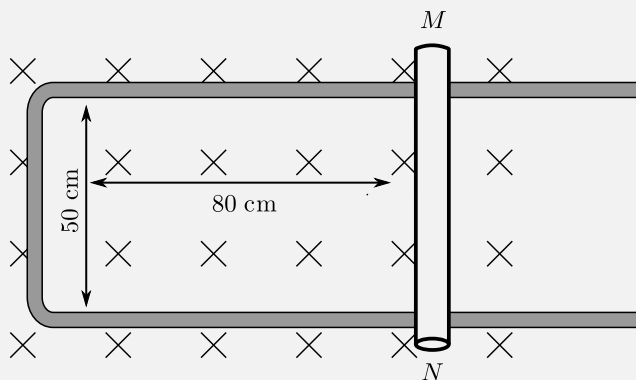
$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{10\pi\mu_0}{0,5} = 20\pi\mu_0 \text{ V}$$

12. En una región del espacio hay un campo magnético uniforme de intensidad 0,5 T que penetra perpendicularmente al plano del papel tal y como se muestra en la figura. Si la resistencia de la varilla MN vale 2Ω .

- a) ¿Con qué velocidad, módulo y sentido, debe moverse la varilla si queremos que en el circuito se induzca una corriente de 0,2 A en sentido horario?

Volvemos a la situación inicial y, manteniendo fija la varilla, procedemos a modificar uniformemente el campo magnético durante 2 s. Comprobamos que la corriente inducida durante este proceso es la misma que en el caso anterior.

- b) ¿Cuál es el valor final del campo magnético (módulo y sentido)?



Solución

- a) El enunciado nos dice que la corriente inducida tiene que ser 0,2 A en sentido horario. Por lo tanto, de acuerdo con la regla de la mano derecha, el campo generado por la corriente inducida tiene sentido hacia dentro del plano del papel. La ley de Lenz nos dice que el

sentido de la corriente inducida se tiene que oponer al cambio que la genera. La corriente en el sentido horario aumenta el flujo del campo. Por lo tanto la barra debe moverse hacia la izquierda para compensar este aumento de flujo.

Para calcular el módulo de la velocidad aplicaremos la ley de Faraday y la ley de Ohm a la varilla:

$$I \cdot R = 0,2 \cdot 2 = 0,4 = |\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = B l v$$

$$\rightarrow v = \frac{|\varepsilon|}{B \cdot l} = \frac{0,4}{0,5 \cdot 0,5} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) En la segunda parte debemos tener en cuenta que la variación de flujo magnético se produce debido a la variación del campo magnético, pues la sección va a permanecer constante.

Basándonos en los mismos razonamientos que en el apartado anterior, para que la corriente inducida tenga sentido horario, el campo magnético deberá disminuir. La corriente vale 0,2 A como en el apartado anterior, podemos obtener $|\varepsilon| = RI = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ V}$. Podemos aplicar la ley de Faraday y deducir la variación de campo magnético

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}$$

despejando

$$|\Delta B| = \frac{|\varepsilon| \Delta t}{S} = \frac{0,4 \cdot 2}{0,5 \cdot 0,8} = 2 \text{ T}$$

Dado que $|\Delta B| = 2 \text{ T}$ y como hemos deducido que el campo magnético está disminuyendo, $B_f = B_0 - 2 \text{ T} = -1,5 \text{ T}$, o lo que es lo mismo el campo magnético final tiene un valor de 1,5 T con sentido hacia fuera del papel (decrece hacia el cero para volver a crecer en sentido positivo).

13. Una bobina circular de radio $a = 10 \text{ cm}$ y 1000 espiras gira perpendicularmente a un campo magnético de intensidad $B = 1 \text{ T}$. La bobina se conecta a una resistencia de valor $R = 100 \Omega$. Siendo el pico de corriente (es decir, la corriente máxima) en la resistencia de $\pi/10 \text{ A}$, hallar:

- la fuerza electromotriz inducida en la bobina en función del tiempo.
- la frecuencia de giro de la bobina, expresada en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solución

- a) La obtención de la f.e.m. inducida es una aplicación directa de la Ley de Faraday.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot \vec{S} \right| =$$

$$= \left| \frac{d}{dt} B S \cos(\omega t) \right| = |-B S \omega \sin(\omega t)| = B S \omega \sin(\omega t) \text{ V}$$

