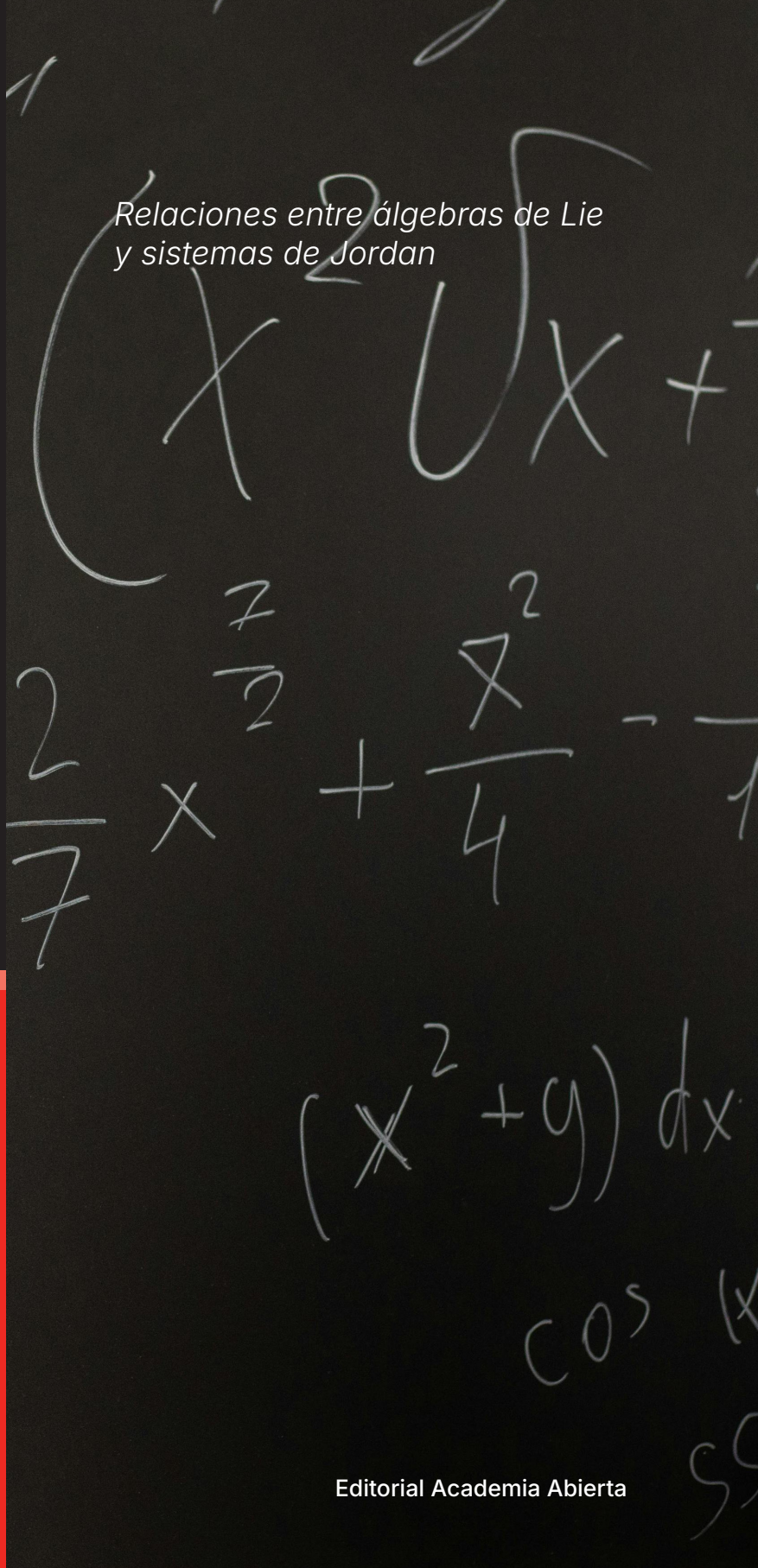
Universidad Rey Juan Carlos

Relaciones entre álgebras de Lie y sistemas de Jordan

Tesis Doctoral



Editorial Academia Abierta

Universidad
Rey Juan Carlos

Tesis doctoral

Relaciones entre álgebras de Lie y sistemas de Jordan

Autor:
Rubén José Muñoz Alcázar

Directores:
Esther García González
Miguel Ángel Gómez Lozano

Programa de Doctorado en Ciencias
Escuela Internacional de Doctorado
2021

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis directores, Esther García González y Miguel Gómez Lozano. Muchas gracias por vuestras enseñanzas y vuestra paciencia, por haberme guiado en el ambiente de las álgebras no asociativas y haber resuelto todas las dudas que os planteaba; por la lectura minuciosa del contenido de este trabajo y por los consejos y sugerencias tanto en su redacción como en su contenido matemático.

Por otra parte, me gustaría agradecer a mis compañeros de trabajo, por el apoyo y los consejos recibidos a lo largo de estos años, así como el inmejorable ambiente de trabajo que me han brindado.

No puedo dejar de agradecer a mis amigos, por su incesante apoyo y comprensión en todo este tiempo, al igual que necesito agradecer a mis padres y a mi familia.

Por último, agradecer a María, mi compañera de viajes desde hace años. Porque estos años de trabajo hubieran sido mucho más duros si no hubiera estado a mi lado.

ÍNDICE GENERAL

PARTE I INTRODUCCIÓN GENERAL **11**

- **Introducción** **13**
  - Origen y actualidad 13
  - Objetivos y procedimientos 20

PARTE II CUERPO DE LA TESIS **23**

- **Organización y estructura** **25**
- **1. Preliminares** **27**
  - 1.1. Nociones básicas 27
  - 1.2. Centroide extendido y clausura central 36
  - 1.3. Algunos conceptos en anillos 39
- **2. Filtración asociada a un ideal interno abeliano** **41**
  - 2.1. La condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ 41
  - 2.2. Filtración asociada a un ideal interno abeliano 52
- **3. Especialidad de sistemas Jordan asociados a álgebras de Lie** **59**
  - 3.1. Especialidad de L_a 59
  - 3.2. Especialidad de $(B, \mathrm{Ker}_L B)$ 65
- **4. Una forma canónica de Jordan para elementos nilpotentes** **75**
  - 4.1. Forma canónica de Jordan 75
- **5. Resultados y métodos** **91**
  - 5.1. Resultados principales 91
  - 5.2. Métodos utilizados 92

PARTE III DISCUSIÓN GENERAL **95**

- **Análisis de los resultados y conclusiones parciales** **97**

PARTE IV CONCLUSIONES GENERALES **101**

- **Principales hallazgos e implicaciones** **103**

BIBLIOGRAFÍA COMÚN **105**

- **Bibliografía** **107**

PARTE I
INTRODUCCIÓN GENERAL

INTRODUCCIÓN

Este trabajo está enmarcado en el contexto de la teoría de álgebras, tanto asociativas como no asociativas. En el contexto de las álgebras no asociativas concretizaremos en el estudio de las álgebras de Lie y de los sistemas de Jordan.

En los años 60 del siglo XX, autores como Tits [60], Kantor [45, 46, 47] y Koecher [48, 49] se interesaron en estudiar la conexión existente entre los sistemas Jordan y las álgebras de Lie. Actualmente, la interacción entre ambas teorías sigue generando interés.

Origen y actualidad

En el año 1873 el matemático noruego Sophus Lie, estudiando propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, inició lo que hoy llamamos la Teoría de Lie. Una de las ideas más originales que tuvo fue la introducción de invariantes en el análisis y en la geometría diferencial. Observó que los métodos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales se basaban en que la ecuación era invariante frente a una familia de transformaciones continuas, es decir, al aplicarle dichas transformaciones a una solución de una ecuación diferencial, esta seguía siendo solución de la ecuación original.

El interés de Lie residía en estudiar la familia de transformaciones continuas en *n* variables, que dependían de *m* parámetros, y que dejan invariante un sistema diferencial. Resultó que este conjunto de transformaciones continuas era un grupo cerrado para la composición, pero no en un sentido global, ya que las transformaciones no tenían por qué estar definidas globalmente. A raíz de estos estudios se origina lo que conocemos actualmente como *álgebra de Lie*. Este término no fue creado hasta la década de 1930 por Hermann Weyl.

Estas álgebras están íntimamente relacionadas con los grupos de Lie, que ocupan un importante lugar en la geometría contemporánea. En la idea original de Lie la cantidad de parámetros *m* del grupo de transformaciones no tenía por qué ser finito. En geometría diferencial y en física surgieron aplicaciones importantes de estos grupos de transformaciones continuas para m finito, que ahora conocemos como grupos de Lie de dimensión finita. Existen también trabajos en los que el número de parámetros m es infinito, más generalmente relacionados con la física.

En términos formales, un *álgebra de Lie L* sobre un anillo de escalares Φ (al que se le suele pedir $\frac{1}{2} \in \phi$ de manera habitual) es un álgebra con producto *[x,*

y], el cual es anticonmutativo y verifica la identidad de Jacobi

$$\Big[x,\Big[y,z\Big]\Big]+\Big[y,\Big[z,x\Big]\Big]+\Big[z,\Big[x,y\Big]\Big]=0,$$

para todo *x, y, z* ∈ *L*.

Toda álgebra asociativa *R* se convierte en un álgebra de Lie $R^{(-)}$ con el producto $[x, y] = xy - yx$.

Las *álgebras de Jordan* surgieron en los años 30 del siglo XX con el intento de Pascual Jordan, John von Neumann y Eugene Wigner de encontrar una estructura algebraica para la mecánica cuántica esencialmente diferente de las matrices hermitianas.

Una matriz $x \in M_n(\mathbb{C})$ es hermitiana si $x^* := \overline{x}^t = x$. Sabemos que la suma de dos matrices hermitianas es nuevamente una matriz hermitiana y, si consideramos el producto de una matriz hermitiana por un número real, también obtenemos una matriz hermitiana. Sin embargo, si *x* e *y* son matrices hermitianas, entonces

$$\big(xy\big)^* = y^*x^* = yx$$

no tiene por qué ser igual a *xy*. En el contexto de la física, *xy* era una operación «no observable». Por otro lado, las operaciones observables en matrices hermitianas eran

$$\lambda x, \quad x+y, \quad xy+yx, \quad xyx, \quad x^n,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y *x* e *y* son matrices hermitianas.

Jordan, von Neumann y Wigner se centraron en las operaciones lineales λx, $x + y$, y el producto bilineal $x \bullet y = \frac{1}{2}\big(xy + yx\big)$. Con este nuevo producto se tiene que el producto de dos matrices hermitianas, *x* e *y*, es nuevamente una matriz hermitiana, ya que

$$\big(x \bullet y\big)^* = \left(\frac{1}{2}\big(xy+yx\big)\right)^* = \frac{1}{2}\big(yx+xy\big) = \frac{1}{2}\big(xy+yx\big) = x \bullet y.$$

Además, si consideramos $x^2 = x \bullet x$, entonces

$$2\left(x \bullet y\right) \bullet x - x^2 \bullet y = 2\left(\frac{1}{2}\left(xy + yx\right) \bullet x\right) - x^2 \bullet y =$$

$$\frac{1}{2}\left(xyx + yx^2 + x^2y + xyx\right) - \frac{1}{2}\left(x^2y + yx^2\right) = xyx.$$

Así, las operaciones observables x^n, xyx y $xy + yx$ se puede expresar a partir de las operaciones + y •.

Con la suma habitual, +, y este nuevó producto •, las matrices hermitianas forman un álgebra no asociativa que verifican la propiedad conmutativa y la identidad de Jordán, es decir,

$$\left(x^2 \bullet y\right) \bullet x = x^2 \bullet \left(y \bullet x\right)$$

para matrices hermitianas cualesquiera x e y.

En 1934 se publicó un artículo titulado «On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism» [44], de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner, donde se introduce la noción de *álgebra de Jordan,* aunque tal nombre fue mencionado por primera vez por Albert en 1946.

Un *álgebra de Jordan* es un ϕ-módulo J junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$U : J \to \mathrm{End}_{\phi}\left(J\right) \qquad y \qquad \left(\ \right)^2 : J \to J$$

verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de J:

$$\begin{aligned}
&x^2 \circ y = U_{x,y}\left(x\right),\\
&x \circ U_x\left(y\right) = U_x\left(x \circ y\right),\\
&\left(x^2\right)^2 = U_x\left(x^2\right),\\
&\left(U_x\left(y\right)\right)^2 = U_x U_y\left(x^2\right),\\
&U_{x^2} = U_x^2, y\\
&U_{U_x(y)} = U_x U_y U_x
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in J$. donde $x \circ y = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ y $U_{x,\,z}\,(y) = (U_{x+z} - U_x - U_z)\,(y)$ para, todo $x, y, z \in J$ [51, 1.6].

Si $\frac{1}{2} \in \phi$, por [42, 1.4] podremos decir que un álgebra de Jordan es un ϕ-módulo J cuyo producto $\bullet$ es conmutativo y verifica la identidad de Jordan

$$x^2 \bullet (y \bullet x) = (x^2 \bullet y) \bullet x$$

para todo $x, y \in J$.

De la misma forma que un álgebra asociativa R se convierte en un álgebra de Lie $R^{(-)}$, también se tiene que toda álgebra asociativa R se convierte en un álgebra de Jordan $R^{(+)}$ con el producto $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$.

Un álgebra de Jordan se dice *especial* si se puede ver como subálgebra de $R^{(+)}$, para algún álgebra asociativa R. En caso contrario, el álgebra de Jordan se dirá que es *excepcional*. La intención de Jordan, von Neumann y Wigner era, por tanto, encontrar álgebras de Jordan excepcionales con las que modelar el comportamiento de los observables en mecánica cuántica.

En el artículo de 1934 citado anteriormente, los autores probaron que las álgebras de Jordán finito dimensionales formalmente reales eran sumas directas de sistemas simples de los que había solo cinco modelos:

$$H_n(\mathbb{R}), \quad H_n(\mathbb{C}), \quad H_n(\mathbb{H}), \quad H_3(\mathbb{O}), \quad J(Q),$$

donde $H_n(\cdot)$ denota, el conjunto de mal rices licrrnitianas de orden n, $\mathbb{H}$ denota los cuaterniones. $\mathbb{O}$ los octoniones y el producto en $J(Q) = \mathbb{R} \cdot 1 \oplus V$ viene dado por una forma cuadrática Q definida en el espacio vectorial V con valores en $\mathbb{R}$ de modo que $x \bullet y = Q(x, y) \cdot 1$. Los tres primeros modelos y $J(Q)$ son álgebras de Jordan especiales. En «On a Certain Algebra of Quantum Mechanics» [1], A. A. Albert prueba que $H_3(\mathbb{O})$ es excepcional. Este hallazgo supuso un fracaso en los objetivos iniciales de Jordan, von Neumann y Wigner, ya que en su clasificación la única álgebra de Jordán excepcional era "demasiado pequeña" para la generalización que buscaban.

Más adelante, en 1983, Zelmanov acabó corroborando que, tanto en dimensión finita como infinita, la única álgebra de Jordán simple excepcional era. $H_3(\mathbb{O})$. De hecho. E. I. Zelmanov demostró en [61] que si J era. un álgebra, de Jordan simple sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2} \in \phi$, entonces J era isomorfa a una de las siguientes álgebras:

- $R^{(+)}$, donde R es un álgebra asociativa simple,
- $H(R, *) = \{x \in R : x^* = x\}$, donde R es un álgebra asociativa simple con involución $*$.
- $J(Q)$, para ana fon na cuadrática $Q : V \to \mathbb{F}$. donde $\mathbb{F}$ es un cuerpo de característica distinta de 2 y V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con dim $(V) > 1$,
- $H_3(\mathbb{O})$.

Después de algún tiempo se produjo un abandono del estudio de las álgebras de Jordan por parte de los físicos, dando paso a algebristas como Albert y Jacobson.

Como se puede apreciar, la posibilidad de poder ver un sistema de Jordan dentro de un sistema asociativo se ha considerado desde el comienzo de la Teoría de Jordan. Cabe destacar el hecho de que, a diferencia del caso Jordan, todas las álgebras de Lie sobre cuerpos son especiales (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt [41, 17.3]), en el sentido de poder verse como subálgebra de $R^{(-)}$ para algún álgebra asociativa R.

Los *pares de Jordan* surgieron inicialmente en los trabajos de Meyberg sobre sistemas triples de Jordan, pero fueron estudiados de modo extenso y sistemático por Loos en [51]. Un *par de Jordan* es un par de ϕ-módulos $V = (V^+, V^-)$ junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$Q^\sigma : V^\sigma \to \mathrm{Hom}_\phi\left(V^{-\sigma}, V^\sigma\right)$$

con $\sigma = \pm$, verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de V:

$$\begin{aligned} &D^\sigma\left(x, y\right)Q_x^\sigma = Q_x^\sigma D^\sigma\left(y, x\right), \\ &D^\sigma\left(Q_x^\sigma\left(y\right), y\right) = D^\sigma\left(x, Q_y^{-\sigma}\left(x\right)\right)\mathrm{y} \\ &Q^\sigma_{Q_x^\sigma(y)} = Q_x^\sigma Q_y^{-\sigma} Q_x^\sigma \end{aligned}$$

para todo $x \in V^\sigma$ y todo $y \in V^{-\sigma}$, donde

$$D^\sigma : V^\sigma \times V^{-\sigma} \to \mathrm{End}_\phi\left(V^\sigma\right)$$

es la aplicación bilineal dada por

$$D^{\sigma}\left(x, y\right)\left(z\right) = Q^{\sigma}_{x+z}\left(y\right) - Q^{\sigma}_{x}\left(y\right) - Q^{\sigma}_{z}\left(y\right)$$

para, todo $x, z \in V^{\sigma}$ y para todo $y \in V^{-\sigma}$.

Si $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, por [51, Proposition 2.2] podremos ver un par de Jordan como un par de ϕ-módulos $V = (V^{+}, V^{-})$ dotado con dos aplicaciones trilineales

$$\left\{ , , \right\} : V^{\sigma} \times V^{-\sigma} \times V^{\sigma} \rightarrow V^{\sigma},$$

tales que $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$ y

$$\left\{x, y, \left\{u, v, z\right\}\right\} - \left\{u, v, \left\{x, y, z\right\}\right\} = \left\{\left\{x, y, u\right\}, v, z\right\} - \left\{u, \left\{y, x, v\right\}, z\right\}$$

para todo $x, z, u \in V^{\sigma}$ y todo $y, v \in V^{-\sigma}$. donde $\sigma = \pm$.

