

PARTE I

INTRODUCCIÓN GENERAL

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enmarcado en el contexto de la teoría de álgebras, tanto asociativas como no asociativas. En el contexto de las álgebras no asociativas concretizaremos en el estudio de las álgebras de Lie y de los sistemas de Jordan.

En los años 60 del siglo XX, autores como Tits [60], Kantor [45, 46, 47] y Koecher [48, 49] se interesaron en estudiar la conexión existente entre los sistemas Jordan y las álgebras de Lie. Actualmente, la interacción entre ambas teorías sigue generando interés.

Origen y actualidad

En el año 1873 el matemático noruego Sophus Lie, estudiando propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, inició lo que hoy llamamos la Teoría de Lie. Una de las ideas más originales que tuvo fue la introducción de invariantes en el análisis y en la geometría diferencial. Observó que los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales se basaban en que la ecuación era invariante frente a una familia de transformaciones continuas, es decir, al aplicarle dichas transformaciones a una solución de una ecuación diferencial, esta seguía siendo solución de la ecuación original.

El interés de Lie residía en estudiar la familia de transformaciones continuas en n variables, que dependían de m parámetros, y que dejan invariante un sistema diferencial. Resultó que este conjunto de transformaciones continuas era un grupo cerrado para la composición, pero no en un sentido global, ya que las transformaciones no tenían por qué estar definidas globalmente. A raíz de estos estudios se origina lo que conocemos actualmente como *álgebra de Lie*. Este término no fue creado hasta la década de 1930 por Hermann Weyl.

Estas álgebras están íntimamente relacionadas con los grupos de Lie, que ocupan un importante lugar en la geometría contemporánea. En la idea original de Lie la cantidad de parámetros m del grupo de transformaciones no tenía por qué ser finito. En geometría diferencial y en física surgieron aplicaciones importantes de estos grupos de transformaciones continuas para m finito, que ahora conocemos como grupos de Lie de dimensión finita. Existen también trabajos en los que el número de parámetros m es infinito, más generalmente relacionados con la física.

En términos formales, un *álgebra de Lie* L sobre un anillo de escalares Φ (al que se le suele pedir $\frac{1}{2} \in \Phi$ de manera habitual) es un álgebra con producto $[x,$

$y]$, el cual es anticonmutativo y verifica la identidad de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

para todo $x, y, z \in L$.

Toda álgebra asociativa R se convierte en un álgebra de Lie $R^{(-)}$ con el producto $[x, y] = xy - yx$.

Las *álgebras de Jordan* surgieron en los años 30 del siglo XX con el intento de Pascual Jordan, John von Neumann y Eugene Wigner de encontrar una estructura algebraica para la mecánica cuántica esencialmente diferente de las matrices hermitianas.

Una matriz $x \in M_n(\mathbb{C})$ es hermitiana si $x^* := \bar{x}^t = x$. Sabemos que la suma de dos matrices hermitianas es nuevamente una matriz hermitiana y, si consideramos el producto de una matriz hermitiana por un número real, también obtenemos una matriz hermitiana. Sin embargo, si x e y son matrices hermitianas, entonces

$$(xy)^* = y^* x^* = yx$$

no tiene por qué ser igual a xy . En el contexto de la física, xy era una operación «no observable». Por otro lado, las operaciones observables en matrices hermitianas eran

$$\lambda x, \quad x + y, \quad xy + yx, \quad xyx, \quad x^n,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y x e y son matrices hermitianas.

Jordan, von Neumann y Wigner se centraron en las operaciones lineales

$\lambda x, x + y$, y el producto bilineal $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Con este nuevo producto se

tiene que el producto de dos matrices hermitianas, x e y , es nuevamente una matriz hermitiana, ya que

$$(x \bullet y)^* = \left(\frac{1}{2}(xy + yx) \right)^* = \frac{1}{2}(yx + xy) = \frac{1}{2}(xy + yx) = x \bullet y.$$

Además, si consideramos $x^2 = x \bullet x$, entonces

$$2(x \bullet y) \bullet x - x^2 \bullet y = 2\left(\frac{1}{2}(xy + yx) \bullet x\right) - x^2 \bullet y =$$

$$\frac{1}{2}(xyx + yx^2 + x^2y + yxx) - \frac{1}{2}(x^2y + yx^2) = yxx.$$

Así, las operaciones observables x^n , xyx y $xy + yx$ se puede expresar a partir de las operaciones $+$ y $\bullet$.