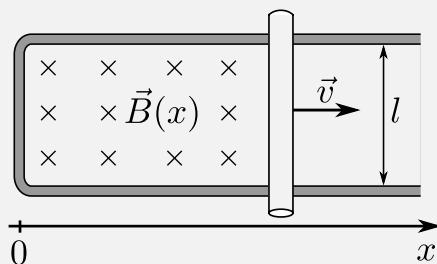
- b) Teniendo en cuenta que el valor de pico de la intensidad es el valor máximo de la corriente, este se corresponderá con el valor máximo de la f.e.m. en la resistencia dado que son proporcionales. Coincide con los tiempos para los cuales $\sin(\omega t) = 1$. Por lo tanto,

$$I_{max} R = B S \omega \rightarrow \omega = \frac{I_{max} R}{B S} = \frac{(\pi/10) 100}{1 \pi 0,1^2} = 1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

14. Una barra conductora desliza con una velocidad constante $\vec{v} = 10\vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sobre unos railes conductores paralelos separados por una distancia $l = 0,5 \text{ m}$. Existe un campo magnético perpendicular al plano de movimiento de la barra $\vec{B}(x) = 0,1x\vec{k} \text{ T}$.

- a) Calcule el flujo magnético en la espira formada por los railes y la barra en función de x , es decir $\phi_m(x)$.
- b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en el circuito en función de x .

Nota: la regla de la cadena nos permite escribir $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt}$.

**Solución**

- a) Para calcular el flujo magnético en la espira, deberemos aplicar su definición, considerando que en este caso el campo magnético y el

vector superficie son paralelos, y que ambas magnitudes dependen de x

$$\phi_m(x) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^x 0,1x\vec{k} \cdot l \, dx\vec{k} = \left[\frac{0,1 l x^2}{2} \right]_0^x = \frac{0,1 l x^2}{2}$$

- b) Una vez conocida la expresión del flujo magnético en función de x tal y como nos dice el enunciado, debemos aplicar la regla de la cadena, teniendo en cuenta que $x(t) = v t + x_0$. De este modo:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right|$$

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\frac{0,1 l x^2}{2} \right) \frac{dx}{dt} = 0,1 \, 0,5 x v = 0,5 x \, \text{V}$$

Concluimos que $|\varepsilon| = |0,5x|$.

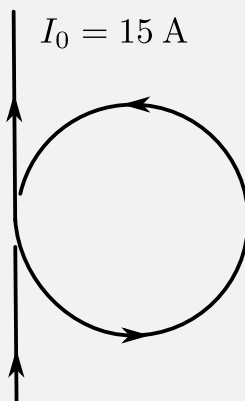
15. Un conductor rectilíneo infinito se dobla tal y como se indica en la figura. Se sabe que por él circula una corriente $I_0 = 15 \text{ A}$ y que el campo magnético en el centro de la espira formada con el conductor vale $3,21 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ y apunta hacia fuera del papel.

- a) Calcular el radio R de la espira circular que se ha formado con el conductor rectilíneo que permite obtener el campo de $3,21 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ en su centro.

A continuación en el centro de la espira se coloca una segunda espira de radio $r = 1 \text{ cm}$ y resistencia $2 \text{ m}\Omega$. Modificando de forma lineal el valor de la intensidad que circula por el hilo tal que $I(t) = at + I_0$ se observa que se induce una corriente en la segunda espira de valor $2 \text{ }\mu\text{A}$ en sentido horario.

- b) La intensidad que circulará por el conductor al cabo de 3 segundos.
- c) Repita el apartado anterior considerando que la corriente inducida en la segunda espira tuviese sentido antihorario.

Nota: Considere que el campo magnético es constante en la sección de la segunda espira y que su valor es el que tiene en el centro.



Solución

- a) Para este primer apartado deberemos considerar que el hueco que

se genera al doblar el hilo entre los dos tramos rectos es despreciable, de modo que podremos considerar que el campo magnético total generado en el centro de la espira, $\vec{B}_T$, es la suma del campo generado por un hilo rectilíneo infinito (5.8), $\vec{B}_h$, más el generado por una espira circular en su centro (5.3), $\vec{B}_e$. De este modo:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_h + \vec{B}_e$$

Para establecer el carácter vectorial de los campos, consideraremos que el eje perpendicular al plano de la figura es el eje z , y tomaremos sentido positivo saliendo del plano. Con esta consideración y teniendo en cuenta el sentido de los campos generados, la fórmula anterior nos queda:

$$\vec{B}_T = B_h(-\vec{k}) + B_e\vec{k} \rightarrow 3,21 \cdot 10^{-4}\vec{k} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}\vec{k} + \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{\vec{k}}{R}$$