Un *ideal interno B* de un álgebra de Lie L sobre un anillo de escalares ϕ es un submódulo de L tal que $[B, [B, L]] \subset B$. Se introdujeron por primera vez en 1977 por G. Benkart [12], Benkart sugirió que los ideales internos de las álgebras de Lie podrían ser los análogos en la Teoría de Lie de los ideales unilaterales en el entorno asociativo. Un *ideal interno abeliano* es un ideal interno que también es una subálgebra abeliana de L, es decir, tal que $[B, B] = 0$. Los ideales internos abelianos de un álgebra de Lie están estrechamente relacionados con los elementos ad-nilpotentes de índice tres, esto es, elementos $x \in L$ tales que $\mathrm{ad}^{3}_{x}\left(L\right) = 0 \,\mathrm{y}\, \mathrm{ad}^{2}_{x}\left(L\right) \neq 0$, donde $\mathrm{ad}_{x}(y) = [x, y]$. La existencia de elementos ad-nilpotentes proporciona un criterio elemental para distinguir las álgebras de Lie clásicas del resto. Los ideales internos de las álgebras de Lie clásicas fueron clasificadas por G. Benkart en [11] y su clasificación fue completada en [13] por G. Benkart y A. Fernández López.

Haciendo uso de ideales internos se obtuvo un análogo al teorema de Wedderburn-Artin para álgebras de Lie en [28] y [29]. Los ideales internos de álgebras de Lie simples de dimensión finita se clasificaron en [23], y la clasificación de los ideales internos de las álgebras de Lie simples finitarias se obtuvo en [26]. Destacamos el artículo [5], de A. Baranov y J. Rowley, en el que se caracterizan las álgebras de Lie simples localmente finitas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero en términos de la existencia de ideales internos propios distintos de cero.

En los últimos años, como se anunció en una comunicación presentada por A. M. Cohen en la conferencia «Buildings and Symmetry» celebrada en la Universidad de Western Australia en 2017, los ideales internos de las álgebras de Lie han alcanzado un papel relevante en el estudio de ciertas geometrías relacionadas con grupos algebraicos, recuperando una línea de investigación iniciada en 1973 por J. Faulkner, [24], Como A. M. Cohen menciona en su trabajo [22], «la clasificación explícita de ideales internos en álgebras de Lie simples relacionadas con grupos algebraicos dada en [25] confirma que la noción de ideal interno es muy adecuada para el estudio de grupos algebraicos».

Más evidencia de la utilidad de los ideales internos proviene de [30], donde fue demostrado que un ideal interno abeliano B de longitud finita en un álgebra de Lie no degenerada L sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, da lugar a una $\mathbb{Z}$-graduación finita, siendo B un extremo de esta graduación.

Una $\mathbb{Z}$*-filtración* $\{\mathrm{F}_i\}i_{\in\mathbb{Z}}$ de un álgcbra de Lie L es una cadena de ϕ-submódulos de L

$$\cdots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots$$

tal que $[F_i, F_j] \subset F_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Esta filtración será *acotada* si existen $n, m \in \mathrm{Z}$, con $n < m$, tales que $F_i = 0$ para todo $i \leq n$ y $F_j = L$ para todo $j \geq m$. Las filtraciones asociadas a un solo elemento fueron introducidas por primera vez por O. Loos en 1990 en el contexto de los sistemas de Jordan (ver [52]) de una manera análoga a las nociones asociativas. En 2005, D. Passman estudió $\mathbb{Z}$-filtraciones acotadas maximales de anillos semisimples Artinianos [58] y, junto con Y. Barnea, describió las filtraciones en álgebras de Lie semisimples en una serie de artículos publicados entre 2006 y 2010, [6] [7] y [59]. Más tarde, en 2012, E. García y M. Gómez Lozano demostraron en [35] que cualquier elemento ad-nilpotente $a \in L$ de indice menor o igual que 3 en un álgebra de Lie L sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, da lugar a una 5-filtración de L de modo que, al considerar el álgebra de Lie 5-graduada $\hat{L}$ inducida por esta filtración, el par de Jordan asociado a $\hat{L}$ coincide con el par de Jordan asociado al elemento a.

Es bien sabido que una matriz cuadrada sobre un cuerpo algebraicamente cerrado es similar a una matriz que consta de bloques de Jordan. En [31] los autores estudian un resultado similar para elementos nilpotentes en el zócalo de un algebra de Jordan no degenerada, demostrando que estos elementos admiten una forma canónica de Jordan. Uno de los principales resultados de ese trabajo fue la caracterización de elementos nilpotentes indescomponibles en el zócalo como elementos nilpotentes de índice n y rango $n - 1$.

Las formas canónicas de elementos nilpotentes en anillos generales, con la condición extra de que todas sus potencias sean regulares von Neumann, han sido objeto de estudio de varios autores. En el libro [57], O'Meara, Clark y Vinsonhaler destacaron la importancia de la forma de Weyr, y caracterizaron la posibilidad de obtener una forma de Weyr de un endomorfismo nilpotente t de un módulo cuasi-proyectivo no nulo P sobre un anillo arbitrario R en términos de la regularidad von Neumann de las potencias de t en el anillo de endomorfismo $\mathrm{End}_R(P)$, [57, Theorem 4.8.2]. En estas circunstancias, el módulo P se descompone como una suma directa de submódulos no nulos, $P = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$, tales que $t(A_1) = 0$ y $t(A_i) = A_{i-1}$ para todo $i = 2, 3, \ldots, r$, como podemos ver en [39, Lemma 7.1] o en [10, Lemma 3.5].

Esta descomposición de Weyr de endomorfismos nilpotentes fue utilizada por Beidar, O'Meara y Raphael para obtener la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo [10, Teorema 3.6 (iii)]. En su resultado, demostraron que si R es un álgebra sobre un anillo conmutativo Γ, y $a \in R$ es un elemento nilpotente de índice r tal que todas las potencias de a son regulares von Neumann en R, entonces existen enteros $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_s = r$, un elemento $b \in R$ e ideales $I_1, I_2, \ldots, I_s$ del anillo Γ tales que $\mathrm{Ann}_\Gamma(R) = \cap_j I_j$ y existe un isomorfismo de álgebras

$$\Phi : \Gamma\left[a, b\right] \to \prod_{i=1}^{s} M_{ni}\left(\Gamma / I_i\right)$$

tal que cada imagen de a en $M_{ni}(\Gamma/I_i)$ tiene la forma de un bloque de Jordan.

Objetivos y procedimientos

Este trabajo tiene dos objetivos. El primero de ellos es dar condiciones sobre un álgebra de Lie L fuertemente prima bajo las cuales el álgebra de Jordan asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice me ñor o igual a 3, L_a (ver [27]), es especial. De un modo análogo, daremos condiciones bajo las cuales el subcociente ([30]) asociado a un ideal interno abeliano B de un álgebra de Lie L fuertemente prima es especial. Para probar la especialidad del subcociente construiremos una filtración acotada asociada a B. Esta filtración extiende a la filtración principal inducida por un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual a 3 definida en [35]. Estos resultados se encuentran en los artículos [36] (publicado) y [37] (enviado para su publicación).

El segundo obetivo es dar una forma canónica de Jordán de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario. Para el primer paso en nuestro proceso de inducción, necesitaremos que $a^n = 0$ y a^{n-1} sea regular von Neumann. En este caso, encontramos un idempotente e de R que conmuta con a y tal que eRe es isomorfo a mi anillo de matrices de tamaño $n \times n$ sobre mi anillo unitario. Bajo este isomorfismo,

el elemento *ea* corresponde a un bloque de Jordan de tamaño máximo en *eRe.* Si *a* coincide con *ea,* entonces diremos que *a* es un elemento bloque asociado al idempotente bloque *e*. Demostraremos que todo elemento nilpotente $a \in R$, para el cual todas las potencias de *a* son regulares von Neumann, se pueden descomponer (respecto a una familia de idempotentes ortogonales que conmuta con a) en una suma finita de elementos bloques nilpotentes de índices decrecientes asociados a esos idempotentes. Estos sumandos son bloques de Jordan, y la suma de estos bloques de Jordan es lo que llamamos la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente. Como consecuencia de la forma canónica de Jordan, recuperamos y ampliamos las descripciones de anillos de índice acotado *n* dadas en [39]. Por ejemplo, cuando *R* es primo y a es un elemento nilpotente de índice máximo, con a^{n-1} regular von Neumann, $R \cong M_n(S)$ para un dominio unitario *S* y, cuando *R* es indescomponible y von Neumann regular, $R \cong M_n(\Delta)$, donde Δ es un anillo de división. Los resultados de este capítulo se recogen en el artículo [38] (publicado).

PARTE II

CUERPO DE LA TESIS

ORGANIZACIÓN Y ESTRUCTURA

El cuerpo de la tesis consta de cinco capítulos. El primer capítulo está formado por definiciones y resultados conocidos sobre anillos, álgebras asociativas, álgebras de Lie y sistemas de Jordan, que serán utilizados en el resto de capítulos. En este primer capítulo podemos encontrar tres secciones. La primera de ellas está dedicada a las nociones sobre álgebras de Lie y sistemas de Jordan con las que vamos a trabajar en el segundo y tercer capítulo, la segunda sección la dedicaremos a la construcción del centroide extendido y clausura central de álgebras asociativas primas y semiprimas, citando varios resultados que nos serán de ayuda. Por último, en la tercera sección encontraremos conceptos sobre anillos que serán de utilidad para el capítulo cuatro.

En el segundo capítulo nos centraremos en la construcción de una filtración acotada asociada a un ideal interno abeliano B en un álgebra de Lie L. Esta filtración será de gran ayuda para el estudio de la especialidad del subcociente asociado a un ideal interno abeliano, $(B, \mathrm{Ker}_L B)$, que realizaremos en el capítulo tres. Para lograr tal construcción, necesitamos que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ para algún natural n. En la primera sección de este capítulo analizamos esta hipótesis, llegando a la conclusión de que no es tan restrictiva como aparenta, ya que se verifica en las álgebras de Lie más usuales. En la segunda y última sección de este capítulo, construimos la citada filtración acotada inducida por un ideal interno abeliano y analizamos la relación existente entre esta filtración y la asociada por un elemento ad-nilpotente a de índice tres dada en [35, Theorem 1.2], ya que todo elemento ad-nilpotente de índice tres genera el ideal interno abeliano $B = (a)_L = [a, [a, L]] + \phi a$ si L es libre de torsión 3. Este capítulo contiene los resultados del artículo [37], el cual se encuentra enviado para su publicación.

El tercer capítulo está dedicado al estudio de la especialidad de dos sistemas Jordan asociados a un álgebra de Lie L: el álgebra de Jordan L_a asociada a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 y el subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$ asociado a un ideal interno abeliano B. En este capítulo encontraremos dos secciones. En la primera de ellas damos condiciones suficientes para que el álgebra de Jordan L_a asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual que tres dada en [27, Theorem 2.4] sea especial. Para ello, la filtración asociada a este elemento a jugará un papel de suma importancia. En la segunda sección utilizamos la filtración asociada a un ideal interno abeliano B para dar condiciones bajo las cuales el subcociente $(B, \mathrm{Ker}_L B)$ es especial. Estos resultados se encuentran en el artículo publicado [36].

Para el cuarto capítulo cambiamos de ambiente. En este capítulo daremos una nueva demostración de la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario R. Si $a \in R$ es un elemento nilpotente de

índice n y a^{n-1} es regular von Neumann, podemos descomponer $a = ea + (1 - e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$, donde S es un anillo unitario, y $(1 - e)a$ es nilpotente de índice menor que n para un idempotente $e \in R$ tal que $ae = ea$. Este resultado hace posible caracterizar la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente a tal que todas sus potencias sean regulares von Neumann. Además, podremos caracterizar los anillos primos de índice acotado n con un elemento nilpotente $a \in R$ del índice n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann como un anillo de matrices sobre un dominio unitario. El contenido de este capítulo ha sido de gran utilidad para describir los elementos ad-nilpotentes en álgebras de Lie que proceden de álgebras asociativas con involución [20], y su contenido puede encontrarse en el artículo publicado [38].

En el último capítulo sintetizamos los resultados más relevantes de este trabajo, resumiendo los métodos utilizados para llegar a ellos.

CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES

1.1. Nociones básicas sobre álgebras de Lie y sistemas de Jordan

Por un anillo de escalares ϕ entenderemos que ϕ es un anillo asociativo, conmutativo y unitario. Trataremos con álgebras asociativas R, álgebras de Lie L, álgebras de Jordan J y pares de Jordan V sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \in \phi$. Nos referiremos a [43], [3], [56], [51] y [25] para los resultados básicos, notación y terminología sobre álgebras de Lie y sistemas de Jordan. A lo largo de este capítulo vamos a ir introduciendo definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores.

Definición 1.1.1. Un *álgebra de Lie* L sobre un anillo de escalares ϕ es un ϕ-módulo dotado de un producto bilineal $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ anticonmutativo y verificando la identidad de Jacobi, es decir,

$$\Big[x,\big[y,z\big]\Big]+\Big[y,\big[z,x\big]\Big]+\Big[z,\big[x,y\big]\Big]=0$$

para, todo $x, y, z \in L$.

Ejemplo 1.1.2. Sea R un álgebra asociativa sobre un anillo de escalares ϕ cuyo producto denotaremos por yuxtaposición. Entonces el ϕ-módulo R dotado con el producto $[x, y] = xy - yx$ para todo $x, y \in R$ es un álgebra de Lie que denotaremos por $R^{(-)}$. Si R tiene involución $*$, podemos definir el conjunto de los elementos antisimétricos de R,

$$\mathrm{Skew}\big(R,*\big)=\big\{x\in R : x^{*}=-x\big\}.$$

En este caso, se tiene que Skew(R, *) es un subálgebra de Lie de $R^{(-)}$.

Definición 1.1.3. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ y sea $x \in L$.

- Se define la *aplicación adjunta determinada por x,* y la denotaremos por $\mathrm{ad}_x : L \to L$, a la aplicación lineal definida, por $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ para, todo $y \in L$.
- Diremos que x es *ad-nilpotente (en L)* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{ad}_x^n\big(L\big)=0$. En ese caso, se dirá que n es el *índice de ad-nilpotencia de x (sobre L)* si $\mathrm{ad}_x^{n-1}\big(L\big)\neq 0$.

- A un elemento ad-nilpotente $a \in L$ cuyo índice de ad-nilpotencia sea menor o igual a tres lo llamaremos *elemento Jordan.* En este caso, se define el *núcleo de* a como el conjunto $\mathrm{Ker}_L a = \left\{ x \in L : \mathrm{ad}_a^2 \left(x \right) = 0 \right\}$.
- Diremos que $x \in L$ es un *divisor absoluto de cero* si x es un elemento ad-nilpotente en L con índice de ad-nilpotencia menor o igual a dos.
- Se dirá que L es *no degenerada* si L no tiene divisores absolutos de cero no nulos.

Definición 1.1.4. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ.

- Diremos que L es un álgebra de Lie *prima* si $[I, J] \neq 0$ para todo par de ideales no nulos I, J de L.
- Si L es un álgebra de Lie prima y no degenerada, diremos que L es un álgebra de Lie *fuertemente prima*.

Se tiene la siguiente caracterización para álgebras de Lie fuertemente primas ([33, Theorem 1.6]).

Teorema 1.1.5. *Sea L un álgebra de Lie libre de torsión 2 y 3 sobre un anillo de escalares ϕ. Entonces L es fuertemente prima si, y solo si, para todo $x, y \in L$ tales que $[x, [y, L]] = 0$, se tiene que $x = 0$ o $y = 0$.*

Definición 1.1.6. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ y sea B un submódulo de L. Diremos que B es un *ideal interno abeliano* de L si $[B, [B, L]] \subset B$ y $[B, B] = 0$. En ese caso, definimos el núcleo de B como

$$\mathrm{Ker}_L B = \left\{ x \in B : \left[B, \left[B, x \right] \right] = 0 \right\}.$$

Observación 1.1.7. Todo elemento $b \in B$ es un elemento Jordan de L, ya que

$$\mathrm{ad}_b^3 \left(L \right) = \left[b, \left[b, \left[b, L \right] \right] \right] \subset \left[B, B \right] = 0.$$

Ejemplo 1.1.8. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ y sea $a \in L$ un elemento Jordan. Si L es libre de torsión 3, entonces $[a]_L = [a, [a, L]]$ y $(a)_L = [a, [a, L]] + \phi a$ son ideales internos abolianos de L [14, Lemma 1.8]. Además, si L es no degenerada, por [30, Lemma 3.7]

$$\mathrm{Ker}_L a = \mathrm{Ker}_L \left(a \right)_L = \mathrm{Ker}_L \left[a \right]_L .$$

Definición 1.1.9. Sea ϕ un anillo de escalares. Un *álgebra de Jordan* es un ϕ-módulo J junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$U : J \to \mathrm{End}_{\phi}(J) \qquad y \qquad (\ )^2 : J \to J$$

verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de J:

1. $x^2 \circ y = U_{x,y}(x)$,
2. $x \circ U_x(y) = U_x(x \circ y)$,
3. $(x^2)^2 = U_x(x^2)$,
4. $(U_x(y))^2 = U_x U_y(x^2)$,
5. $U_x{}^2 = U^2{}_x$,
6. $U_{Ux(y)} = U_x U_y U_x$

para todo $x, y \in J$, donde $x \circ y = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ - y $U_{x,z}(y) = (U_{x+z} - U_x - U_z)(y)$ para, todo $x, y, z \in J$ [51, 1.6].

Observación 1.1.10. Como vamos a trabajar con anillos de escalares ϕ tales que $\frac{1}{2} \in \phi$, por [42, 1.4] podremos caracterizar un álgebra de Jordan como un ϕ-módulo J dotado con un producto bilineal, que denotaremos por $\bullet$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $x \bullet y = y \bullet x$, y
2. $x^2 \bullet (y \bullet x) = (x^2 \bullet y) \bullet x$

para todo $x, y \in J$, donde $x^2 = x \bullet x$.

Además, para cada $x \in J$, se define la aplicación $U_x : J \to J$ dada por $U_x y = 2x \bullet (x \bullet y) - x^2 \bullet y$ para todo $y \in J$.

Ejemplo 1.1.11. Sea R un álgebra asociativa sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2} \in \phi$. Entonces el ϕ-módulo R dolado con el producto $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ para Todo $x, y \in R$ es un álgebra de Jordan que denotaremos por $R^{(+)}$. Si R tiene involución *, podemos definir el conjunto de los elementos simétricos de R,

$$H(R, *) = \{x \in R : x^* = x\}.$$

En este caso, se tiene que $H(R, *)$ es un subálgebra de Jordan de $R^{(+)}$.