Con la suma habitual, $+$, y este nuevo producto $\bullet$, las matrices hermitianas forman un álgebra no asociativa que verifican la propiedad conmutativa y la identidad de Jordán, es decir,

$$(x^2 \bullet y) \bullet x = x^2 \bullet (y \bullet x)$$

para matrices hermitianas cualesquiera x e y .

En 1934 se publicó un artículo titulado «On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism» [44], de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner, donde se introduce la noción de *álgebra de Jordán*, aunque tal nombre fue mencionado por primera vez por Albert en 1946.

Un *álgebra de Jordán* es un ϕ -módulo J junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$U : J \rightarrow \text{End}_{\phi}(J) \quad \text{y} \quad (\)^2 : J \rightarrow J$$

verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de J :

$$x^2 \circ y = U_{x,y}(x),$$

$$x \circ U_x(y) = U_x(x \circ y),$$

$$(x^2)^2 = U_x(x^2),$$

$$(U_x(y))^2 = U_x U_y(x^2),$$

$$U_{x^2} = U_x^2 y$$

$$U_{U_x(y)} = U_x U_y U_x$$

para todo $x, y \in J$. donde $x \circ y = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ y $U_{x,z}(y) = (U_{x+z} - U_x - U_z)(y)$ para, todo $x, y, z \in J$ [51, 1.6].

Si $\frac{1}{2} \in \phi$, por [42, 1.4] podremos decir que un álgebra de Jordan es un ϕ -módulo J cuyo producto $\bullet$ es conmutativo y verifica la identidad de Jordan

$$x^2 \bullet (y \bullet x) = (x^2 \bullet y) \bullet x$$

para todo $x, y \in J$.

De la misma forma que un álgebra asociativa R se convierte en un álgebra de Lie $R^{(-)}$, también se tiene que toda álgebra asociativa R se convierte en un álgebra de Jordan $R^{(+)}$ con el producto $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Un álgebra de Jordan se dice *especial* si se puede ver como subálgebra de $R^{(+)}$, para algún álgebra asociativa R . En caso contrario, el álgebra de Jordan se dirá que es *excepcional*. La intención de Jordan, von Neumann y Wigner era, por tanto, encontrar álgebras de Jordan excepcionales con las que modelar el comportamiento de los observables en mecánica cuántica.

En el artículo de 1934 citado anteriormente, los autores probaron que las álgebras de Jordán finito dimensionales formalmente reales eran sumas directas de sistemas simples de los que había solo cinco modelos:

$$H_n(\mathbb{R}), \quad H_n(\mathbb{C}), \quad H_n(\mathbb{H}), \quad H_3(\mathbb{O}), \quad J(Q),$$

donde $H_n(\cdot)$ denota, el conjunto de matrices hermitianas de orden n , $\mathbb{H}$ denota los cuaterniones, $\mathbb{O}$ los octoniones y el producto en $J(Q) = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus V$ viene dado por una forma cuadrática Q definida en el espacio vectorial V con valores en $\mathbb{R}$ de modo que $x \bullet y = Q(x, y) \cdot 1$. Los tres primeros modelos y $J(Q)$ son álgebras de Jordan especiales. En «On a Certain Algebra of Quantum Mechanics» [1], A. A. Albert prueba que $H_3(\mathbb{O})$ es excepcional. Este hallazgo supuso un fracaso en los objetivos iniciales de Jordan, von Neumann y Wigner, ya que en su clasificación la única álgebra de Jordán excepcional era "demasiado pequeña" para la generalización que buscaban.