Despejamos R :

$$R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1 - 1/\pi}{3,21 \cdot 10^{-4}}$$

Sustituyendo los valores numéricos que nos proporciona el enunciado, obtenemos

$$R = 2 \text{ cm}$$

- b) Se nos dice que al introducir una espira de radio $r = 1 \text{ cm}$ y de resistencia $2 \text{ m}\Omega$ se induce una corriente de $2 \mu\text{A}$ en sentido horario. Recordamos que en este problema, el campo se considera uniforme con un valor igual al del centro de la espira. Como la intensidad varía de forma lineal podemos expresar la ecuación (7.1) como:

$$|\varepsilon| = \frac{|\Delta\phi_m|}{\Delta t} = \frac{|B_f - B_i| S}{\Delta t}$$

En este caso, la corriente inducida en la pequeña espira tiene sentido horario. Razonando con la ley de Lenz podemos deducir que el campo magnético generado por el hilo y la espira inicial debe aumentar. El campo magnético del cable + espira va dirigido hacia dentro del papel y el campo de la pequeña espira hacia fuera. El campo de la pequeña espira debe oponerse al aumento de flujo generado por el cable.

Siendo $|\varepsilon| = RI = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ V}$, la ecuación anterior nos queda:

$$|\varepsilon| = \frac{(B_f - B_i) S}{\Delta t} \rightarrow 4 \cdot 10^{-9} \text{ V} = \frac{(B_f - B_i) \pi r^2}{3}$$

$$B_f - B_i = 3,82 \cdot 10^{-5} \text{ T} \rightarrow B_f = 3,59 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Este campo es generado por la configuración de corriente inicial, por lo tanto, simplemente deberemos aplicar la misma fórmula que en el primer apartado:

$$3,59 \cdot 10^{-4} \vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{k} + \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \vec{k} \rightarrow I = 16,76 \text{ A}$$

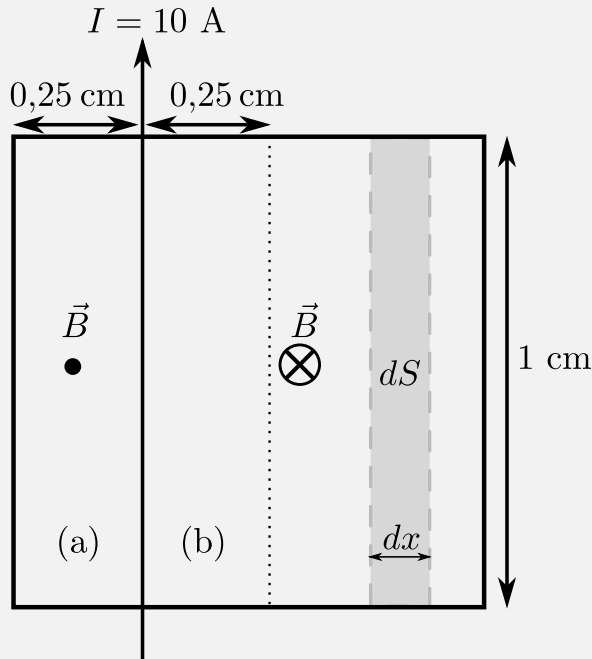
- c) Al igual que en el apartado anterior, al aplicar la ley de Faraday y procediendo de forma similar obtenemos:

$$|B_f - B_i| = 3,82 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Sin embargo, en este caso, la corriente inducida tiene sentido antihorario, lo que nos indica que el campo magnético generado por el hilo y la espira inicial disminuye, con lo que obtenemos:

$$B_f = 2,828 \cdot 10^{-4} \vec{k} \text{ T} \rightarrow I = 13,43 \text{ A}$$

16. Sobre una espira cuadrada, de lado $a = 1 \text{ cm}$ y resistencia $R = 1 \Omega$, descansa un cable conductor rectilíneo muy largo, paralelo a un lado de la espira y a una distancia $d = 0,25 \text{ cm}$ del centro de esta. El cable conduce una corriente $I = 10 \text{ A}$. Si esta corriente se anula uniformemente en $0,1 \text{ s}$, determine la corriente inducida en la espira y su sentido.