Definición 1.1.12. Sea J un álgebra de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ.

Diremos que J es *especial* si J es un subálgebra del álgebra de Jordan $R^{(+)}$ definido por un álgebra asociativa R sobre ϕ. En otro caso, diremos que J es *excepcional*.

Definición 1.1.13. Sea J un álgebra de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2} \in \phi$.

- Un ϕ-submódulo I de J se dirá que es un *ideal de J* si $I \bullet J \subset I$.
- Sean I, K dos *ideales* de J. Diremos que J es prima, si $I \bullet K = 0$ implica $I = 0$ o $K = 0$.
- Un elemento $x \in J$ se dirá que es *un divisor absoluto de cero* si $U_x J = 0$. Diremos que J es *no degenerada* si no tiene divisores absolutos de cero no nulos.
- Diremos que J es *fuertemente prima* si J es prima y no degenerada.

En [2, Lemma 1.13] aparece la siguiente caracterización para álgebras de Jordan fuertemente primas.

Teorema 1.1.14. *Sea* J *un álgebra de Jordan sobre un anillo de escalares* ϕ. *Entonces J es fuertemente prima si, y solo si, para todo* $x, y \in J$ *tales que* $U_x U_J U_y = 0$, *se tiene que* $x = 0$ *o* $y = 0$.

Teorema 1.1.15. [27, Theorem 2.4] *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares* ϕ *tal que* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ *y sea* $a \in L$ *un elemento Jordan. Entonces L dotado con el producto definido por* $x \bullet y = \frac{1}{2}\left[\left[x, a\right], y\right]$, *para todo* $x, y \in L$, *es un álgebra no asociativa, denotada por* $L^{(a)}$, *tal que:*

1. $\mathrm{Ker}_L a$ *es un ideal de* $L^{(a)}$.

2. $L_a := L^{(a)}/\mathrm{Ker}_L a$ *es un álgebra, de Jordan, cuyo operador U viene dado por*

$$U_{\bar{x}} \bar{y} = \frac{1}{8} \overline{\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_a^2 b},$$

para todo $x, y \in L$, *donde* $\bar{x}$ *denota la clase de equivalencia de x respecto de* $\mathrm{Ker}_L a$.

Definición 1.1.16. Sea ϕ un anillo de escalares. Un *par de Jordan* es un par de ϕ-módulos $V = (V^+, V^-)$ junto con dos aplicaciones cuadráticas

$$Q^{+} : V^{+} \to \mathrm{Hom}_{\phi}\left(V^{-}, V^{+}\right)$$

y

$$Q^{-} : V^{-} \to \mathrm{Hom}_{\phi}\left(V^{+}, V^{-}\right)$$

verificando las siguientes identidades en todas las extensiones por escalares de V:

1. $D^{\sigma}\left(x, y\right)Q_{x}^{\sigma} = Q_{x}^{\sigma}D^{\sigma}\left(y, x\right)$,
2. $D^{\sigma}\left(Q_{x}^{\sigma}\left(y\right), y\right) = D^{\sigma}\left(x, Q_{y}^{-\sigma}\left(x\right)\right)$,
3. $Q^{\sigma}_{Q_{x}^{\sigma}(y)} = Q_{x}^{\sigma}Q_{y}^{-\sigma}Q_{x}^{\sigma}$,

para, todo $x \in V^{\sigma}$ y para todo $y \in V^{-\sigma}$, con $\sigma = \pm$, y donde

$$D^{\sigma} : V^{\sigma} \times V^{-\sigma} \to \mathrm{End}_{\phi}\left(V^{\sigma}\right)$$

es la aplicación bilineal dada por

$$D^{\sigma}\left(x, y\right)\left(z\right) = Q^{\sigma}_{x+z}\left(y\right) - Q_{x}^{\sigma}\left(y\right) - Q_{z}^{\sigma}\left(y\right)$$

para, todo $x, z \in V^{\sigma}$ y para todo $y \in V^{-\sigma}$.

Observación 1.1.17. Como vamos a trabajar con anillos de escalares ϕ tales que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, por [51, Proposition 2.2], vamos a poder caracterizar un par de Jordan como aquellos pares de ϕ-módulos $V = (V^{+}, V^{-})$ dotados con dos aplicaciones trilineales

$$\left\{,,\right\} : V^{+} \times V^{-} \times V^{+} \to V^{+},$$
$$\left\{,,\right\} : V^{-} \times V^{+} \times V^{-} \to V^{-}$$

tales que $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$ y

$$\left\{x, y, \left\{u, v, z\right\}\right\} - \left\{u, v, \left\{x, y, z\right\}\right\} = \left\{\left\{x, y, u\right\}, v, z\right\} - \left\{u, \left\{y, x, v\right\}, z\right\}$$

para, todo $x, z, u \in V^{\sigma}$ y para todo $y, v \in V^{-\sigma}$, con $\sigma = \pm$.

Por ello, de ahora en adelante, las definiciones y resultados sobre pares de Jordan las sustituiremos por sus caracterizaciones equivalentes en función del producto triple

$$\{,,\}: V^{\sigma} \times V^{-\sigma} \times V^{\sigma} \to V^{\sigma},$$

con σ = ±.

Ejemplo 1.1.18. [30, Lemma 3.2 (a)] Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y sea $B \subset L$ un ideal interno abeliano de L. Asociado a B podemos considerar el *subcociente* $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$, que es un par de Jordán con productos

$$\{b_1, \overline{x}, b_2\} = [[b_1, x], b_2] \; y \; \{\overline{x}, b_1, \overline{y}\} = \overline{[[x, b], y]}$$

para, todo $b_1, b_2 \in B$ y para, todo $\overline{x}, \overline{y} \in L/\mathrm{Ker}_L B$, donde $\overline{x} = x + \mathrm{Ker}_L B$, $\overline{y} = y + \mathrm{Ker}_L B$.

En particular, si $a \in L$ es un elemento Jordan, $([a, [a, L]], L/\mathrm{Ker}_L [a]_L)$ y $([a, [a, L]] + \phi a, L/\mathrm{Ker}_L (a)_L)$ son pares de Jordan.

Observación 1.1.19. Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y sea $a \in V^{-\sigma}$, σ = ±. El ϕ-módulo V^{σ} tiene estructura de álgebra de Jordan con el producto dado por $x \bullet y = \frac{1}{2}\{x, a, y\}$ para todo $x, y \in V^{\sigma}$. Esta álgebra de Jordan se denota por $V^{(a)}$ y se denomina el álgebra a-homótopa de V [51, 1.9].

Si L es un álgebra de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y $a \in L$ es un elemento Jordan de L, podemos considerar el par de Jordan $V = ([a, [a, L]] + \phi a, L/\mathrm{Ker}_L (a)_L)$. Entonces $V^{(a)}$ coincide con el álgebra de Jordan L_a con el producto $\overline{x} \bullet \overline{y} = \frac{1}{2}\overline{[[x, a], y]}$ para todo $x, y \in L$ [30, Remark 3.6].

Definición 1.1.20. Sea ϕ un anillo de escalares. Un *par asociativo* $A = (A^+, A^-)$ es un par de ϕ-módulos dotado con dos aplicaciones trilineales

$$\begin{aligned} A^\sigma \times A^{-\sigma} \times A^\sigma &\to A^\sigma \\ (x, y, z) &\mapsto xyz \end{aligned},$$

tales que

$$uv(xyz) = u(vxy)z = (uvx)yz$$

para todo $x, z, u \in A^\sigma$ y para todo $y, v \in A^{-\sigma}$, donde $\sigma = \pm$.

Ejemplo 1.1.21. Sea ϕ un anillo de escalares y sea R un álgebra asociativa sobre ϕ. Entonces $V = (R, R)$ con producto triple dado por xyz para todo $x, y, z \in R$ es un par asociativo.

Ejemplo 1.1.22. Si X e Y son dos ϕ-módulos sobre un anillo de escalares ϕ, entonces el par

$$V = \left(\mathrm{Hom}_\phi(X, Y), \mathrm{Hom}_\phi(Y, X)\right)$$

con el triple producto $f_1g_1f_2$ y $g_1f_1g_2$, para todo $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_\phi(X, Y)$ y para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_\phi(Y, X)$, es un par asociativo.

Observación 1.1.23. Si $A = (A^+, A^-)$ es un par asociativo sobre un anillo de escalares ϕ, entonces el par (A^+, A^-) con producto $Q_x^\sigma(y) = xyx$ para todo $x \in A^\sigma$ y para todo $y \in A^{-\sigma}$, donde $\sigma = \pm$, es un par de Jordan que denotaremos por $V = (A^+, A^-)^{(+)}$.

Si $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, en términos del producto triple tenemos que $V = (A^+, A^-)^{(+)}$ es un par de Jordan con productos

$$\{x, y, z\} = xyz + zyx \; y\{y, x, t\} = yxt + txy$$

para todo $x, z \in A^\sigma$ y todo $y, t \in A^{-\sigma}$, para $\sigma = \pm$.

Definición 1.1.24. Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$.

- Diremos que el par de ϕ-módulos $S = (S^+, S^-)$ es un *subpar* del par de Jordan $V = (V^+, V^-)$ si los nlódulos S^σ son submódulos de V^σ tales que $\{S^\sigma, S^{-\sigma}, S^\sigma\} \subset S^\sigma$, para $\sigma = \pm$.
- Un *ideal* de V es un par de ϕ-módulos $I = (I^+, I^-)$, con $I^\sigma \subset V^\sigma$, tales que
- $\left\{I^\sigma, V^{-\sigma}, V^\sigma\right\} + \left\{V^\sigma, I^{-\sigma}, V^\sigma\right\} \subset I^\sigma$

para $\sigma = \pm$.

- Sea $I = (I^+, I^-)$ un ideal del par de Jordan $V = (V^+, V^-)$. Definimos el *anulador de I* como el par de ϕ-módulos

$$\mathrm{Ann}_V(I) = \left(\mathrm{Ann}_V(I)^+, \mathrm{Ann}_V(I)^-\right)$$

donde $\mathrm{Ann}_V(I)^\sigma$ es el conjunto de todos los elementos $x \in V^\sigma$ tales que

$$\left\{x, I^{-\sigma}, V^\sigma\right\} = \left\{I^\sigma, V^{-\sigma}, x\right\} = 0, \left\{I^{-\sigma}, x, V^{-\sigma}\right\} = 0$$

para $\sigma = \pm$. En este caso, se tiene que $\mathrm{Ann}_V(I)$ es un ideal de V.

- Dados dos pares de Jordan $V = (V^+, V^-)$ y $W = (W^+, W^-)$ sobre el mismo anillo de escalares ϕ, un *homomorfismo* entre V y W es un par de aplicaciones ϕ-lineales, $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$, con $\varphi^\sigma : V^\sigma \to W^\sigma$, para $\sigma = \pm$, tales que

$$\varphi^\sigma\left(\{x, y, z\}\right) = \left\{\varphi^\sigma(x), \varphi^{-\sigma}(y), \varphi^\sigma(z)\right\}$$

para todo $x, z \in V^\sigma$ y para, todo $y \in V^{-\sigma}$, $\sigma = \pm$. Tal y como ocurre en el caso de las álgebras asociativas, se tiene que la imagen de un homomorfismo de pares de Jordan $\varphi : V \to W$ es un subpar de W y el núcleo es un ideal de V.

- Diremos que el par V es *primo* si $\{I^\sigma, J^{-\sigma}, I^\sigma\} = 0$, para $\sigma = \pm$, implica $I = 0$ o $J = 0$ para ideales cualesquiera I, J de V.
- Un par de Jordan V es *no degenerado* si no tiene *divisores absolutos de cero* no nulos, es decir, si para todo $x \in V^\sigma$ tal que $\{x, V^{-\sigma}, x\} = 0$, entonces $x = 0$, donde $\sigma = \pm$. Diremos que V es *fuertemente primo* si V es primo y no degenerado.

Por [2, Lemma 1.10] se tiene la siguiente caracterización para pares de Jordan fuertemente primos.

Teorema 1.1.25. *Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ. Entonces V es fuertemente primo si, y solo si, para todo $x, y \in V^\sigma$ tales que $Q_x^\sigma Q_{V^{-\sigma}}^{-\sigma} Q_y^\sigma = 0$, se tiene que $x = 0$ o $y = 0$ ($\sigma = \pm$).*

Definición 1.1.26. Sea ϕ un anillo de escalares y sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan. Diremos que V es *especial* si V es un subpar del par de Jordan $(A^+, A^-)^{(+)}$ para algún par asociativo $A = (A^+, A^-)$ sobre ϕ.

Ejemplo 1.1.27. [25] Un ejemplo de par de Jordan especial que será relevante en lo que sigue es

$$V = \left(\mathrm{Hom}_{\phi}\left(X, Y\right), \mathrm{Hom}_{\phi}\left(Y, X\right)\right)^{(+)},$$

donde X e Y son dos ϕ-módulos sobre un anillo de escalares ϕ.

Definición 1.1.28. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ. Una $\mathbb{Z}$*-graduación finita* es una $\mathbb{Z}$-graduación no trivial de L tal que el soporte, supp$L$ = $\{m \in \mathbb{Z} : L_m \neq 0\}$, es finito. En este caso

$$L = L_{-n} \oplus L_{-(n-1)} \oplus \ldots \oplus L_0 \oplus \ldots \oplus L_{n-1} \oplus L_n$$

para algún entero positivo $n \in \mathbb{Z}$. Si $L_{-n} + L_n \neq 0$, diremos que esta $\mathbb{Z}$-graduación es una $(2n + 1)$-graduación.

Observación 1.1.29. Si $L = L_{-n} \oplus \ldots \oplus L_n$ es un álgebra de Lie $(2n + 1)$-graduada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, entonces $V = (L_{-n}, L_n)$ es un par de Jordan con productos

$$\left\{x, y, z\right\} = \left[\left[x, y\right], z\right] y \left\{y, x, t\right\} = \left[\left[y, x\right], t\right]$$

para todo $x, z \in L_{-n}$ y para todo $y, t \in L_n$ [62, p. 351]. A este par de Jordan se le denomina *par de Jordan asociado a* L.

Definición 1.1.30. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ. Una $\mathbb{Z}$*-filtración* $\{F_i\}_{i \in Z}$ es una cadena de submódulos de L

$$\ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots$$

tal que $[F_i, F_j] \subset F_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$. Diremos que esta filtración es *acotada* si existen $n, m \in \mathbb{Z}$, con $n < m$, tales que $F_i = 0$ para todo $i \leq n$ y $F_j = L$ para todo $j \geq m$.

Observación 1.1.31. Si $\{F_i\}_{i \in Z}$ es una $\mathbb{Z}$-filtración de un álgebra de Lie L sobre ϕ, podemos considerar el ϕ-módulo

$$\hat{L} = \ldots \oplus \underbrace{F_{i-1} / F_{i-2}}_{\hat{L}_{i-1}} \oplus \underbrace{F_i / F_{i-1}}_{\hat{L}_i} \oplus \underbrace{F_{i+1} / F_i}_{\hat{L}_{i+1}} \oplus \ldots$$

con el producto $\left[\overline{x},\overline{y}\right]=\overline{\left[x,y\right]}\in F_{i+j}/F_{i+j-1}$ para, todo $\overline{x}=x+F_{i-1}\in F_i/F_{i-1}$ y para todo $\overline{y}=y+F_{j-1}\in F_j/F_{j-1}$. De esta, forma, tenemos que $\hat{L}$ tiene estructura de álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduacla sobre ϕ, y se le llama *álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida, por la, $\mathbb{Z}$-filtración* $\left\{F_i\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Ejemplo 1.1.32. [35, Theorem 1.2] Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2},\frac{1}{3}\in\phi$. Sea $a\in L$ un elemento Jordan y consideremos los conjuntos

$$G_i=0,\ i\leq -3,\qquad G_{-2}=\left[a,\left[a,L\right]\right]+\phi a,\qquad G_{-1}=\left[a,\mathrm{Ker}_L a\right]+\phi a,$$
$$G_0=\left\{x\in L:\left[x,a\right]\in\left[a,\left[a,L\right]\right]\right\},\qquad G_1=\mathrm{Ker}_L a,\qquad G_j=L,\ j\geq 2.$$

Así, tenemos que $\{G_i\}i_{\in\mathbb{Z}}$ es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de L. A esta filtración se le denomina *filtración principal de L definida por a.*

1.2. Centroide extendido y clausura central

En esta sección trabajaremos con anillos no necesariamente unitarios. Nos referiremos a [9, Chapter 2] y a [25] para la definición y propiedades sobre el centroide extendido de un anillo semiprimo.

Definición 1.2.1. Un anillo R se dirá que es *semiprimo* si $I^2 \neq 0$ para todo ideal no nulo I de R. Diremos que R es *primo* si $IJ \neq 0$ para, todo par de ideales no nulos I, J de R.

Observación 1.2.2. Se tiene que R es semiprimo si, y solo si, $aRa \neq 0$ para todo elemento no nulo $a \in R$. Análogamente, R es primo si, y solo si, $aRb \neq 0$ para, todo $a, b \in R$, con $a, b \neq 0$.

Definición 1.2.3. Sea R un anillo y sea I un ideal de R.

- Si R tiene involución $*$, se dirá que I es un $*$-*ideal* de R si $y* \in I$ para todo $y \in I$.
- Diremos que R es $*$-*primo* si $IJ \neq 0$ para, todo par de $*$-ideales no nulos I, J de R.
- Se dirá que I es un *ideal primo* de R si R/I es primo.
- Si R tiene involución $*$, se dirá que un $*$-ideal I de R es $*$-*primo* si R/I es $*$-primo.

Observación 1.2.4. Si R es un anillo semiprimo, por [53] y [16] , se tiene que existe una familia de ideales primos, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, tal que $\bigcap_{\alpha\in\Delta} I_\alpha = 0$ y, por tanto, R puede verse como producto subdirecto de anillos primos.

Análogamente, si R es un anillo semiprimo con involución $*$, entonces existe una familia de $*$-ideales $*$-primos, $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, tal que $\bigcap_{\alpha\in\Delta} I_\alpha = 0$ y, por tanto, R puede verse como producto subdirecto de anillos $*$-primos.

Definición 1.2.5. Sea R un anillo y sea I un ideal de R.

- Diremos que I es un *ideal esencial* de R si $I \cap J \neq 0$ para totodo ideal J no nulo de R.
- Si R tiene involucion $*$ e I es un $*$-ideal de R tal que $I \cap J \neq 0$ para todo $*$-ideal no nulo J de R, diremos que I es un *$*$-ideal esencial*.