Más adelante, en 1983, Zelmanov acabó corroborando que, tanto en dimensión finita como infinita, la única álgebra de Jordán simple excepcional era $H_3(\mathbb{O})$. De hecho, E. I. Zelmanov demostró en [61] que si J era un álgebra de Jordan simple sobre un anillo de escalares ϕ , con $\frac{1}{2} \in \phi$, entonces J era isomorfa a una de las siguientes álgebras:

- $R^{(+)}$, donde R es un álgebra asociativa simple,
- $H(R, *) = \{x \in R : x^* = x\}$, donde R es un álgebra asociativa simple con involución $*$.
- $J(Q)$, para una forma cuadrática $Q : V \rightarrow \mathbb{F}$, donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo de característica distinta de 2 y V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con $\dim(V) > 1$,
- $H_3(\mathbb{O})$.

Después de algún tiempo se produjo un abandono del estudio de las álgebras de Jordan por parte de los físicos, dando paso a algebristas como Albert y Jacobson.

Como se puede apreciar, la posibilidad de poder ver un sistema de Jordan dentro de un sistema asociativo se ha considerado desde el comienzo de la Teoría de Jordan. Cabe destacar el hecho de que, a diferencia del caso Jordan, todas las álgebras de Lie sobre cuerpos son especiales (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt [41, 17.3]), en el sentido de poder verse como subálgebra de $R^{(-)}$ para algún álgebra asociativa R .

Los *pares de Jordan* surgieron inicialmente en los trabajos de Meyberg sobre sistemas triples de Jordan, pero fueron estudiados de modo extenso y sistemático por Loos en [51]. Un *par de Jordan* es un par de ϕ -módulos $V = (V^+, V^-)$ junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$Q^\sigma : V^\sigma \rightarrow \text{Hom}_\phi(V^{-\sigma}, V^\sigma)$$

con $\sigma = \pm$, verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de V :

$$\begin{aligned} D^\sigma(x, y)Q_x^\sigma &= Q_x^\sigma D^\sigma(y, x), \\ D^\sigma(Q_x^\sigma(y), y) &= D^\sigma(x, Q_y^{-\sigma}(x))y \\ Q_{Q_x^\sigma(y)}^\sigma &= Q_x^\sigma Q_y^{-\sigma} Q_x^\sigma \end{aligned}$$

para todo $x \in V^\sigma$ y todo $y \in V^{-\sigma}$, donde

$$D^\sigma : V^\sigma \times V^{-\sigma} \rightarrow \text{End}_\phi(V^\sigma)$$

es la aplicación bilineal dada por

$$D^\sigma(x, y)(z) = Q_{x+z}^\sigma(y) - Q_x^\sigma(y) - Q_z^\sigma(y)$$

para, todo $x, z \in V^\sigma$ y para todo $y \in V^{-\sigma}$.

Si $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, por [51, Proposition 2.2] podremos ver un par de Jordan como un par de ϕ -módulos $V = (V^+, V^-)$ dotado con dos aplicaciones trilineales

$$\{ , , \} : V^\sigma \times V^{-\sigma} \times V^\sigma \rightarrow V^\sigma,$$

tales que $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$ y

$$\{x, y, \{u, v, z\}\} - \{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{x, y, u\}, v, z\} - \{u, \{y, x, v\}, z\}$$

para todo $x, z, u \in V^\sigma$ y todo $y, v \in V^{-\sigma}$. donde $\sigma = \pm$.