Solución

Para resolver este problema, lo primero que debemos darnos cuenta es el sentido que lleva el campo a ambos lados del hilo conductor, lo cual se obtiene directamente aplicando la regla de la mano derecha. Es importante observar que el campo magnético generado por el hilo a uno y otro lado lleva sentido opuesto, por lo que el flujo que en la región izquierda del dibujo (a) se anula con el de la parte simétrica respecto del hilo de la derecha (b).

Una vez que tenemos el planteamiento claro, aplicamos la definición de flujo magnético, para lo cual deberemos tener en cuenta la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito en un punto es $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ siendo x la distancia desde el hilo hasta dicho punto. El diferencial de

superficie dS que se toma vendrá dado por la banda estrecha que se muestra en la figura. Tendrá como longitud el lado de la espira y como anchura dx , por lo tanto $dS = 0,01dx$ (ver figura)

$$\begin{aligned}\phi_m &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{0,0025}^{0,0075} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} 0,01 dx = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \int_{0,0025}^{0,0075} \frac{dx}{x} = \dots \\ \dots &= \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} [\log(x)]_{0,0025}^{0,0075} = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \log\left(\frac{0,0075}{0,0025}\right) = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \log(3) \\ \phi_m &= 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}\end{aligned}$$

Una vez conocido el flujo magnético a través de la espira, calcularemos la f.e.m. inducida aplicando la Ley de Faraday y teniendo en cuenta que el enunciado nos dice que la corriente se apaga uniformemente en 0,1 s.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{2,2 \cdot 10^{-8}}{0,1} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

Una vez conocida la f.e.m. inducida, aplicando la Ley de Ohm obtenemos la corriente inducida

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{R} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

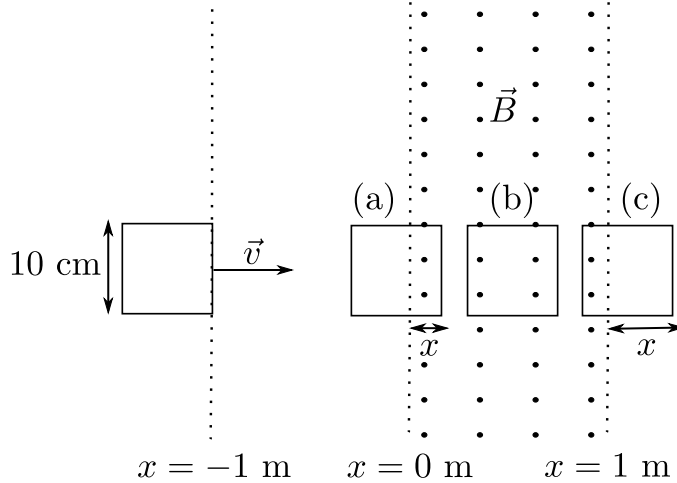
Finalmente para determinar el sentido de la corriente inducida aplicaremos la Ley de Lenz. Dado que el flujo magnético disminuye (la corriente que genera el campo se anula), la corriente inducida debe oponerse a dicha disminución y por lo tanto deberá generar campo magnético hacia dentro del papel. La corriente llevará sentido horario en la espira.

17. Una espira cuadrada conductora de lado $l = 10 \text{ cm}$ y resistencia $0,1 \Omega$ situada en el plano xy se desplaza a velocidad constante $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en dirección creciente del eje x . En la región comprendida entre $x = 0 \text{ m}$ y $x = 1 \text{ m}$ se ha definido un campo magnético $\vec{B} = 0,5\vec{k} \text{ T}$.

- Calcule la corriente inducida en la espira en función de x , si inicialmente el lado más próximo a la zona donde hay campo magnético se encuentra en $x = -1 \text{ m}$.
- Calcule la energía que se ha disipado en la bobina una vez que la espira ha atravesado totalmente la región donde había campo magnético.

Solución

- a) A la hora de resolver el problema lo primero es hacer un dibujo esquemático en el que veamos claramente el planteamiento del problema.