Definición 1.2.6. Sea R un anillo semiprimo y denotemos por ε al conjunto de los ideales esenciales de R. Si $I, J \in \varepsilon$, entonces $I \cap J, IJ \in \varepsilon$. Consideremos el conjunto

$$\left\{\left(f, I\right): I \in \text{y } f : I_R \to R_R\right\},$$

donde por $f : I_R \to {}_{RR}$ entendemos que f es un homomorfismo de R- módulos por la derecha. Diremos que los pares (f, I) y (g, J) están relacionados, y lo denotaremos por $(f, I) \sim (g, J)$, si existe un ideal esencial $K \subset I \cap J$ tal que $f(x) = g(x)$ para, todo $x \in K$. De esta forma, se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia. Por $[f, I]$ denotaremos a la clase de equivalencia de (f, I).

En estas circunstancias, el conjunto de las clases de equivalencia anterior con las operaciones

$$[f, I] + [g, J] = [f + g, I \cap J], \quad [f, I] \cdot [g, J] = [fg, (I \cap J)^2]$$

tiene estructura de anillo unitario [9, Chapter 2], A este anillo unitario se le denomina *el anillo de cocientes de Martindale por la derecha de R,* y se denota por $Q_m^r\left(R\right)$.

Observación 1.2.7. Nótese que si R es un anillo semiprimo, entonces la aplicación $\varphi : R \to Q_m^r\left(R\right)$. dehiiicla por $\varphi(r) = [\lambda_r, R]$ para, todo $r \in R$, donde $\lambda_r : R \to R$ viene dado por $\lambda_r(x) = rx$ para, todo $x \in R$, es un monomorfismo de anillos, es decir, R puede considerarse subanillo de su anillo de cocientes de Martindale por la derecha. Además, dado cualquier $0 \neq q = \left[f, I\right] \in Q_m^r\left(R\right)$, se tiene que $0 \neq qI \subset R$, con lo que todo subanillo S de $Q_m^r\left(R\right)$ que con tenga a R es semiprimo (primo, si R es un anillo primo), ya que todo ideal no nulo de S tiene intersección no nula con R.

Definición 1.2.8. Sea *R* un anillo semiprimo y sea $Q_m^r(R)$ su anillo de cocientes de Martindale por la derecha. Se define *el anillo simétrico de cocientes de Martindale de R* como el conjunto

$Q_m^s(R) = \{q \in Q_m^r(R) : \exists$ un ideal esencial J de R tal que $qJ + Jq \subset R\}$.

Observación 1.2.9. Como *R* es un anillo semiprimo, entonces $Q_m^s(R)$ es un anillo semiprimo, ya que $Q_m^s(R)$ es un subanillo de $Q_m^r(R)$ que contiene a *R*.
Observación 1.2.10. Si *R* es un anillo semiprimo con involución*, podemos reemplazar el conjunto de ideales esenciales por el conjunto de *-ideales esenciales en la definición del anillo simétrico de cocientes de Martindale. Esta involución puede extenderse de forma única a $Q_m^s(R)$ de la siguiente manera: sea $q = [f, I] \in Q_m^s(R)$, donde *I* en un $*$-ideal esencial de *R* y $f : I_R \to R_R$ es un homomorfismo de *R*-módulos por la derecha. Entonces $q^* = [g, I]$, donde $g(y) := (f(y^*))^*$ para todo $y \in I$ ([8. p. 858-859]).

Definición 1.2.11. Sea *R* un anillo semiprimo y sea $Q_m^s(R)$ su anillo simétrico de cocientes de Martindale. Se define el centroide extendido de *R*, y se denota por *C*(*R*). como el centro de $Q_m^s(R)$.

Definición 1.2.12. Sea *R* un anillo y sea $a \in R$. Se dirá que *a* es *regular von Neumann* si existe $b \in R$ tal que $aba = a$. Si todo elemento de *R* es regular von Neumann, diremos que *R* es *regular von Neumann.*

Teorema 1.2.13. *Sea R un anillo semiprimo. Entonces C*(*R*) *es un anillo asociativo, conmutativo y regular von Neuman ([9, Theorem 2.3.9 (iii)]). En particular, C*(*R*) *no tiene elementos nilpotentes. Además, si R es primo, entonces C*(*R*) *es un cuerpo ([9. p. 70]).*

Definición 1.2.14. Sea *R* un anillo primo con involución $*$. Diremos que $*$ es *de primera especie* si la involución inducida en *C*(*R*) es la identidad. En otro caso, diremos que $*$ es *de segunda, especie.*

Definición 1.2.15. Sea *R* un anillo semiprimo. Se define la *clausura central de R* como $\hat{R} = C(R) + C(R)R$. Diremos que *R* es *centralmente cerrado* si *R* coincide con su clausura central.

Observación 1.2.16. *R* puede verse como subanillo de $\hat{R}$. Así como $\hat{R}$ es un subanillo de $Q_m^s(R)$ que contiene a *R*, entonces $\hat{R}$ es semiprimo.

Por otra parte, cuando *R* tiene involución $*$, podemos extender esta involuón a $\hat{R}$, ya que $*$ puede extenderse a $Q_m^s(R)$ y posteriormente restringirse de $Q_m^s(R)$ a $C(R) = Z(Q_m^s(R))$. Además, si *R* es un anillo primo centralmente cerrado y

libre de torsión 2 con involución $*$ de segunda especie, entonces existe $0 \neq \lambda \in \text{Skew}(C(R), *)$, con lo que $\lambda^2 \neq 0$ tiene in verso en $H(C(R), *)$ y, por tanto,

$$R = H(R, *) \oplus \text{Skew}\ (R, *) = \lambda^2 H(R, *) \oplus \text{Skew}\ (R, *) \subset$$

$$\lambda\text{Skew}\ (R, *) \oplus \text{Skew}(R, *) \subset R,$$

con lo que $R = \lambda\text{Skew}(R, *) \oplus \text{Skew}(R, *)$.

En el caso en el que R sea $*$-primo pero no primo, siempre existe $0 \neq \lambda \in \text{Skew}(C(R), *)$ tal que $R = \lambda\text{Skew}\ (R, *) \oplus \text{Skew}(R, *)$ ya que, en este caso, existe un ideal no nulo I de R tal que $I \cap I^* \neq 0$, por lo que podemos definir un elemento antisimétrico no nulo $\lambda : I \oplus I^* \to R$ en $C(R)$ dado por $\lambda(x + y) = x - y$ para todo $x \in I$ y todo $y \in I^*$ (ver [21, §2.4]).

Aunque hemos trabajado con anillos, los conceptos de centroide extendido y clausura central tienen análogos en álgebras asociativas. Supongamos que R es un álgebra asociativa semiprima sobre un anillo de escalares ϕ. De manera análoga, podemos definir el *álgebra de cocientes de Martindale por la derecha de R, y se denota por* $Q_m^r(R)$, y el *álgebra simétrica de cocientes de Martindale de R*, $Q_m^s(R)$. El *centroide extendido de R* es $C(R) = Z\left(Q_m^s(R)\right)$ y la *clausura central de R* es $\hat{R} = C(R) + C(R)R$. Diremos que el álgebra R es *centralmente cerrada* si R coincide con $\hat{R}$ (ver [25, p. 15], [32] y [55]).

1.3. Algunos conceptos en anillos

Trataremos con anillos R no necesariamente unitarios R. Si R no tiene unidad, por expresiones del tipo $(1 - x)y$, para $x, y - R$, entenderemos $y - xy \in R$. Usaremos como referencia el libro de K. R. Goodearl [39].

Recordemos que un elemento a en un anillo R se dirá que es *regular von Neumann* si existe $b \in R$ tal que $aba = a$. Además, si todo elemento de R es regular von Neumann, diremos que R es *regular von Neumann*.

Definición 1.3.1. Sea R un anillo y sea $a \in R$. Si R tiene unidad, diremos que a es *unit-regular* si existe $b \in R$ invertible tal que $aba = a$.

Definición 1.3.2. Sea R un anillo y sea $a \in R$.

- Diremos que a es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m = 0$.
- Si es a nilpotente. se dirá que el *índice de nilpotcncia de a* es n si $a^n = 0$ y $a^{n-1} \neq 0$. En particular, 0 es nilpotente de índice 1.
- Diremos que a es *nilpotente de índice maximal* si a es nilpotente de índice n y R no tiene elementos nilpotentes de índice mayor que n.

Definición 1.3.3. Sea R un anillo y sean $e, f \in R$.

- Diremos que e es *idempotente* si $e^2 = e$.
- Si e y f son dos idempotentes tales que $ef = fe = 0$. se dirá que e y f son idempotentes ortogonales.

Definición 1.3.4. Diremos que un anillo R es *regular abeliano* si R es regular von Neumann y todo idempotente es central, es decir, si todo idempotente de R está contenido en $Z(R)$, el centro de R.

Observación 1.3.5. Por [39, Theorem 3.2], se tiene que un anillo regular von Neumann R es regular abeliano si, y solo si, R no tiene elementos nilpotentes no nulos.

Definición 1.3.6. Sea R un anillo no necesariamente unitario y sean I, J dos ideales de R. Diremos que R es *indescomponible* (como anillo) si $R = I \oplus J$ implica $I = 0$ y $J = R$. o bien $I = R$ y $J = 0$.

Observación 1.3.7. Si R es un anillo indescomponible, entonces los únicos idempotentes centrales son 0 y 1.

En efecto, si R es indescomponible y $e \in Z(R)$ es un idempotente de R, entonces $R = eR \oplus (1 — e)R$. donde eR y $(1 – e)R$ son ideales de R. Por lo Lauto, o $eR = 0$ y $(1 – e)R = R$, o bien $eR = R$ y $(1 – e)R = 0$. En cualquier caso, se tiene que $e = 0$ o $e = 1$.

CAPÍTULO 2. FILTRACIÓN ASOCIADA A UN IDEAL INTERNO ABELIANO

Sea L un álgebra de Lie y sea B un ideal interno abeliano de L. En este capítulo vamos a demostrar que, cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$, el ideal interno abeliano B induce una filtración acotarla, en L donde B es el primer submódulo no nulo de la filtración. Además, el par de Jordan asociado al álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida por esta filtración coincide con el subcociente determinado por B. Esta filtración extiende a la filtración principal inducida por un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que tres definida en [35]. El contenido de este capítulo está recogido en el artículo [37], el cual se encuentra enviado para su publicación.

2.1. La condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$

Veamos en primer lugar que la condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ se verifica en las álgebras de Lie más usuales.

La siguiente proposición pertenece al artículo publicado [36]. Por el contexto de la sección se ha decidido poner en este capítulo.

Proposición 2.1.1. *Sea R un álgebra asociativa prima centralmente cerrada sobre un anillo de escalares ϕ, tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y sea B un ideal interno abeliano de R^-. Entonces se verifica:*

1. *Para todo $b \in B$, existe un único $\lambda_b \in C(R)$ tal que $(b - \lambda_b)^2 = 0$.*
2. *$B' := \{b - \lambda_b : b \in B\}$ es un ideal intemo abeliano de $R^{(-)}$ tal que $B'\,B' = 0$ y $B'(\mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B)B' = 0$.*
3. *$B* := B + B' RB'$ es un ideal interno abeliano de $R^{(-)}$ tal que $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B*$ coincide con $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B$.*
4. *$[[B*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B], [B*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B] \subset B*$, con lo que tanto $[B*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B]$ como $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B]$ son nilpotentes de índice menor o igual que 3.*

Demostración.

1. Por [19, Theorem 3.2] para todo $b \in B$, existe un único $\lambda_b \in C(R)$ tal que $(b - \lambda_b)^2 = 0$.

2. Para cualquier $b \in B$, consideramos $b' = b - \lambda_b$, donde λ_b es el único elemento de $C(R)$ dado en el punto anterior. Veamos primero que $B'\ B' = 0$. Para todo b, $c \in B$ y todo $x \in R$, tenemos que

$$\left[b', c'\right] = \left[b - \lambda_b, c - \lambda_c\right] = \left[b, c\right] - \left[b, \lambda_c\right] - \left[\lambda_b, c\right] + \left[\lambda_b, \lambda_c\right] = \left[b, c\right],$$

con lo que

$$0 = \left[b, c\right] = \left[b', c'\right] = b', c' - c'b'$$

y

$$0 = \left[c, \left[b, \left[b, x\right]\right]\right] = \left[c', \left[b', \left[b', x\right]\right]\right] = 2\left[c', b'xb'\right] = -2\left(c'b'xb' - b'xb'c'\right).$$

Luego, por [19, Corollary 2.14], existe $\lambda_1 \in C(R)$ tal que $c'b' = \lambda_1\, b'$. Análogamente, existe $\lambda_2 \in C(R)$ tal que $b'c' = \lambda_2 c'$. Por lo tanto,

$$0 = \lambda_1 b'b' = b'\lambda_1 b' = b'c'b' = \lambda_2 c'b'$$

y, como $C(R)$ es un cucrpo, entonces $b'c' = c'b' = 0$.

B' es un submódulo de R, ya que para todo b, $c \in B$, se tiene que

$$\left(b + c - \lambda_b - \lambda_c\right)^2 = \left(b' + c'\right)^2 = b'^2 + b'c' + c'b' + c'^2 = b'^2 + 2b'c' + c'^2 = 0,$$

con lo que $b' + c' = (b + c)' \in B'$. Veamos entonces que $[B', [B', R^-]] \subset B'$. Por una parte, tenemos que

$$\left[b', \left[c', x\right]\right] = \left[b - \lambda_b, \left[c - \lambda_c, x\right]\right] =$$

$$\left[b, \left[c, x\right]\right] - \left[\lambda_b, \left[c, x\right] - \left[b, \left[\lambda_c, x\right]\right] + \left[\lambda_b, \left[\lambda_c, x\right]\right] = \left[b, \left[c, x\right]\right] \in B$$

para todo b, $c \in B$ y para todo $x \in R$. Además, como

$$\left[b', \left[c', x\right]\right] = b'c'x - b'xc' - c'xb' + xb'c'$$

y $B'B' = 0$, entonces $[b', [c', x]]^2 = 0$. con lo que $[b', [c', x]] \in B'$. Por último, si $z \in \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} B$,

$$0=\left[b,\left[c,z\right]\right]=\left[b',\left[c',z\right]\right]=-b'zc'-c'zb'$$

con lo que

$$b'zc'=-c'zb'$$

y, por tanto,

$$0=-\frac{1}{2}\left[c,\left[\left[b,\left[b,x\right]\right],z\right]\right]=-\frac{1}{2}\left[c',\left[\left[b',\left[b',x\right]\right],z\right]\right]=\left[c',\left[b'xb',z\right]\right]=$$
$$-b'xb'zc'-c'zb'xb'=b'xc'zb'+b'zc'xb'.$$

Aplicando de nuevo [19, Corollary 2.14], existe $\mu_1 \in C(R)$ tal que $b'zc'=\mu_1 b'$. Intercambiando los papeles de b' y c' en el argumento anterior, obtenemos que existe $\mu_2 \in C(R)$ tal que $c'zb'=\mu_2 c'$, con lo que $\mu_1 b'=b'zc'=c'zb'=-\mu_2 c'$.

Si b' y c' son linealmente independientes sobre $C(R)$, entonces $b'zc'=0$.

Si por el contrario existe $\alpha \in C(R)$ tal que $c'=ab'$, entonces

$$0=\alpha\left[b,\left[b,z\right]\right]=\alpha\left[b',\left[b',z\right]\right]=\alpha\left(-2b'zb'\right)=$$
$$-2\left(\alpha b'\right)zb'=-2c'zb'=2b'zc',$$

obteniendo de nuevo que $b'zc'=0$, con lo que $B'(\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B)B-=0$.

3. Para todo $b, c \in B$, $b_1', b_2', c_1', c_2' \in B'$ y $x, y, u \in R$ tenemos que

$$\left[b+b_1'xb_2',\left[c+c_1'yc_2',u\right]\right]=\left[b'+b_1'xb_2',\left[c'+c_1'yc_2',u\right]\right]=$$
$$-\left(c'+c_1'yc_2'\right)u\left(b'+b_1'xb_2'\right)-\left(b'+b_1'xb_2'\right)u\left(c'+c_1'yc_2'\right)\in B'RB'$$

lo que implica, que $B*$ es un ideal interno abeliano de R^-.

Ahora, si $z \in \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B$, para todo $b, c \in B$, $b_1', b_2', c_1', c_2' \in B'$, $x, y \in R$,

tenemos que

$$\left[b+b_1'xb_2',\left[c+c_1'yc_2',z\right]\right]=\left[b'+b_1'xb_2',\left[c'+c_1'yc_2',z\right]\right]=0,$$

ya que $B'(\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B)B'=0$ y, por tanto, $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B \subset \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B^*$. La contención $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B^* \subset \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B$ es trivial, ya que $B \subset B^*$.

4. Como $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B = \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B^*$, entonces

$[B^*, [\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B, [B^*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]]] = [[B^*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B], [B^*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]]$.