Un *ideal interno* B de un álgebra de Lie L sobre un anillo de escalares ϕ es un submódulo de L tal que $[B, [B, L]] \subset B$. Se introdujeron por primera vez en 1977 por G. Benkart [12], Benkart sugirió que los ideales internos de las álgebras de Lie podrían ser los análogos en la Teoría de Lie de los ideales unilaterales en el entorno asociativo. Un *ideal interno abeliano* es un ideal interno que también es una subálgebra abeliana de L , es decir, tal que $[B, B] = 0$. Los ideales internos abelianos de un álgebra de Lie están estrechamente relacionados con los elementos ad-nilpotentes de índice tres, esto es, elementos $x \in L$ tales que $\text{ad}_x^3(L) = 0$ y $\text{ad}_x^2(L) \neq 0$, donde $\text{ad}_x(y) = [x, y]$. La existencia de elementos ad-nilpotentes proporciona un criterio elemental para distinguir las álgebras de Lie clásicas del resto. Los ideales internos de las álgebras de Lie clásicas fueron clasificadas por G. Benkart en [11] y su clasificación fue completada en [13] por G. Benkart y A. Fernández López.

Haciendo uso de ideales internos se obtuvo un análogo al teorema de Wedderburn-Artin para álgebras de Lie en [28] y [29]. Los ideales internos de álgebras de Lie simples de dimensión finita se clasificaron en [23], y la clasificación de los ideales internos de las álgebras de Lie simples finitarias se obtuvo en [26]. Destacamos el artículo [5], de A. Baranov y J. Rowley, en el que se caracterizan las álgebras de Lie simples localmente finitas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero en términos de la existencia de ideales internos propios distintos de cero.

En los últimos años, como se anunció en una comunicación presentada por A. M. Cohen en la conferencia «Buildings and Symmetry» celebrada en la Universidad de Western Australia en 2017, los ideales internos de las álgebras de Lie han alcanzado un papel relevante en el estudio de ciertas geometrías relacionadas con grupos algebraicos, recuperando una línea de investigación iniciada en 1973 por J. Faulkner, [24], Como A. M. Cohen menciona en su trabajo [22], «la clasificación explícita de ideales internos en álgebras de Lie simples relacionadas con grupos algebraicos dada en [25] confirma que la noción de ideal interno es muy adecuada para el estudio de grupos algebraicos».

Más evidencia de la utilidad de los ideales internos proviene de [30], donde fue demostrado que un ideal interno abeliano B de longitud finita en un álgebra de Lie no degenerada L sobre un anillo de escalares ϕ , con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, da lugar a una $\mathbb{Z}$ -graduación finita, siendo B un extremo de esta graduación.

Una $\mathbb{Z}$ -filtración $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de un álgebra de Lie L es una cadena de ϕ -submódulos de L

$$\cdots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

tal que $[F_i, F_j] \subset F_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Esta filtración será *acotada* si existen $n, m \in \mathbb{Z}$, con $n < m$, tales que $F_i = 0$ para todo $i \leq n$ y $F_j = L$ para todo $j \geq m$. Las filtraciones asociadas a un solo elemento fueron introducidas por primera vez por O. Loos en 1990 en el contexto de los sistemas de Jordan (ver [52]) de una manera análoga a las nociones asociativas. En 2005, D. Passman estudió $\mathbb{Z}$ -filtraciones acotadas maximales de anillos semisimples Artinianos [58] y, junto con Y. Barnea, describió las filtraciones en álgebras de Lie semisimples en una serie de artículos publicados entre 2006 y 2010, [6] [7] y [59]. Más tarde, en 2012, E. García y M. Gómez Lozano demostraron en [35] que cualquier elemento ad-nilpotente $a \in L$ de índice menor o igual que 3 en un álgebra de Lie L sobre un anillo de escalares ϕ , con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, da lugar a una 5-filtración de L de modo que, al considerar el álgebra de Lie 5-graduada $\hat{L}$ inducida por esta filtración, el par de Jordan asociado a $\hat{L}$ coincide con el par de Jordan asociado al elemento a .

Es bien sabido que una matriz cuadrada sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es similar a una matriz que consta de bloques de Jordan. En [31] los autores estudian un resultado similar para elementos nilpotentes en el zócalo de un álgebra de Jordan no degenerada, demostrando que estos elementos admiten una forma canónica de Jordan. Uno de los principales resultados de ese trabajo fue la caracterización de elementos nilpotentes indecomponibles en el zócalo como elementos nilpotentes de índice n y rango $n - 1$.