Podemos observar que hasta que la espira no llega a la posición $x = 0$ m se está desplazando por una región en la que no hay campo magnético y por lo tanto, el flujo magnético a través de la espira será nulo. Dicho flujo no varía por el desplazamiento, lo que implica que tanto la f.e.m. inducida como la corriente inducida son nulas. A continuación en el esquema podemos ver tres situaciones marcadas por su importancia en la resolución del problema. La situación (a) representa una posición genérica en la que la espira se encuentra entrando en la región donde hay campo magnético. En este caso el flujo magnético vendrá dado por:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = Blx$$

donde l es el lado de la espira y x es la longitud de la espira que está inmersa en la región en la que hay campo magnético. A continuación, podemos calcular la f.e.m. inducida, simplemente aplicando la regla de la cadena

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} \right| = Blv$$

y por lo tanto la corriente inducida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R} = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 10}{0,1} = 5 \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente debemos observar que el flujo magnético aumenta conforme la espira penetra en la región con campo y por lo tanto la corriente inducida deberá oponerse a este aumento para lo cual generará un campo magnético que se opone al que tenemos en dicha región, es decir, la corriente inducida tendrá un sentido horario.

La situación (b) representa los momentos para los cuales la espira está totalmente sumergida en la región con campo. En esta situación, el flujo magnético permanecerá constante y por lo tanto tanto la f.e.m. inducida como la corriente inducida serán nulas.

Finalmente la situación (c) representa las posiciones para las cuales la espira está saliendo de la región con campo. Podemos proceder de forma análoga al caso (a), teniendo en cuenta que la sección de la espira que permanece en la región con campo magnético será $l(l-x)$. El hecho de que la espira esté saliendo implica que el flujo magnético es cada vez menor y que por lo tanto la corriente inducida llevará sentido antihorario. Dada la simetría entre las situaciones (a) y (c) nos permite no tener que realizar ningún cálculo y finalizar diciendo que la corriente inducida en este caso es $I = 5 \text{ A}$ en sentido antihorario.

- b) La energía únicamente se disipa en las situaciones (a) y (c) puesto que en (b) la corriente inducida es nula. La potencia que se disipa en ambas situaciones es:

$$P = I^2 R = 5^2 \cdot 0,1 = 2,5 \text{ W}$$

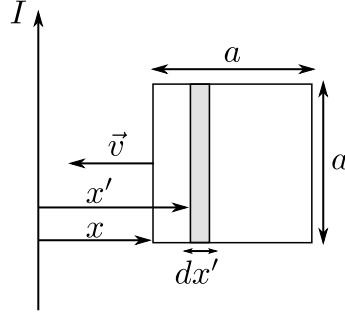
Para calcular la energía disipada debemos multiplicar la potencia, dado que es constante, por el tiempo que tarda la espira en entrar (salir) a la zona en la que está definido el campo magnético.

$$E = 2 \cdot P \Delta t = 2,5 \cdot \frac{0,1}{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

18. Sobre el eje y se extiende un conductor rectilíneo por el que circula una corriente I en sentido positivo de dicho eje. Una espira cuadrada de lado a se encuentra sobre el plano xy de modo que dos de sus lados son paralelos al conductor. Si inicialmente la espira se encuentra en la parte positiva del eje x , calcule el valor de la fuerza electromotriz inducida cuando la espira se desplaza hacia la parte negativa del eje x con una velocidad $\vec{v} = -v\vec{i}$

Solución

Veamos el dibujo esquemático del problema. En este caso supondremos que la espira se encuentra a una distancia x del hilo, y procedemos a calcular el flujo total a través de la espira.



Para ello deberemos utilizar la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito en un punto situado a una distancia x' del propio hilo, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$. Si tomamos como elemento diferencial de superficie la banda oscura marcada en la figura $dS = a dx'$, podemos calcular el flujo aplicando su definición:

$$\phi_m(x) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{x+a}{x}.$$

Una vez que tenemos el flujo magnético, procedemos a calcular su derivada temporal, para lo cual aplicaremos la regla de la cadena $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt}$

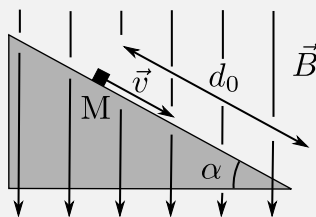
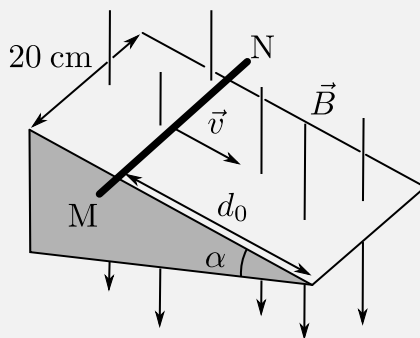
$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left| \frac{d}{dx} \left(\log \frac{x+a}{x} \right) \frac{dx}{dt} \right| = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left| \frac{-a}{x(x+a)} v \right| = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)} v \text{ V} \end{aligned}$$

Nótese que existe un problema cuando la espira llega a tocar el cable en $x = 0$. En este punto el campo diverge y el flujo también.