Sean $b, c \in B^*$ y $u, v \in \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B$. Por 1, para todo $b \in B^*$ existe $\lambda_b \in C(R)$ tal que $b-\lambda_b \in B'+B'RB'$. Para todo $b \in B^*$, denotaremos por b' al elemento $b - \lambda_b \in B' + B'RB'$. Entonces

a) Como $B'B' = 0$ y $B'(\mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B)B' = 0$, tenemos que

$$[[b, u], [c, u]] = [[b', u], [c', u]] =$$

$$b'uc'u-b'u^2c' -ub'c'u + ub'uc' -c'ub'u+c'u^2b' +uc'b'u-uc'ub' =$$

$$b'(-u^2)c' + c'u^2b' \in B^*.$$

b) $2[[b, u], [b, v]] = [b, [b, [u, v]]] \in B^*$.

c) Como

$$2([[b, u], [c, v]] + [[c, u], [b, v]]) =$$

$$[b + c, [b + c, [u, v]]] - 2[b, [b, [u, v]]] - 2[c, [c, [u, v]]] \in B^*$$

por b), entonces

$$[[b, u], [c, v]] - [[b, v], [c, u]] = [[b, u], [c, v]] + [[c, u], [b, v]] \in B^*.$$

d) Usando *a*), tenemos que

$$\Big[\big[b, u\big], \big[c, v\big]\Big]+\Big[\big[b, v\big], \big[c,u\big]\Big] =$$
$$\Big[\big[b, u+v\big], \big[c, u+v\big]\Big]-\Big[\big[b, u\big], \big[c, u\big]\Big]-\Big[\big[b, v\big], \big[c, v\big]\Big] \in B^*.$$

e) Como

$$\Big[\big[b, u\big], \big[c, v\big]\Big]-\Big[\big[b, v\big], \big[c, u\big]\Big] \in B^*$$

y

$$\Big[\big[b, u\big], \big[c, v\big]\Big]+\Big[\big[b, v\big], \big[c, u\big]\Big] \in B^*,$$

entonces $[[b, u], [c, v]] \in B^*$, es decir,

$$\left[\left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], \left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right]\right] \subset B^*.$$

Luego

$$\left[\left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], \left[\left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], \left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right]\right]\right] \subset \left[\left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], B^*\right] = 0$$

y, por tanto

$$\left[\left[B, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], \left[\left[B, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], \left[B, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right]\right]\right] \subset \left[\left[B^*, \mathrm{Ker}_{R(-)}B\right], B^*\right] = 0,$$

ya que $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B] \subset [B^*, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]$. □

Observación 2.1.2. Acabamos de ver que en un álgebra asociativa prima R, centralmente cerrada y sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]$ es nilpotente de índice menor o igual que 3 para todo ideal interno abeliano B de $R^{(-)}$. Podemos extender este resultado a álgebras asociativas semiprimas. De hecho, dado un ideal interno abeliano B de un álgebra asociativa semiprima R, como R es un producto subdirecto de álgebras asociativas primas R_i, B se descompone en un producto subdirecto de ideales internos abelianos B_i de R_i. Para cada i, consideremos la clausura central $\hat{R}_i$, y , extendamos B_i a un ideal interno abeliano $\hat{B}_i = C(R_i)B_i$ de $\hat{R}_i$. Así, tenemos que $\left[\hat{B}_i, \mathrm{Ker}_{\hat{R}_i^{(-)}}\hat{B}_i\right]$ es nilpotente del índice menor o igual que 3 para cada i y, por tanto, $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]$ es nilpotente de índice menor o igual que 3. Luego, se tiene entonces que

$$\left[\left[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B\right], \left[\left[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B\right], \left[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B\right]\right]\right] = 0.$$

Corolario 2.1.3. *Sea R un álgebra asociativa semiprima sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y sea B un ideal interno abeliano de $R^{(-)}$. Entonces*

$[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]$ *es una subálgebra nilpotente de* $R^{(-)}$ *de índice menor o igual que* 3.

Veamos ahora qué ocurre si R es un álgebra asociativa con involución $*$.

Proposición 2.1.4. *Sea R un álgebra asociativa centralmente cerrada, con involución $*$, sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$. Supongamos que R es $*$-prima. Sea $L = \mathrm{Skew}(R, *)$ y sea B un ideal interno abeliano de L. Entonces $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es una subálgebra de L nilpotente de índice n, donde n depende de las siguientes condiciones:*

1. *Si R es $*$-prima pero no es prima, o R es prima y $*$ es de segunda especie, entonces $n \leq 3$.*

2. *Si R es prima y $*$ es de primera especie, entonces $n \leq 4$. En particular, si $[L, L] = 0$, entonces $n = 1$. En otro caso, $b^3 = 0$ para todo $b \in B$ y*

   - *o bien existe $b \in B$ tal que $b^3 = 0$, pero $b^2 \neq 0$. En este caso $n = 2$ y L admite una 3-graduación $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$, con $B = L_{-1}$ y $\mathrm{Ker}_L B = L_{-1} \oplus L_0$,*
   - *o bien $B^2 = 0$ y $n \leq 4$. Si, además, $B(\mathrm{Ker}_L B)B = 0$, entonces $n \leq 3$.*

Demostración.

1. Si R es $*$-prima pero no prima o si es prima y la involución $*$ es de segunda especie, existe un elemento antisimétrico no nulo $\lambda \in C(R)$ tal que $R = \mathrm{Skew}(R, *) \oplus \lambda \mathrm{Skew}(R, *)$. En este caso se tiene que $\hat{B} = B + \lambda B$ es un ideal interno abeliano de $R^{(-)}$ y $\mathrm{Ker}_{R^{(-)}} \hat{B} = \mathrm{Ker}_L B + \lambda \mathrm{Ker}_L B$. Por el teorema anterior, tenemos que $\left[\hat{B}, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} \hat{B}\right]$ es nilpotente de índice menor o igual que 3, con lo que $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente de índice menor o igual que 3 por el punto 4 de la Proposición 2.1.1.

2. Si la involución es de primera especie y $[L, L] = 0$, entonces es obvio que $[B, \mathrm{Ker}_L B] = 0$. Si $[L, L] \neq 0$ entonces, por [17, Proposition 6.2], $b^3 = 0$ para todo $b \in B$.

   - Si existe $b \in B$ tal que $b^2 \neq 0$, entonces B es un ideal interno Clifford de L. Veamos que L es un álgebra de Lie 3-graduada con $L_{-1} = B$. Por [18, Definition 3.1], b es un elemento Clifford de R, b^2 es regular von Neumann de R por [18] y existe $d \in H(R, *)$ tal que $d^2 = 0$, $b^2 d b^2 = b^2$

y $db^2d = d$. Así, se tiene que $e = db^2$ es un $*$-idempotente ortogonal, es decir, $e^2 = e$ y $ee* = 0 = e*e$ (ver [18]) y, por [18, Proposition 3.5], e induce una 3-graduación en L con

$$L_{-1} = k\left((1-e)Le\right),$$
$$L_0 = k\left(e\mathrm{Re}\right) + \left(1-e-e^*\right)L\left(1-e-e^*\right) \text{ y}$$
$$L_1 = k\left(eL\left(1-e\right)\right),$$

donde $\kappa(x) = x - x^*$ para todo $x \in R$. Por [18, Proposition 3.6(4)] $b \in \kappa((1 - e)Le) = L_{-1}$. Por otra parte, el ideal interno abeliano contiene a b, ya que

$$\left[b, \left[b, -\left(bd + db\right)\right]\right] = -\left[b, b^2d + bdb - bdb - db^2\right] =$$
$$-\left(b^3d - bdb^2 - b^2db + db^3\right) = bdb^2 + b^2db = b$$

por [18, Proposition 3.6(3)]. Aplicando [17, Proposition 6.2], $[b, [b, L]]$ es un ideal interno Clifford y un ideal interno abeliano maximal de L por [17, Proposition 5.1(b)]. Luego $[b, [b, L]] = B = L_{-1}$ y, por tanto, $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente con índice n menor o igual que 2. Nótese que $n \neq 1$ ya que, en ese caso,

$$B = \left[b, \left[b, L\right]\right] \subset \left[b, \mathrm{Ker}_L B\right] = 0.$$

Luego $\mathrm{Ker}_L B = L_{-i} \oplus \mathrm{L}_0$ y $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente con índice $n = 2$.

- Si $b^2 = 0$ para, todo $b \in B$ entonces, para todo $b_1, b_2 \in B$.

$$0 = \left(b_1 + b_2\right)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2 + b_2b_1 =$$
$$b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2 = 2b_1b_2$$

ya que $0 = [b_1, b_2] = b_1b_2 - b_2b_1$. Luego

$$B^2 = 0. \tag{1}$$

Por otra parte, para todo $z \in \mathrm{Ker}_L B$,

$$0 = \left[b_1, \left[b_2, z\right]\right] = -b_1zb_2 - b_2zb_1$$

es decir,

$$b_1zb_2 = -b_2zb_1. \tag{2}$$

En particular,

$$bzb = 0 \tag{3}$$

para, todo $b \in B$ y para, todo $z \in \mathrm{Ker}_L B$.

Veamos ahora que $(b_1z_1b_2z_2b_3)R(b_1z_1b_2z_2b_3) = 0$ para todo $b_1, b_2, b_3 \in B$ y todo $z_2, z_2 \in \mathrm{Ker}_L B$. Para, todo $x \in R$ tenemos que

$$\left(b_1z_1b_2z_2b_3\right)x\left(b_1z_1b_2z_2b_3\right) = b_3z_1b_1z_2b_2xb_1z_1b_2z_2b_3 =$$

$$b_3z_1b_1x^*b_2z_2b_1z_1b_2z_2b_3 + b_3z_1b_1\left(z_2b_2x - x^*b_2z_2\right)b_1z_1b_2z_2b_3 \overset{(*)}{=}$$

$$0 - \frac{1}{2}b_3z_1\left[b_1, \left[b_1, z_2b_2x - x^*b_2z_2\right]\right]z_1b_2z_2b_3 =$$

$$-\frac{1}{2}b_3z_1\left[b_1, \left[b_1, z_2b_2x - \left(z_2b_2x\right)^*\right]\right]z_1b_2z_2b_3 \overset{(**)}{=} 0,$$

donde (*) es por ser $b_2z_2b_1z_1b_2 = 0$ por (2) y (3) y (**) ocurre porque $[b_1, [b_1,z_2b_2x - (z_2b_2x)^*]] \in B$, con lo que pe)demos aplicar (2) y (3). Come $(b_1z_1b_2z_2b_3)x(b_1z_1b_2z_2b_3) = 0$ para, todo $x \in R$ y R es prima, entonces

$$b_1z_1b_2z_2b_3 = 0. \tag{4}$$

Queremos ver que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^4 = 0$. Como L es no degenerada por [11, Theorem 2.10] y [34, Proposition 4.6], es suficiente con ver que para todo $b_1, b_2, b_3, b_4 \in B$ y todo $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathrm{Ker}_L B$ se tiene que

$$a := \left[\left[b_1, z_1\right], \left[\left[b_2, z_2\right], \left[\left[b_3, z_3\right], \left[b_4, z_4\right]\right]\right]\right]$$

es un divisor absoluto de cero de L, es decir, $[a, [a, L]] = 0$.

Para todo $u \in L$ se tiene que $[a, [a, u]]$ es una suma de monomios de la forma

$$\left[B_i, Z_i\right]\left[B_j, Z_j\right]\left[B_k, Z_k\right]\left[B_l, Z_l\right]\left[B_m, Z_m\right]\left[B_n, Z_n\right]\left[B_o, Z_o\right]\left[B_p, Z_p\right](u), \tag{5}$$

con $i, j, k, l, m, n, o \in \{1, 2, 3,4\}$, donde las letras mayúsculas denotan aplicaciones adjuntas, es decir, $X = \mathrm{ad}_x$ para todo $x \in R$. Como $[B_p, Z_p](u) = z' \in \mathrm{Ker}_L B$, podemos reducir la expresión de cada monomio en (5) por monomios de la forma

$$\left[B_i, Z_i\right]\left[B_j, Z_j\right]\left[B_k, Z_k\right]\left[B_l, Z_l\right]\left[B_m, Z_m\right]\left[B_n, Z_n\right]\left[B_o, Z_o\right](z'). \tag{6}$$

Expandamos estos corchetes y expresemos (6) como una suma de monomios asociativos. Si dos o más elementos de (B) aparecen juntos, el monomio es cero por (1). Estudiemos el resto de monomios asociativos por separado y demostremos que todos son cero.

1. El monomio empieza y acaba en elementos de $\mathrm{Ker}_L B$

$$z_{j1} b_{i1} z_{j2} b_{i2} \ldots b_{i7} z_{j8}.$$

Este monomio contiene una subcadena de la forma $b_{i_1} z_{i_1} b_{i_2} z_{i_2} b_{i_3}$ y esto es cero por (4).

2. La cadena comienza con un elemento de B y termina con un elemento de $\mathrm{Ker}_L B$ (o viceversa, la cadena comienza con un elemento de $\mathrm{Ker}_L B$ y termina con un elemento de B). Entonces dos elementos de $\mathrm{Ker}_L B$ deben aparecer juntos en la cadena:

$$b_{i1} z_{j1} \cdots b_{ik} z_{jk} z_{jk+1} b_{i_{k+1}} \cdots b_{i_7} z_{j8}$$
$$\left(\mathrm{o} \, z_{j_1} \cdots b_{i_k} z_{j_k} z_{jk+1} b_{i_{k+1}} \cdots z_{j8} b_{i_7} \right).$$

Esto signica que en ambos lados de los dos elementos $z_{jk} z_{jk+1}$ de $\mathrm{Ker}_L B$ aparecen subcadenas de la forma $b_{i_1} z_{i_1} b_{i_2} z_{i_2} b_{i_3}$, con lo que el monomio es cero por (4).

3. La cadena comienza y termina con elementos de B. Tenemos entonces dos posibilidades:

   - Tres elementos de $\mathrm{Ker}_L B$ aparecen juntos:

$$b_{j_1} z_{j_1} \cdots b_{i_k} z_{jk} z_{jk+1} z_{jk+2} b_{i_{k+1}} \cdots z_{j8} b_{i_7}$$

     De nuevo, en ambos lados de los tres elementos de $\mathrm{Ker}_L B$ que están juntos, aparecen subcadenas de la forma $b_{i_1} z_{i_1} b_{i_2} z_{i_2} b_{i_3}$, por lo que el monomio es cero por (4).

   - Dos pares de elementos de $\mathrm{Ker}_L B$ aparecen juntos:

$$b_{j_1} z_{j_1} \cdots b_{i_k} z_{j_k} z_{j_{k+1}} b_{i_{k+1}} \cdots b_{i_r} z_{j_r} z_{j_{r+1}} b_{i_{r+1}} \cdots z_{j8} b_{i_7}.$$

     Entonces, una de las subcadenas de antes, entre o después de los dos pares de elementos de $\mathrm{Ker}_L B$ es de la forma $b_{i_1} z_{i_1} b_{i_2} z_{i_2} b_{i_3}$, y de nuevo el monomio es cero por (4).

Hemos demostrado que todos los posibles monomios en la expansión asociativa de $[a, [a, u]]$ son cero para cada $u \in L$ y, por tanto, $a = 0$. Luego, $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente de índice menor o igual a 4.

Por último, supongamos que $B(\mathrm{Ker}_L B)B = 0$ y veamos entonces que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n = 0$ con $n \leq 3$. Consideremos $\hat{B} := B + RBR$, entonces $\hat{B}$ es un ideal interno abeliano de $R^{(-)}$, ya que

$$\left[\hat{B}, \left[\hat{B}, R\right]\right] = \left[B + BRB, \left[B + BRB, R\right]\right] =$$

$$\left[B + BRB,\ BR - RB + BRBR - RBRB\right] \subset BRB \subset \hat{B}.$$

Además, como $B(\mathrm{Ker}_L B)B = 0$, entonces

$$\left[\hat{B}, \left[\hat{B}, \mathrm{Ker}_L B\right]\right] = \left[B + BRB, \left[B + BRB, \mathrm{Ker}_L B\right]\right] =$$
$$\left[B + BRB,\ B\left(\mathrm{Ker}_L B\right) - \left(\mathrm{Ker}_L B\right)B + BRB\left(\mathrm{Ker}_L B\right) - \left(\mathrm{Ker}_L B\right)BRB\right] = 0,$$

con lo que $\mathrm{Ker}_L B = \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} \hat{B} \cap L$. Aplicando el punto 4 de la Proposicion 2.1.1, $\left[\hat{B}, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}} \hat{B}\right]$ es nilpotente de índice menor o igual que 3 y, por lo tanto, $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es también nilpotente de índice menor o igual que 3.

□

Observación 2.1.5. Como toda álgebra asociativa semiprima R con involución $*$ es producto subdirecto de álgebras asociativas $*$-primas R_i, dado un ideal interno abeliano B de $L = \mathrm{Skew}(R, *)$ podemos considerar las proyecciones B_i de B sobre $L_i = \mathrm{Skew}(R_i, *)$. Sea $\hat{R}_i$ la clausura central de cada R_i y sea $\hat{B}_i = H\left(C\left(R_i\right), *\right)B_i$ el ideal interno abeliano generado por B_i en $\hat{L}_i = \mathrm{Skew}\left(\hat{R}_i, *\right)$. Por el teorema anterior, $\left[\hat{B}_i, \mathrm{Ker}_{\hat{L}_i} \hat{B}_i\right]$ es nilpotente del índice menor o igual a 4, con lo que $[B_i, \mathrm{Ker}_{Li} B_i]$ es nilpotente de índice menor o igual a 4 para cada i. Luego, $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente del índice menor o igual que 4. Así, tenemos entonces que

$$\left[\left[B,\ \mathrm{Ker}_L B\right], \left[\left[B,\ \mathrm{Ker}_L B\right], \left[\left[B,\ \mathrm{Ker}_L B\right], \left[B, \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]\right] = 0.$$

Corolario 2.1.6. *Sea R un álgebra asociativa semiprima con involución ∗ sobre un anillo de escalares ϕ, con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$. *Sea L* = Skew (*R*, ∗) *y sea B un ideal interno abeliano de L. Entonces [B,* $\mathrm{Ker}_L B$*] es una subálgebra nilpotente de L de índice menor o igual que* 4.

Observación 2.1.7. Sea *L* un álgebra de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$. Entonces, para cada ideal interno abeliano no nulo *B* de longitud nita de *L* (es decir, toda cadena de ideales internos propios de *L* contenidos en *B* es acotada), existe una $\mathbb{Z}$-graduación finita $L = L_{-n} \oplus \ldots \oplus L_0 \oplus \ldots \oplus L_n$ tal que $B = L_n$ (esto siempre ocurre, por ejemplo, cuando *L* es no degenerada y de dimensión finita), [30, Corollary 6.2]. Con respecto a esta graduación, $\mathrm{Ker}_L B = L_{-(n-1)} \oplus \ldots \oplus L_0 \oplus \ldots \oplus L_n$, con lo que $[B, \mathrm{Ker}_L B] \subset L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ y, por tanto, $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$.