Las formas canónicas de elementos nilpotentes en anillos generales, con la condición extra de que todas sus potencias sean regulares von Neumann, han sido objeto de estudio de varios autores. En el libro [57], O'Meara, Clark y Vinsonhaler destacaron la importancia de la forma de Weyr, y caracterizaron la posibilidad de obtener una forma de Weyr de un endomorfismo nilpotente t de un módulo cuasi-proyectivo no nulo P sobre un anillo arbitrario R en términos de la regularidad von Neumann de las potencias de t en el anillo de endomorfismo $\text{End}_R(P)$, [57, Theorem 4.8.2]. En estas circunstancias, el módulo P se descompone como una suma directa de submódulos no nulos, $P = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$, tales que $t(A_1) = 0$ y $t(A_i) = A_{i-1}$ para todo $i = 2, 3, \dots, r$, como podemos ver en [39, Lemma 7.1] o en [10, Lemma 3.5].

Esta descomposición de Weyr de endomorfismos nilpotentes fue utilizada por Beidar, O'Meara y Raphael para obtener la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo [10, Teorema 3.6 (iii)]. En su resultado, demostraron que si R es un álgebra sobre un anillo conmutativo Γ , y $a \in R$ es un elemento nilpotente de índice r tal que todas las potencias de a son regulares von Neumann en R , entonces existen enteros $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s = r$, un elemento $b \in R$ e ideales $I_1, I_2, \dots, I_s$ del anillo Γ tales que $\text{Ann}_r(R) = \cap_j I_j$ y existe un isomorfismo de álgebras

$$\Phi : \Gamma[a, b] \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{n_i}(\Gamma/I_i)$$

tal que cada imagen de a en $M_{n_i}(\Gamma/I_i)$ tiene la forma de un bloque de Jordan.

Objetivos y procedimientos

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero de ellos es dar condiciones sobre un álgebra de Lie L fuertemente prima bajo las cuales el álgebra de Jordan asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual a 3, L_a (ver [27]), es especial. De un modo análogo, daremos condiciones bajo las cuales el subcociente ([30]) asociado a un ideal interno abeliano B de un álgebra de Lie L fuertemente prima es especial. Para probar la especialidad del subcociente construiremos una filtración acotada asociada a B . Esta filtración extiende a la filtración principal inducida por un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual a 3 definida en [35]. Estos resultados se encuentran en los artículos [36] (publicado) y [37] (enviado para su publicación).

El segundo objetivo es dar una forma canónica de Jordán de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario. Para el primer paso en nuestro proceso de inducción, necesitaremos que $a^n = 0$ y a^{n-1} sea regular von Neumann. En este caso, encontramos un idempotente e de R que conmuta con a y tal que eRe es isomorfo a un anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre un anillo unitario. Bajo este isomorfismo,

el elemento ea corresponde a un bloque de Jordan de tamaño máximo en eRe . Si a coincide con ea , entonces diremos que a es un elemento bloque asociado al idempotente bloque e . Demostraremos que todo elemento nilpotente $a \in R$, para el cual todas las potencias de a son regulares von Neumann, se pueden descomponer (respecto a una familia de idempotentes ortogonales que conmuta con a) en una suma finita de elementos bloques nilpotentes de índices decrecientes asociados a esos idempotentes. Estos sumandos son bloques de Jordan, y la suma de estos bloques de Jordan es lo que llamamos la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente. Como consecuencia de la forma canónica de Jordan, recuperamos y ampliamos las descripciones de anillos de índice acotado n dadas en [39]. Por ejemplo, cuando R es primo y a es un elemento nilpotente de índice máximo, con a^{n-1} regular von Neumann, $R \cong M_n(S)$ para un dominio unitario S y, cuando R es indescomponible y von Neumann regular, $R \cong M_n(\Delta)$, donde Δ es un anillo de división. Los resultados de este capítulo se recogen en el artículo [38] (publicado).