19. La varilla conductora MN , que tiene una masa de 10 g, baja deslizándose con velocidad constante v sobre los dos carriles conductores paralelos. Dichos carriles distan 20 cm y se cierran por la parte inferior formando un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el plano horizontal. En la región existe un campo magnético uniforme, dirigido verticalmente hacia abajo y de intensidad 1 T. Si la resistencia de los carriles es despreciable y la de la varilla vale $10\ \Omega$. Calcule, en función de la velocidad v de la varilla:

- El flujo magnético a través del circuito.
- La fuerza electromotriz inducida.
- La intensidad de la corriente inducida.
- La fuerza magnética que actúa sobre la varilla.
- Si el coeficiente de rozamiento entre los carriles y la varilla es $\mu = 0,2$ ¿cuánto vale la velocidad v ?

Dato: $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$



Solución

- a) Para calcular el flujo magnético debemos aplicar su definición teniendo en cuenta que el ángulo que forman el campo magnético y el vector superficie es el mismo que el que forma el circuito con el plano horizontal. De este modo:

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

El producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ debe tomar en cuenta el ángulo entre los dos vectores que corresponde al ángulo de inclinación del plano inclinado:

$$\phi_m = B \, 0,2 (d_0 - vt) \cos \alpha = 0,1 \sqrt{3} (d_0 - vt) \text{ Wb}$$

- b) La fuerza electromotriz inducida vendrá dada por:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = 0,1 \sqrt{3} v \text{ V}$$

- c) Para calcular la corriente inducida aplicaremos la Ley de Ohm

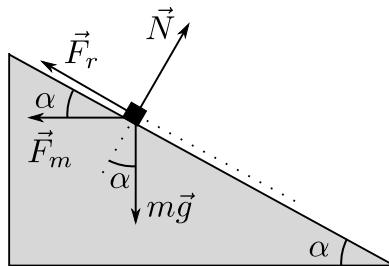
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{0,1 \sqrt{3} v}{10} = 0,01 \sqrt{3} v \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente inducida hay que observar que conforme la varilla desciende el flujo magnético a través de la espira disminuye y por lo tanto la corriente inducida deberá generar un campo magnético con el mismo sentido que el campo existente. De este modo, en la figura inferior la corriente iría hacia dentro del papel en el extremo M de la varilla. El flujo de la corriente compensa la pérdida de flujo de la espira.

- d) Una vez calculada la corriente inducida, obtenemos la fuerza magnética que actúa sobre la varilla. Si observamos el dibujo podemos ver que el sentido de la corriente I y la dirección de $\vec{B}$ son perpendiculares, además, si aplicamos la regla de la mano derecha obtenemos el sentido de la fuerza. En este caso, asumiendo que $\vec{B}$ lleva sentido vertical según $(-\vec{j})$ y que la intensidad, tal y como hemos deducido antes, sale del papel ($\vec{k}$) la fuerza llevará sentido horizontal hacia la izquierda ($-\vec{i}$).

$$\vec{F}_m = l \vec{I} \times \vec{B} = -0,002 \sqrt{3} v \vec{i} \text{ N}$$

- e) Finalmente para calcular la velocidad necesaria para que la varilla descienda con movimiento uniforme, deberemos aplicar la segunda Ley de Newton. Antes de proceder a los cálculos es recomendable realizar un dibujo esquemático en el que se aprecien todas las fuerzas que intervienen.



En el eje perpendicular al plano de la espira las fuerzas que actúan son la normal y las componentes del peso y de la fuerza magnética. Proyectamos esta vez en la dirección del plano, obtenemos:

$$N = mg \cos \alpha + F_m \sin \alpha.$$

En la dirección paralela al plano la fuerza de rozamiento y la componente de la fuerza magnética deben contrarrestar la componente del peso. Matemáticamente obtenemos:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &= F_r + F_m \cos \alpha = \mu N + F_m \cos \alpha = \\ &= \mu mg \cos \alpha + \mu F_m \sin \alpha + F_m \cos \alpha \end{aligned}$$

$$mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 0,002\sqrt{3} v (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$v = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{0,002\sqrt{3} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} = 9,57 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$