Observación 2.1.8. Sea *L* un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Para cualquier ideal interno abeliano *B* de *L*, se tiene que $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es localmente nilpotente. De hecho, para todo $b_0, \ldots, b_i, \ldots, b_j, \ldots, b_s \in B$ y todo $k_0, \ldots, k_s \in \mathrm{Ker}_L B$, con $1 < i < j$ y $b_i = b_j$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{[b_i, k_i]} \ldots \mathrm{ad}_{[b_j, k_j]} \ldots \mathrm{ad}_{[b_s, k_s]} \left(\left[b_0, k_0 \right] \right) &\in \left[\left[b_i, \mathrm{Ker}_L b_i \right], \left[b_i, \mathrm{Ker}_L b_i \right] \right] \\ &\subset \left[\left[b_i, \left[b_i, L \right] \right] \subset B, \right. \end{aligned}$$

aplicando la filtraciÓn principal de *L* definida por b_i [35], ya que $[B, \mathrm{Ker}_L B] \subset \mathcal{G}_0$ y $[b_i, \mathrm{Ker}_L B] \subset \mathcal{G}_{-1}$. Por lo tanto,

$$\mathrm{ad}_{[b_1, k_1]} \mathrm{ad}_{[b_i, k_i]} \ldots \mathrm{ad}_{[b_i, k_j]} \ldots \mathrm{ad}_{[b_s, k_s]} \left(\left[b_0, k_0 \right] \right) = 0.$$

Toda subálgebra de $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ finitamente generada está contenida en una subálgebra generada por algún conjunto finito de la forma

$$\left\{ \left[b_1, k_1 \right], \ldots, \left[b_s, k_s \right] \right\}.$$

En cada una de estas subálgebras finitamente generadas, todo producto

$$\mathrm{ad}_{[b_{i1}, k_{i1}]} \cdots \mathrm{ad}_{[b_{it}, k_{it}]} \left(\left[b_{i_0}, k_{i_0} \right] \right)$$

para $b_{i_0},\ldots,b_{i_t} \in \{b_1,\ldots,b_s\}\, y\, k_{i_0},\ldots,k_{i_t} \in \{k_1,\ldots,k_s\}$, con $t \geq s+2$, debe ser cero porque habrá al menos un elemento repetido entre b_{i_2} , ..., b_{i_t} y, según la fórmula anterior, este producto es cero.

Hemos demostrado que cuando *B* es un ideal interno abeliano de un álgebra asociativa semiprima *R* (ver Corolario 2.1.3), cuando *B* es un ideal interno abeliano de los elementos antisimétricos de un álgebra asociativa semiprima con involución (ver Corolario 2.1.6), o cuando *B* es un ideal interno abeliano de longitud finita de un álgebra de Lie no degenerada (ver Observación 2.1.7), la condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ siempre se verifica para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Esto justifica la siguiente conjetura.

Conjetura 2.1.9. *Sea L un álgebra de Lie no degenerada (quizás fuertemente prima o simple) sobre un anillo de escalares ϕ, con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$, *y sea B un ideal interno abeliano de L. Entonces existe,* $n \in \mathbb{N}$. *tal que* $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$.

2.2. Filtración asociada a un ideal interno abeliano

En esta sección construiremos una filtración asociada a un ideal interno abeliano. Si *B* es un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie *L* tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ para algún $n \in \mathbb{N}$. vamos a de mostrar que *B* induce una filtración acotada de *L* empezando en *B* y cuyo penúltimo submódulo coincide con Ker*LB*.

Teorema 2.2.1. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. *Sea B un ideal interno abeliano de L y supongamos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$. *Entonces la cadena, de submódulos de L*

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

donde $F_{-m} := \{0\}$ *y Fm := L para, todo m > n y*

$$
\begin{aligned}
F_{-n} &:= B \\
&\vdots \\
F_{-k} &:= \left[B, \mathrm{Ker}_L B\right]^k + B, \text{ para} k = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
F_0 &:= \left\{x \in L : \left[x, B\right] \subset B\right\} \\
&\vdots \\
F_s &:= ad^{n-s-1}_{[B, \mathrm{Ker}_L B]}\left(\mathrm{Ker}_L B\right) + F_0, \text{ para} s = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
F_n &:= L
\end{aligned}
$$

es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de L. Además, el álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida

$$\hat{L} = \underbrace{F_{-n}}_{\hat{L}_{-n}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{F_n / F_{n-1}}_{\hat{L}_n}$$

tiene como par de Jordan asociado $\left(\hat{L}_{-n},\ \hat{L}_n\right)$ *al subcociente* $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$.

Demostración. Denotemos por $K := \mathrm{Ker}_L B$. Veamos primero que $F_i \subset F_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Claramente $\mathrm{ad}_{[B,K]}[B,K] \subset [B, [K, [B, K]]] \subset [B, K]$, luego $F_{-k} \subset F_{-k+1}$ para todo $k = 2, \ldots, n-1$. Además, $F_{-1} = \left[B, K\right] + B \subset F_0$, ya que $[B, [B, K]] + [B, B] = 0 \in B$. La contención $F_0 \subset F_1$ la tenemos por definición de F_1. Como $[[B, K], K] \subset K$, entonces $\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}(K) \subset \mathrm{ad}^{n-s}_{[B,K]}(K)$ para todo $s = 1, \ldots, n-2$, con lo que $F_s \subset F_{s+1}$ para todo $s = 1, \ldots, n-2$. Por último, $F_{n-1} \subset F_n = L$ y $F_{-n} = B \subset F_{-n+1} = \left[B, K\right]^{n-1} + B$.

Usando la identidad de Jacobi tenemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left[\mathrm{ad}^{k-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right), u\right] \subset ad^k_{[B,K]}(u) \text{para todo } u \in L. \qquad \text{(a)}$$

También se tiene que

$$\left[F_0, K\right] \subset K. \tag{b}$$

Además, dados $x \in F_0$ y $k \in K$, para todos b, $b' \in B$,

$$\left[b, \left[b', \left[x, k\right]\right]\right] = \left[b, \left[\left[b', x\right], k\right]\right] + \left[b, \left[x, \left[b', k\right]\right]\right] =$$
$$\left[\left[b, \left[b'x\right]\right], k\right] + \left[\left[b', x\right], \left[b, k\right]\right] + \left[\left[b, x\right], \left[b', k\right]\right] + \left[x, \left[b, \left[b', k\right]\right]\right] = 0,$$

ya que $[b, x]$, $[b', x] \in B$ y B es abeliano. Por otra parte,

$$\mathrm{ad}^{n-1}_{[B,K]}\left(K\right) \subset F_0 \tag{c}$$

por ser

$$\left[\mathrm{ad}^{n-1}_{[B,K]}\left(K\right), b\right] = \mathrm{ad}^{n-1}_{[B,K]}\left(\left[K, b\right]\right) \subset B$$

para todo $b \in B$.

Veamos ahora que $[F_i, F_j] \subset F_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

1. $\left[F_{-s}, F_{-r}\right] \subset F_{-r-s}$ para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Por (a)

$$\left[F_{-s}, F_{-r}\right] = \left[\mathrm{ad}^{s-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) + B,\ \mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) + B\right] =$$
$$\left[\mathrm{ad}^{s-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right), \mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right)\right] \subset \mathrm{ad}^{s+r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) = F_{-r-s}.$$

2. $\left[F_r, F_0\right] \subset F_r$ para todo $r \in \{-n, \ldots, n\}$ por (b) y la identidad de Jacobi.

3. $\left[F_{-r}, F_s\right] \subset F_{s-r}$ para lodo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Por (a) y (b) leñemos que

$$\left[F_{-r}, F_s\right] = \left[\mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) + B,\ \mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[K\right]\right) + F_0\right] \subset$$
$$\mathrm{ad}^{n-s+r-1}_{[B,K]}\left(\left[K\right]\right) + B + \mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) + \mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right).$$

Distinguiremos tres casos:

- Si $r = s$, por (c)

$$\mathrm{ad}^{n-s+r-1}_{[B,K]}\left(K\right) + B + \mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) + \mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[B, K\right]\right) \subset$$
$$\mathrm{ad}^{n-1}_{[B,K]}\left(K\right) + B + \left[B, K\right] \subset F_0.$$

- Si $r > s$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}^{n-s+r-1}_{[B,K]}(K)+B+\mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)+\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)\subset\\&\mathrm{ad}^{r-s}_{[B,K]}\left(\mathrm{ad}^{n-1}_{[B,K]}(K)\right)+B+\mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)+\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)\subset\\&\mathrm{ad}^{r-s}_{[B,K]}(F_0)+B+\left[B,K\right]^{r}+\left[B,K\right]^{n-s}\subset\left[B,K\right]^{r-s}+B=F_{s-r}.\end{aligned}$$

- Si $r < s$, entonces

$$\mathrm{ad}^{n-s+r-1}_{[B,K]}(K)+B+\mathrm{ad}^{r-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)+\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}\left(\left[B,K\right]\right)\subset F_{s-r}.$$

4. $\left[F_s,F_r\right]\subset F_{r+s}$ para todo $r, s \in \{1, \ldots, n\}$. Aquí distinguiremos dos casos:

- Si $r + s \geq n$, entonces no hay nada que probar, ya que $\left[F_s,F_r\right]\subset F_{r+s}=L$.

- Si $r + s < n$, entonces $2n - 2 - r - s \geq n - 1$. Procederemos por inducción sobre r desde $n - 2$ hasta 1. Si $r = n - 2$, solo necesitamos estudiar $s = 1$.

$$\begin{gathered}\left[F_{n-2},F_1\right]=\left[\mathrm{ad}_{[B,K]}(K)+F_0,\mathrm{ad}^{n-2}_{[B,K]}(K)+F_0\right]\subset\\\left[\mathrm{ad}_{[B,K]}(K),\mathrm{ad}^{n-2}_{[B,K]}(K)\right]+\mathrm{ad}_{[B,K]}(K)+\mathrm{ad}^{n-2}_{[B,K]}(K)+F_0\subset\\K\subset F_{n-1}.\end{gathered}$$

Supongamos que $\left[F_s,F_r\right]\subset F_{r+s}$ para, todo s y veamos que se verifica para $r - 1$:

$$\begin{aligned}&\left[F_{r-1},F_s\right]=\left[\mathrm{ad}^{n-r}_{[B,K]}(K)+F_0,\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}(K)+F_0\right]\subset\\&\left[\mathrm{ad}^{n-r}_{[B,K]}(K),\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}(K)\right]+\mathrm{ad}^{n-r}_{[B,K]}(K)+\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}(K)+F_0\subset\\&\mathrm{ad}_{[B,K]}\left(\left[\mathrm{ad}^{n-r-1}_{[B,K]}(K),\mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B,K]}(K)\right]\right)+\\&\left[\mathrm{ad}^{n-r-1}_{[B,K]}(K),\mathrm{ad}^{n-s}_{[B,K]}(K)\right]+F_{r-1}+F_s\subset\\&\mathrm{ad}_{[B,K]}(F_{r+s})+F_{r+s-1}+F_{r-1}+F_s\subset F_{r+s}.\end{aligned}$$

Por último, como $F_0 \subset K$, entonces $F_{n-1} = K$ y, por tanto, el par Jordan asociado $\left(\hat{L}_{-n},\hat{L}_n\right)$ coincide con el subcocicntc $(B, L/K)$. □

Podemos aplicar ahora este resultado al caso asociativo, con o sin involución.

Corolario 2.2.2. *Sea R un álgebra asociativa semiprima sobre un anillo de escalares ϕ. con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y sea, B un ideal interno abeliano de $R^{(-)}$. Entonces existe, $n \in \mathbb{N}$. con $n \leq 3$, tal que la cadena de submódulos de $R^{(-)}$*

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

con $F_{n-1} = \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B$, $F_{-n} = B$ y $F_n = R(-)$, *es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de $R(-)$.*

Demostración. Como R es un álgebra semiprima sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ entonces, por el Corolario 2.1.3, $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]$ es una subálgebra nilpotente de $R_{(-)}$ de índice $n \leq 3$ y, por tanto, $[B, \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B]^n = 0 \subset B$. Aplicando el teorema anterior tenemos que

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

con $F_{n-1} = \mathrm{Ker}_{R^{(-)}}B$, $F_{-n} = B$ y $F_n = R^{(-)}$, es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de $R^{(-)}$.

□

Corolario 2.2.3. *Sea R un álgebra asociativa semiprima con involución $*$ sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$. Sea $L = \mathrm{Skew}(R, *)$ y sea B un ideal interno abeliano de L. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$, con $n \leq 4$, tal que la cadena de submÓdulos de L*

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

con $F_{n-1} = \mathrm{Ker}_L B$, $F_{-n} = B$ y $F_n = \mathrm{Skew}(R, *)$, es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de L.

Demostración. Como R un álgebra asociativa semiprima con involuciÓn $*$ sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$ entonces, por el Corolario 2.1.6, $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es una subálgebra nilpotente de L de índice $n \leq 4$ y, por tanto, $[B, \mathrm{Ker}_R B]^n = 0 \subset B$. Aplicando el teorema anterior tenemos que

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

con $F_{n-1} = \mathrm{Ker}_{R^-} B$, $F_{-n} = B$ y $F_n = L$, es una $\mathbb{Z}$-filtraciÓn acotada de L.

□

Observación 2.2.4. Recordemos que en [35, Theorem 1.2] se introduce la filtraciÓn principal asociada a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 de un álgebra de Lie. Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ y sea $a \in L$ un elemento Jordan (un elemento tal que $\mathrm{ad}_a^3(L) = 0$). Sea $\mathrm{Ker}_L a = \{x \in L : \mathrm{ad}_a^2(x) = 0\}$ y consideremos los conjuntos

$$G_i = 0, i \leq -3, \qquad G_{-2} = [a, [a, L]] + \phi a, \qquad G_{-1} = [a, \mathrm{Ker}_L a] + \phi a,$$
$$G_0 = \{x \in L : [x, a] \in [a, [a, L]]\}, \qquad G_1 = \mathrm{Ker}_L a, \qquad G_j = L, j \geq 2.$$

Entonces $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una $\mathbb{Z}$-filtración acotada de L, llamada filtración principal de L definida por a.

Por otra parte, todo elemento $a \in L$ ad-nilpotente de índice 3 genera el ideal interno abeliano

$$(a)_L = [a, [a, L]] + \phi a.$$

Como se demuestra en [30, Lemma 3.7], si L es no degenerada, entonces $\mathrm{Ker}_L a = \mathrm{Ker}_L (a)_L$.

Supongamos que L es un álgebra de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Consideremos $B = (a)_L$ y denotemos por $K = \mathrm{Ker}_L a = \mathrm{Ker}_L (a) L$. En este caso, es claro que $[[B, K], [B, K]] \subset B$, ya que

$$[[B, K], [B, K]] = [[G_{-2}, G_1], [G_{-2}, G_1]] \subset [G_{-1}, G_{-1}] \subset G_{-2} = B.$$

Por lo tanto, podemos considerar la $\mathbb{Z}$-filtración acotada $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ asociada al ideal interno abeliano $B = (a)_L$ dada por el Teorema 2.2.1.

Vamos a comparar la filtración asociada al ideal interno abeliano $(a)_L$, $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, *con la filtración principal de L* definida por a:

1. $F_{-2} = (a)_L = G_{-2}$.

2. $F_{-1} = \left[\left(a\right)_L, K\right] + \left(a\right)_L \subset \left[a, K\right] + \phi a = G_{-1}$, ya que para todo $x \in L$ y todo $z \in K$ se tiene que

$$\left[\left[a, \left[a, x\right]\right], z\right] = \left[\left[a, z\right], \left[a, x\right]\right] + \left[a, \left[\left[a, x\right], z\right]\right] = \left[a, \left[\left[a, x\right], z\right]\right] - \left[a, \left[x, \left[a, z\right]\right]\right] \in \left[a, K\right],$$

por ser $[[a, L], K] + [L, [a, K]] \subset K$. Por otra parte, se tiene que

$$G_{-1} = \left[a, K\right] + \phi a \subset \left[\left(a\right)_L, K\right] + \left(a\right)_L = F_{-1},$$

obteniendo así que $F_{-1} = G_{-1}$.

3. $G_0 \subset F_0$ ya que dado $x \in G_0$, se tiene que $[x, a] \in [a, [a, L]] \subset F_{-2}$ y. por tanto,

$$\left[x, \left(a\right)_L\right] = \left[x, \left[a, \left[a, L\right]\right] + \phi a\right] = \left[x, \left[a, \left[a, L\right]\right]\right] + \left[x, \phi a\right] = \left[\left[x, a\right], \left[a, L\right]\right] + \left[a + \left[\left[x, a\right], L\right]\right] + \left[a, \left[a, \left[\left[x, L\right]\right]\right] + \left[x, \phi a\right] \subset \left[\left[a, \left[a, L\right]\right], \left[a, L\right]\right] + \left[a, \left[\left[a, \left[a, L\right]\right], L\right]\right] + \left[a, \left[a, \left[\left[x, L\right]\right]\right] + \left[a, \left[a, L\right]\right] \subset \left[F_{-2}, F_0\right] + \left[F_{-2}, \left[F_{-2}, F_2\right]\right] + F_{-2} \subset F_{-2} = \left(a\right)_L.$$

4. Por construcción. $F_i = G_i$, para $i \geq 1$.

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{array}{ccccccc} F_{-2} & \subset & F_{-1} & \subset & F_0 & \subset F_1 = K & \subset F_2 = L \\ \| & & \| & & \cup & \| & \| \\ G_{-2} & \subset & G_{-1} & \subset & G_0 & \subset G_1 = K & \subset G_2 = L \end{array}$$

y ambas filtraciones coinciden cuando $a \in [a, [a, L]]$.

CAPÍTULO 3. ESPECIALIDAD DE SISTEMAS JORDAN ASOCIADOS A ÁLGEBRAS DE LIE

En [27] A. Fernández López, E. García, y M. Gómez Lozano construyen álgebras de Jordan asociadas a elementos ad-nilpotentes de índice menor o igual a tres de un álgebra de Lie. En este capítulo estudiaremos condiciones sobre la propia estructura de las álgebras de Lie que implican la especialidad de estas álgebras de Jordan. Se obtienen resultados similares cuando tratamos con subcocientes asociados a ideales internos abelianos.

3.1. Especialidad de las álgebras de Jordan de un álgebra de Lie

En esta sección daremos una condición suficiente para la especialidad del álgebra de Jordan L_a en un ciernen.to de Jordan *a.* Aunque L_a es un álgebra de Jordan, la condición para su especialidad será una condición de Lie: $[\mathrm{Ker}_L a, \mathrm{Ker}_L a] \not\subset \mathrm{Ker}_L a$. Se ha decidido separar ambas secciones a pesar de que esta sección es un caso particular de la siguiente, ya que la especialidad del álgebra de Lie L_a tiene interés en sí mismo y es habitual en la literatura separar este caso del caso del subcociente $([a, [a, L]] + \phi a, L/\mathrm{Ker}_L(a)_L)$. Los resultados de este capítulo aparecen en el artículo publicado [36].

Lema 3.1.1. *Sea* $L = L_{-n} \oplus \ldots \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ *un álgebra de Lie* $(2n + 1)$*-graduada sobre un anillo de escalares* ϕ*, con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$*. Entonces el par* $V := (L_{-n}, L_n)$ *con productos*

$$\{x, y, z\} = [[x, y], z] \; y \; \{y, x, t\} = [[y, x], t]$$

para todo $x, z \in L_{-n}$ *y para todo* $y, t \in L_n$ *es un par de Jordan. Además, para cualquier* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*, el par de aplicaciones lineales*

$$(\Psi_i, \Psi_{-i}) : (L_{-n}, L_n) \to (\mathrm{Hom}(L_i, L_{i-n}), \mathrm{Hom}(L_{i-n}, L_i))^{(+)},$$

definidas por $\Psi_{\sigma i}(x)(y) = \mathrm{ad}_x(y)$ *para, todo* $x \in L_{-\sigma n}$ *y todo* $y \in L_i$*. si* $\sigma = +$*, o* $y \in L_{i-n}$*, si* $\sigma = -$*, es un homomorfismo dc pares de Jordan entre V y el par de Jordan especial* $(\mathrm{Hom}(L_i, L_{i-n}), \mathrm{Hom}(L_{i-n}, L_i))^{(+)}$.

Demostración. Tenemos que *V* es un par de Jordan por [62, p. 351]. Además, como se menciona en la demostración de [25, Theorem 11.34], es fácil ver que

$$\left(\Psi_i, \Psi_{-i}\right): \left(L_{-n}, L_n\right) \to \left(\mathrm{Hom}\left(L_i, L_{i-n}\right), \mathrm{Hom}\left(L_i - n, L_i\right)\right)^{(+)}$$

es un homomorfismo entre pares de Jordan para todo $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Añadiremos la demostración por completitud.

Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ y sean $x, z \in L_{-n}$, $y, t \in L_n$, $u \in L_i$, $v \in L_{i-n}$. Entonces

$$\Psi_i (\{x, y, z\}) (u) = \mathrm{ad}_{[[x, y], z]}(u) = [[[x, y], z], u] =$$

$$[[[x, u], y], z] + [[x, [y, u]], z] + [[x, y], [z], u]] =$$

$$[z, [y, [x, u]]] + 0 + [[x, [z, u]], y] + [x, [y, [z, u]]] =$$

$$(\Psi_i(x)\Psi_{-i}(y)\Psi_i(z) + \Psi_i(z)\Psi_{-i}(y)\Psi_i(x))(u) = \Psi_{i(x)}, \Psi_{-i(y)}, \Psi_{i(z)}\} (u),$$

ya que $[y, u] = 0$ y $[x, [z, u]] = 0$. Análogamente,

$$\Psi_{-i} (\{y, x, t\}) (v) = \mathrm{ad}_{[[y, x], t]}(v) = [[[y, x], t], v] =$$

$$[[[y, v], x], t] + [[y, [x, v]], t] + [[y, x], [t,v]] =$$

$$[t, [x, [y, v]]] + 0 + [[y, [t, v]], x] + [y, [x, [t, v]]] =$$

$$(\Psi_i(y)\Psi_{-i}(x)\Psi_i(t) + \Psi_i(t)\Psi_{-i}(x)\Psi_i(y))(t) = \{\Psi_i(y), \Psi_{-i}(x), \Psi_i(t)\} (v),$$

por ser $[x,v] = 0$ y $[y, [t, v]] = 0$.

Luego $(\Psi i, \Psi_{-i})$ es un homomorfismo de pares de Jordan. □

Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Sea $a \in L$ un elemento Jordan y consideremos la filtración principal de L definida por a :

$$G_i = 0,\ i \le -3, \qquad G_{-2} = \left[a, \left[a, L\right]\right] + \phi a, \qquad G_{-1} = \left[a,\ \mathrm{Ker}_L a\right] + \phi a,$$
$$G_0 = \left\{x \in L : \left[x, a\right] \in \left[a, \left[a, L\right]\right]\right\}, \qquad G_1 = \mathrm{Ker}_L a, \qquad G_j = L,\ j \ge 2.$$

Así, tenemos que

$$\hat{L} = G_{-2} \oplus G_{-1} / G_{-2} \oplus G_0 / G_{-1} \oplus G_1 / G_0 \oplus G_2 / G_1$$

es un álgebra de Lie 5-graduada [35, 1.4]. En particular, $V = \left(G_{-2}, G_2/G_1\right)$ es el par de Jordan asociado a $\hat{L}$.

Lema 3.1.2. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. *Sea a ∈ L un elemento Jordan y consideremos la filtración principal de L definida por a,* $\{G_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. *Entonces, el par de aplicaciones*

$$\Psi_1 : G_{-2} \to \mathrm{Hom}\left(G_1/G_0, G_{-1}/G_{-2}\right)$$

$$\Psi_{-1} : G_2/G_1 \to \mathrm{Hom}\left(G_{-1}/G_{-2}, G_1/G_0\right)$$

definidas por $\Psi_1(b) = \mathrm{ad}_b$ *para todo b ∈ [a, [a, L]] + φa, y* $\Psi_{-1}(\bar{x}) = ad_{\bar{x}}$ *para todo* $\bar{x} \in L/\mathrm{Ker}_L a$, *es un homomorfismo de pares de Jordan entre V = (*G_{-2}, G_2/G_1*) y el par de Jordan especial*

$$\left(\mathrm{Hom}\left(G_1/G_0, G_{-1}/G_{-2}\right), \mathrm{Hom}\left(G_{-1}/G_{-2}, G_1/G_0\right)\right)^{(+)}$$

Demostración. Consideremos el álgebra de Lie graduada

$$\hat{L} = G_{-2} \oplus G_{-1}/G_{-2} \oplus G_0/G_{-1} \oplus G_1/G_0 \oplus G_2/G_1.$$

Las aplicaciones Ψ_1 y Ψ_{-1} están bien definidasy (Ψ_1, Ψ_{-1}) es un liomomor-fismo de pares de Jordan entre $V = (G_{-2}, G_2/G_1)$ *y* el par de Jordan especial

$$\left(\mathrm{Hom}\left(G_1/G_0, G_{-1}/G_{-2}\right), \mathrm{Hom}\left(G_{-1}/G_{-2}, G_1/G_0\right)\right)^{(+)}$$

por el lema anterior. □

Proposición 3.1.3. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares φ, con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ *y sea a ∈ L un elemento Jordan. Entonces el par*

$$I = \left(I^+, I^-\right) = \left(\left[a, \left[a, \left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right],\ \overline{\left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]}\right)$$

es un ideal del par de Jordan V = (V^+ V^-*) = ([a, [a, L]] + φa, L/*Ker_La*). Además, si L es no degenerada.*

$$\left(\mathrm{Ker}\Psi_1, \mathrm{Ker}\Psi_{-1}\right) \subset \mathrm{Ann}_V\left(\mathrm{I}\right).$$

Demostración. Veamos que *I* = (I^+ , I^-) es un i deal de *V*. Para todo z_1, $z_2 \in$ $\mathrm{Ker}_L a$, todo *x, y ∈ L* y todo λ ∈ *φ*, usando la identidad de Jacobi y teniendo en cuenta las propiedades de la filtración principal de *L* definida por *a,* tenemos

que

$$\Big[\Big[\Big[a,\big[a,\big[z_1,z_2\big]\big]\Big],x\Big],\big[a,\big[a,y\big]\big]+\lambda a\Big]\in\Big[\Big[\Big[a,\big[a,\big[z_1,z_2\big]\big]\Big],\mathcal{G}_2\Big],\mathcal{G}_{-2}\Big]\subset$$
$$\Big[\Big[a,\big[a,\big[z_1,z_2\big]\big]\Big],\big[\mathcal{G}_2,\mathcal{G}_{-2}\big]\Big]\subset\Big[\Big[a,\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big],\mathcal{G}_0\Big]\subset$$
$$\Big[\big[a,\mathcal{G}_0\big],\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]+\Big[a,\big[\big[a,\mathcal{G}_0\big],\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]+\Big[a,\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]\subset$$
$$\Big[\mathcal{G}_{-2},\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]+\Big[a,\big[\mathcal{G}_{-2},\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]+\Big[a,\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]\subset$$
$$\Big[a,\big[\mathcal{G}_{-1},\mathcal{G}_1\big]\big]+\Big[a,\big[a,\big[\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_1\big]\big]\Big]\subset\big[\mathcal{G}_{-1},\mathcal{G}_{-1}\big]=$$
$$\Big[\big[a,Ker_La\big]+\Phi a,\big[a,Ker_La\big]+\Phi a\Big]\subset\Big[\big[a,Ker_La\big],\big[a,Ker_La\big]\Big]\subset$$
$$\Big[a,\big[a,\big[Ker_La,Ker_La\big]\big]\Big]$$

ya que $[a, [a, [G_1, G_1]]] \subset [G_{-1}, G_{-1}]$ por ser $[a, [a, [k, l]]] = 2[[a, k], [a, l]]$ para todo $k, l \in \mathrm{Ker}_L a$. Esto demuestra que

$$\big\{I^+,V^-,V^+\big\}\subset I^+$$

De forma análoga,

$$\Big[\Big[x,\big[a,\big[a,\big[z_1,z_2\big]\big]\big]\Big],y\Big]=2\Big[\Big[x,\big[\big[a,z_1\big],\big[a,z_2\big]\big]\Big],y\Big]=$$
$$2\Big[\Big[\big[x,\big[a,z_1\big]\big],\big[a,z_2\big]\Big],y\Big]+2\Big[\Big[\big[a,z_1\big],\big[x,\big[a,z_2\big]\big]\Big],y\Big]\subset$$
$$\Big[y,\big[\mathrm{Ker}_La,\big[a,\mathrm{Ker}_La\big]\big]\Big]\subset\Big[\big[y,\mathrm{Ker}_La\big],\big[a,\ \mathrm{Ker}_La\big]\Big]+$$
$$\Big[\mathrm{Ker}_La,\big[y,\big[a,\mathrm{Ker}_La\big]\big]\Big]\subset\Big[\big[G_2,G_1\big],\big[G_{-2},G_1\big]\Big]+\Big[G_1,\big[G_2,\big[G_{-2},G_1\big]\big]\Big]\subset$$
$$\big[G_2,G_{-1}\big]+\big[G_1,G_1\big]\subset\mathrm{Ker}_La+\big[\mathrm{Ker}_La,\ \mathrm{Ker}_La\big]$$

con lo que

$$\big\{V^-,I^+,V^-\big\}\subset I^-.$$

Por otra parte,

$$\Big[\Big[\big[z_1,z_2\big],\big[a,\big[a,x\big]\big]\Big],y\Big]\in\Big[\Big[\big[G_1,G_1\big],G_{-2}\Big],G_2\Big]\subset$$
$$\big[G_2,G_{-2}\big]+\Big[\big[G_1,G_1\big],G_0\Big]\subset$$
$$G_0+\big[G_1,G_1\big]\subset\mathrm{Ker}_La+\big[\mathrm{Ker}_La,\ \mathrm{Ker}_La\big]$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned}&\Big[\Big[\big[z_1, z_2\big], a\Big], y\Big] \in \Big[\Big[\big[G_1, G_1\big], G_{-2}\Big], G_2\Big] \subset \\ &\big[G_2, G_{-2}\big] + \Big[\big[G_1, G_1\big], G_0\Big] \subset \\ &G_0 + \big[G_1, G_1\big] \subset \mathrm{Ker}_L a + \big[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\big],\end{aligned}$$

lo que prueba que

$$\left\{I^-, V^+, V^-\right\} \subset I^-.$$

Por último,

$$\Big[\Big[a, \big[a, L\big]\Big] + \phi a, \big[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\big]\Big], \big[a, \big[a, L\big]\big] + \phi a\Big] = \Big[\Big[G_{-2}, \big[G_1, G_1\big]\Big], G_{-2}\Big] \subset$$
$$\Big[\big[G_{-1}, G_1\big], G_{-2}\Big] \subset \Big[\big[G_{-1}, G-1\big] \subset \Big[\big[a, \mathrm{Ker}_L a\big], \big[a, \mathrm{Ker}_L a\big]\Big] \subset \Big[a, \big[a, \big[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\big]\big]\Big]$$

y, por tanto

$$\left\{V^+, I^-, V^+\right\} \subset I^+.$$

Supongamos ahora que L es no degenerada. Tenemos que demostrar que $(\mathrm{Ker}\Psi_1, \mathrm{Ker}\Psi_{-1}) \subset \mathrm{Ann}_V(I)$. Como L es no degenerada, entonces V es no degenerado [30, Proposition 3.5 (iii)]. Ahora bien, como V es no degenerado, entonces $\mathrm{Ann}_V(I)$ es el conjunto (le los elementos z tales que $\{z, I, z\} = 0$ [54, Proposition 1.7].

Sea $u \in G_{-2}$ tal que $u \in \mathrm{Ker}\Psi_1$. Entonces $[u, \mathrm{Ker}_L a] \subset G_{-2}$ y, por tanto, para todo $z_1, z_2 \in \mathrm{Ker}_L a$. se tiene que

$$\begin{aligned}\left\{u, \big[z_1, z_2\big], u\right\} = \Big[\Big[u, \big[z_1, z_2\big]\Big], u\Big] = \Big[\Big[\big[u, z_1\big], z_2\Big], u\Big] + \Big[\big[z_1, \big[u, z_2\big]\Big], u\Big] \in \\ \Big[\big[F_{-2}, F_1\big], F_{-2}\Big] = 0.\end{aligned}$$

con lo que u pertenece al anulador de I.

Sea ahora $\overline{x} \in L / \mathrm{Ker}_L a$ tal que $\overline{x} \in \mathrm{Ker}\,\Psi_{-1}$. Como $\overline{x} \in \mathrm{Ker}\ \Psi_{-1}$, entonces $\Big[x, \big[a, \mathrm{Ker}_L a\big]\Big] \subset G_0$. Para ver que $\overline{x}$ pertenece al anulador de I, veamos que

$$\left\{\bar{x}, \left[a, \left[a, \left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right], \bar{x}\right\} = \bar{0}$$

o, equivalentemente,

$$\mathrm{ad}_a^2\left[\left[x, \left[a, \left[a, \left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right]\right], x\right] = 0$$

Sean $z_1,\ z_2 \in \mathrm{Ker}_L a$,

$$\left[a, \left[a, \left[x, \left[x, \left[a, \left[a, \left[z_1, z_2\right]\right]\right]\right]\right]\right]\right] \in \left[a, \left[a, \left[x, \left[x, \left[\left[a,\ \mathrm{Ker}_L a\right],\ \left[a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right]\right]\right]\right] \subset$$
$$\left[a, \left[a, \left[x, \left[G_0, \left[a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right]\right]\right] \subset \left[a, \left[a, \left[x, \left[a, \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right]\right] \subset \left[a, \left[a, G_0\right]\right] = 0.$$

Luego $\bar{x}$ pertenece al anulador de *I y*, por tanto,$(\mathrm{Ker}\Psi_1, \mathrm{Ker}\Psi_{-1}) \subset \mathrm{Ann}_V(\mathrm{I})$. □

Corolario 3.1.4. *Sea L un álgebra de Lie fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ. con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, *y sea a ∈ L un elemento Jordan. Si* Ker_La *no es subálgebra de L, entonces* L_a *es un álgebra de Jordan fuertemente prima y especial.*

Demostración. El par de Jordan $V = \left(\left[a, \left[a, L\right]\right] + \phi a, \mathrm{Ker}_L a\right)$ es el subcociente de *L* determinado por el i deal interno abeliano $\left(a\right)_L = \left[a, \left[a, L\right]\right] + \phi a$, con lo que *V* es fuertemente primo por [30, Proposition 3.5 (iii)]. Si $\mathrm{Ker}_L a$ no es subálgebra de *L*. entonces el ideal de *V*

$$I = \left(I^+, I^-\right) = \left(\left[a, \left[a, \left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]\right]\right],\ \overline{\left[\mathrm{Ker}_L a,\ \mathrm{Ker}_L a\right]}\right)$$

es no nulo *y*, por tanto, $\mathrm{Ann}_V(I)$ es cero, ya que $\{I^\sigma, \mathrm{Ann}_V(I)^{-\sigma}, \mathrm{I}^\sigma\} = 0$, $\mathrm{Ann}_V(I)$ es un ideal de *V y V* es primo.

Por la proposición anterior, tenemos que $(\mathrm{Ker}\Psi_1, \mathrm{Ker}\Psi_{-1}) \in \mathrm{Ann}_V(I)$, con lo que (Ψ_1, Ψ_{-1}) es un moiiomorfismo enitre el par de Jordan *V* y el par de Jordan especial

$$\left(\mathrm{Hom}\left(G_1 / G_0, G_{-1} / G_{-2}\right),\ \mathrm{Hom}\left(G_{-1} / G_{-2}, G_1 / G_0\right)\right)^{(+)}$$

con lo que *V* es un par de Jordan especial.

Como el álgebra de Jordan L_a puede considerarse como el álgebra de Jordan a-homótopa $V^{(a)}$ ([30, Remark 3.6]) y V es especial, entonces L_a es especial. Además, por [33, Theorem 2.2], tenemos que L_a es fuertemente prima. □

3.2. Especialidad de subcocientes de un álgebra de Lie

En esta sección nos ocuparemos de los subcocientes asociados a los ideales internos abelianos B de L. Recordemos que un ϕ-módulo B de L es un ideal interno abeliano si $[B, [B, L]] \subset B$ y $[B, B] = 0$. El núcleo de un ideal interno abeliano es

$$\mathrm{Ker}_L B = \left\{ x \in L : \left[b, \left[b, x \right] \right] = 0 \right\}.$$

Asociado a un ideal interno abeliano B de L podemos considerar el subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$, que es un par de Jordan con productos

$$\left\{ b_1, \bar{x}, b_2 \right\} = \left[\left[b_1, x \right], b_2 \right] \text{ y } \left\{ \bar{x}, b_1, \bar{y} \right\} = \overline{\left[\left[x, b \right], y \right]}$$

para todo $b_1, b_2 \in B$ y para todo $\bar{x}, \bar{y} \in L/\mathrm{Ker}_L B$, ver [30, Lemma 3.2 (a)]

Recordemos que si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{Ker}_L b]^n \subset B$, entonces podemos considerar la filtración asociada a B dada por el Teorema 2.2.1, $\left\{ F_i \right\}_{i \in \mathbb{Z}}$, donde $F_{-m} = \left\{ 0 \right\}$ y $F_m = L$ para todo $m > n$, y

$$\begin{aligned}
&F_{-n} = B \\
&\vdots \\
&F_{-k} = \left[B, \mathrm{Ker}_L B \right]^k + B, \ para\, k = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
&F_0 = \left\{ x \in L : \left[x, B \right] \subset B \right\} \\
&\vdots \\
&F_s = ad^{n-s-1}_{\left[B, \mathrm{Ker}_L B \right]} \left(\mathrm{Ker}_L B \right) + F_0, \ para\, s = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
&F_n = L
\end{aligned}$$

Además, el álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida

$$\hat{L} = \underbrace{F_{-n}}_{\hat{L}_{-n}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{F_n / F_{n-1}}_{\hat{L}_n}$$

tiene como par de Jordan asociado $(\hat{L}_{-n}, \hat{L}_n)$ al subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$.

Proposición 3.2.1. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Sea, B un ideal interno abeliano de L y consideremos* $\mathrm{Ker}_L B$ $\mathrm{Ker}_L B = \{x \in L : [B, [B, x]] = 0\}$. *Supongamos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ *y consideremos la filtración asociada a B* $\{F_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. *Entonces, el par de aplicaciones*

$$\Psi_{n-1} : \hat{L}_{-n} \to \mathrm{Hom}(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1})$$
$$\Psi_{1-n} : \hat{L}_n \to \mathrm{Hom}(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1})$$

definidas por $\Psi_{\sigma(n-1)}(x)(y) = \mathrm{ad}_x(y)$ *para todo* $x \in \hat{L}_{-\sigma n}$ *y para todo* $y \in \hat{L}_{n-1}$, $si\ \sigma = +\ o\ y \in \hat{L}_{-1}\ si\ \sigma = -$, *es un homomorfismo de pares de Jordan entre* $V = (\hat{L}_{-n}, \hat{L}_n)$ *y el par de Jordan especial*

$$(\mathrm{Hom}(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1}), \mathrm{Hom}(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1}))^{(+)}.$$

Demostración. Como $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$, podemos considerar el álgebra de Lie (2*n* + 1)-graduada

$$\hat{L} = \hat{L}_{-n} \oplus \ldots \oplus \hat{L}_0 \oplus \ldots \oplus \hat{L}_n$$

Las aplicaciones Ψ_{n-1} y Ψ_{1-n} están bien definidas y (Ψ_{n-1}, Ψ_{1-n}) es un homomor fismo de pares de Jordan entre

$$V = (\hat{L}_{-n}, \hat{L}_n) = (F_{-n}, F_n / F_{n-1}) = (B, L / \mathrm{Ker}_L B)$$

y el par de Jordan especial

$$(\mathrm{Hom}(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1}), \mathrm{Hom}(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1}))^{(+)}$$

por el Lema 3.1.1. □

Proposición 3.2.2. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Sea B un ideal interno abeliano de L y consideremos $Ker_L B$. Entonces el par*

$$I = \left(I^+, I^-\right) = \left(\left[B, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right], \overline{\left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]}\right)$$

es un ideal del par de Jordan $V = \left(V^+, V^-\right) = \left(B, L/\mathrm{Ker}_L B\right)$.

Demostración. Sean $b_1, b_2, b_3 \in B,\ z_1, z_2 \in \mathrm{Ker}_L B$ y $\bar{x},\ \bar{y} \in L/\mathrm{Ker}_L B$. Veamos primero que $\left\{I^+, V^-, V^+\right\} \subset I^+$.

$$\left\{\left[b_1,\left[b_2,\left[z_1,z_2\right]\right]\right], \bar{x}, b_3\right\} = \left[\left[\left[b_1, \left[b_2, \left[z_1, z_2\right]\right]\right], x\right], b_3\right] = \left[\left[b_1,\left[b_2,\left[z_1,z_2\right]\right]\right], \left[x, b_3\right]\right] =$$

$$= \left[\left[b_1, \left[x, b_3\right]\right], \left[b_2, \left[z_1, z_2\right]\right]\right] + \left[b_1, \left[\left[b_2, \left[x, b_3\right]\right], \left[z_1, z_2\right]\right]\right] +$$
$$+ \left[b_1, \left[b_2, \left[\left[z_1, z_2\right], \left[x, b_3\right]\right]\right]\right] \in \left[B, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right],$$

ya que $\left[\left[z_1, z_2\right], \left[x, b_3\right]\right] = \left[\left[z_1 \left[x, b_3\right]\right], z_2\right] + \left[z_1, \left[z_2, \left[x, b_3\right]\right]\right] \in \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]$.

Luego $\left\{I^+, V^-, V^+\right\} \subset I^+$

Veamos ahora que $\left\{V^-, I^+, V^-\right\} \subset I^-$.

$$\left\{\bar{x}, \left[b_1, \left[b_2, \left[z_1, z_2\right]\right]\right], \bar{y}\right\} = \overline{\left[\left[x, \left[b_1, \left[b_2, \left[z_1, z_2\right]\right]\right]\right], y\right]} \in$$
$$\overline{\left[L, \left[L, \left[B, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]\right]\right]} \subset \overline{\left[L, \left[\left[L, B\right], \left[B, \left[K, K\right]\right]\right]\right]} +$$
$$\overline{\left[L, \left[B, \left[\left[L, B\right], \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]\right]} \subset \overline{\left[L, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]} +$$
$$\overline{\left[L, \left[B, \left[\left[L, B\right], \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]\right]} + \overline{\left[\left[L, B\right], \left[\left[L, B\right], \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]} + \overline{\left[B, L\right]} \subset$$
$$\overline{\left[\left[L, B\right], \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]} + \overline{\left[B, L\right]} + \overline{\left[\left[L, B\right], \left[\left[L, B\right], \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right]} \subset$$
$$\overline{\left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]},$$

por ser

$$\Big[\Big[L,B\Big],\Big[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\Big]\Big]\subset\Big[\Big[\Big[L,\,B\Big],\mathrm{Ker}_L B\Big],\mathrm{Ker}_L B\Big]\subset\Big[K,\,K\Big]$$
$$y\overline{\Big[B,\,L\Big]}=\overline{0},\ \text{yaque}\Big[B,\,L\Big]\subset\mathrm{Ker}_L B$$

Ahora, veamos que $\left\{I^-, V^+, V^-\right\}\subset I^-$.

$$\left\{\overline{\Big[z_1,\,z_2\Big]},\ b_1,\,\overline{x}\right\}=\overline{\Big[\Big[\Big[z_1,\,z_2\Big],\,b_1\Big],\,x\Big]}=\overline{\Big[\Big[\Big[z_1,\,z_2\Big],\,x\Big],\,b_1\Big]}+\overline{\Big[\Big[z_1,\,z_2\Big],\Big[b_1,\,x\Big]\Big]}\in$$

$$\overline{\Big[\Big[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\Big],\Big[B,\,L\Big]\Big]}\subset\overline{\Big[\Big[\mathrm{Ker}_L B,\Big[B,\,L\Big]\Big],\mathrm{Ker}_L B\Big]}\subset\overline{\Big[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\Big]},$$

con lo que $\left\{I^-, V^+, V^-\right\}\subset I^-$

Por último, veamos que $\left\{V^+, I^-, V^+\right\}\subset I^+$.

$$\left\{b_1,\overline{\Big[z_1,\,z_2\Big]},\,b_2\right\}=\Big[\Big[b_1,\Big[z_1 z_2\Big]\Big],\,b_2\Big]\in\Big[B,\Big[B,\Big[\mathrm{Ker}_L B,\mathrm{Ker}_L B\Big]\Big]\Big]$$

y, por tanto, $\left\{V^+, I^-, V^+\right\}\subset I^+$.

Luego $I = (I^+, I^-)$ es un ideal del par de Jordan $V = (B,\ L/\mathrm{Ker}_L B)$. □

Definición 3.2.3. Sea $V = (V^+,\ V^-)$ un par de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2},\frac{1}{3}\in\phi$, y sea $J = (J^+,\ J^-)$ un ideal de V . Para cada m ≥ 0, definimos $J^{3^{m+1}} := \left(\left(J^{3^{m+1}}\right)^+,\left(J^{3^{m+1}}\right)^-\right)$, donde

$$\left(J^{3^{m+1}}\right)^+=\left\{\left(J^{3^m}\right)^+,\left(J^{3^m}\right)^-,\left(J^{3^m}\right)^+\right\}$$
$$\left(J^{3^{m+1}}\right)^+=\left\{\left(J^{3^m}\right)^-,\left(J^{3^m}\right)^+,\left(J^{3^m}\right)^-\right\}.$$

Lema 3.2.4. *Sea $V = (V^+, V^-)$ un par de Jordan sobre un anillo de escalares ϕ. con $\frac{1}{2},\frac{1}{3}\in\phi$ $\in\phi$. y sea $J = (J^+,\ J^-)$ un ideal de* V. *Entonces se verifica:*

1. $(J^{3m+1})^\sigma \subset (J^{3m})^\sigma$ *para, todo* $m > 0$. *donde* $\sigma = \pm$.
2. J^{3m+1} *es ideal cs ideal de* J^{3m} *para, todo* $m \geq 0$.

3. *Si V es no degenerado y J ≠ 0. eruto neos J^{3m} es no nulo y no degenerado para, cada m ≥ 0.*

Demostración. Consideremos σ = ±.

1. Veamos que $(J^{3^{m+1}})^{\sigma} \subset (J^{3^m})^{\sigma}$ para lodo $m \geq 0$. Para $m = 0$ es claro, ya que

$$(J^3)^{\sigma} = \{J^{\sigma}, J^{-\sigma}, J^{\sigma}\} \subset J^{\sigma},$$

por ser *J* ideal de *V*.

Supongamos entonces que $(J^{3^{m+1}})^{\sigma} \subset (J^{3^m})^{\sigma}$ para un cierto $m \geq 0$ y veamos que se verifica para $m + 1$.

$$\left(J^{3^{m+2}}\right)^{\sigma} = \left\{\left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^{m+1}}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}\right\} \subset$$
$$\left\{\left(J^{3^m}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{\sigma}\right\} = \left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}.$$

Luego $(J^{3^{m+1}})^{\sigma} \subset (J^{3^m})^{\sigma}$ para, lodo $m \geq 0$.

2. Como $(J^{3^{m+1}})^{\sigma} \subset (J^{3^m})^{\sigma}$ para cada $m \geq 0$. entonces

$$\left\{\left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^{m+1}}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}\right\} \subset$$
$$\left\{\left(J^{3^m}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{\sigma}\right\} = \left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}$$

con lo que $J^{3^{m+1}}$ es sub par de *V*. Además.

$$\left\{\left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{\sigma}\right\} + \left\{\left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^{m+1}}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{\sigma}\right\} \subset$$
$$\left\{\left(J^{3^m}\right)^{\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{-\sigma}, \left(J^{3^m}\right)^{\sigma}\right\} = \left(J^{3^{m+1}}\right)^{\sigma}.$$

3. Como *V* os no degenerado y *J* es ideal de *V.* entonces *J* es no degenerado [25, p. 174], Análogamente, como *J* es no nulo y no degenerado, y J^3 es ideal de *J,* donde

$$(J^3)^{\sigma} = \{J^{\sigma}, J^{-\sigma}, J^{\sigma}\},$$

entonces J^3 es no nulo. A demás, como J^3 es un ideal no nulo de J y J es no degenerado, entonces J^3 es no degenerado.

Razonando de manera análoga para cada $m \geq 0$, tenemos que J^{3^m} es no nulo y no degenerado. □

Proposición 3.2.5. *Sea L un álgebra de Lie sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Sea B un ideal interno abeliano de L y consideremos $Ker_L B$. Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{K}\, er_L B]^n \subset B$ y consideremos el ideal $J = (J^+, J^-) = (\ker\Psi_{n-1}, \ker\Psi_{1-n})$, donde (Ψ_{n-1}, Ψ_{1-n}) es el homomorfismo de pares de Jordan dado en la* Proposición 3.2.1. *Entonces*

$$(J^{3^m})^+ \subset \{b \in B : [b, \mathrm{Ker}_L B] \subset [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2} + B\}.$$

Además, si L es no degenerada, entonces

$$(J^{3^m})^+ \subset \mathrm{Ann}_v(I)^+$$

para, todo $m+2 \geq \frac{n+1}{2}$, *donde*

$$I = \left(I^+, I^-\right) = \left(\left[B, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B, \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right], \overline{\left[\mathrm{Ker}_L B, \mathrm{Ker}_L B\right]}\right).$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre $m \geq 0$. Si $m = 0$, entonces $J^+ = \ker\Psi_{n-1}$. con lo que si $b \in \mathrm{Ker}\Psi_{n-1}$, entonces

$$[b, \mathrm{Ker}_L B] \subset F_{-2} = [B, \mathrm{Ker}_L B]^2 + B.$$

Supongamos ahora que

$$(J^{3^{m-1}})^+ \subset \{b \in B : [b, \mathrm{Ker}_L B] \subset [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1} + B\}$$

y veamos que

$$(J^{3^m})^+ \subset \{b \in B : [b, \mathrm{Ker}_L B] \subset [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2} + B\}.$$

Sean $b_1, b_2 \in (\mathrm{J}^{3^{m-1}})^+$, $\overline{x} \in (J^{3^{m-1}})$ y consideremos $b_3 = \{b_1, \overline{x}, b_2\}$. Sea

$$z \in \mathrm{Ker}_L B, \text{ tenemos quc ver que } [b_3, z] \in [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2} + B.$$

$$[b_3,z] = [[[b_1,x],b_2],z] = [[[b_1, z], x], b_2] + [[[b_1, [x,z]],b_2] + [[b_1,x], [b_2, z]] \in$$

$$[[[B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1} + B\, x], b_2] + [[b_1,x], [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1} + B] \subset$$

$$[[[B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}, x], b_2] + [b_1, [x, [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}]] + B.$$

Ahora bien, como

$$[[B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}, L] = [[[B, \mathrm{Ker}_L B], [B, \mathrm{Ker}_L B]^m], L] \subset$$

$$[\mathrm{Ker}_L B, [B, \mathrm{Ker}_L B]^m] + [[B, \mathrm{Ker}_L B], \mathrm{Ker}_L B] \subset [[B, \mathrm{Ker}_L B], \mathrm{Ker}_L B], \text{ entonces}$$

$$[[[\mathrm{B}, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}, x] b_2] + [b_1, [x, [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}]] + B \subset$$

$$[[[B, \mathrm{Ker}_L B], \mathrm{Ker}_L B], b_2] + [b_1, [[B, \mathrm{Ker}_L B], \mathrm{Ker}_L B]] + B \subset$$

$$[[B, \mathrm{Ker}_L B], [\mathrm{Ker}_L B, b_2]] + [[[B, \mathrm{Ker}_L B], [b_1, \mathrm{Ker}_L B]] + B \subset$$

$$[[B, \mathrm{Ker}_L B], [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+1}] + B \subset [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2}] + B.$$

Luego

$$(J^{3m})^+ \in \{b \in B : [b, \mathrm{Ker}_L B] \subset [B, \mathrm{Ker}_L B^{m+2}] + B\}$$

para lodo $m \geq 0$.

Supongamos ahora que L es no degenerada. Entonces V es no degenerado por [30, Proposition 3.5 (iii)]. Veamos que $(J^{3m})^+ \subset \mathrm{Ann}_V(I)^+$. Sea b $\in (J^{3m})^+$ y sean $z_1, z_2 \in \mathrm{Ker}_L B$. Entonces, para, $m + 2 \geq \dfrac{n+1}{2}$,

$$\{b, [z_1, z_2], b\} = [[b, [z_1, z_2]], b] = 2[[b, z_1], [b, z_2]] \in$$

$$[[B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2} + B, [B, \mathrm{Ker}_L B]^{m+2} + B] \subset [B, \mathrm{Ker}_L B]^{2m+4} \subset$$

$$[B, \mathrm{Ker}_L B]^{n+1} = 0,$$

ya que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \in B$. Luego, por la caracterización del anulador de un ideal para pares de Jordan no degenerados ([54, Proposition 1.7]), tenemos que $(J^{3m})^+ \subset \mathrm{Ann}_V(I)^+$. □

Corolario 3.2.6. *Sea L un álgebra de Lie fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ tal que* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. *Sea, B un ideal interno abeliano de L y consideremos* $\mathrm{Ker}_L B$. *Supongamos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$. *Si* $\mathrm{Ker}_L B$ *no es subalgebra de L, entonces el subcocicntc* $(B, \mathrm{L}/\mathrm{Ker}_L B)$ *es un par de Jordan especial fuertemente primo.*

Demostración. Como *L* es fuertemente prima, entonces el par de Jordan *V = (B, L/Ker*$_L$*B)* es fuertemente primo por [30, Proposition 3.5 (iii)]. Si Ker$_L$*B* no es subálgebra de *L*, entonces el ideal

$$I = (I^+, I^-) = \left(\left[B, \left[B, \left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]\right]\right], \overline{\left[\mathrm{Ker}_L B,\ \mathrm{Ker}_L B\right]}\right)$$

es no nulo y, por tanto, Ann$_V$(*I*) es cero, ya que $\{I^\sigma, \mathrm{Ann}_V(I)^{-\sigma}, I^\sigma\} = 0$, Ann$_V$(*I*) es un i deal de *V y V* es primo.

Por la proposición anterior, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $J^{3^m} = 0$ y, por el punto 3 del lema anterior, tenemos que $J = (\ker\Psi_1, \ker\Psi_{-1}) = 0$. con lo que (Ψ_1, Ψ_{-1}) es un monomorfismo entre el par de Jordan *V y* el par de Jordan especial

$$\left(\mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1}\right),\ \mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1}\right)\right)^{(+)}$$

y, por tanto, *V* es un par de Jordan especial. □

Lema 3.2.7. *Sea R un álgebra asociativa prima y centralmente cerrada sobre un anillo de escalares ϕ, con* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$ *, y sea* B, *un ideal interno abeliano de R*$^{(-)}$*/Z(R). Entonces existe un ideal interno abeliano B' de R*$^{(-)}$ *tal que B'B' = 0 y π (B') =* B, *donde π: R*$^{(-)}$ → *R*$^{(-)}$*/Z*(*R*) denota la proyección canónica. En particular, *B'* ∩*Z*(*R*) = 0.

Demostración. Veamos que *B* := π^{-1} (*B*) es un ideal interno abeliano de *R*$^{(-)}$. Como

$$\pi([B, [B,R]]) \subset [B, [B, R/Z(R)]] \subset B,$$

entonces [*B*, [*B*, *R*]] ⊂ *B*. Además, si *b* ∈ *B*. $ad_b^3(R) \subset Z(\mathrm{R})$. poi· ser *B* un ideal interno abeliano de *R*$^-$*/Z*(R) y, por tanto, ad^3(*R*) = 0, por [19, Lemma 3.1]. Aplicando de nuevo que *B* es ideal intern o abeliano de *R*$^-$ */Z* (R), tenemos que $[b_1,b_2] = b_1b_2 - b_2b_1 \in Z(R)$ para todo $b_1, b_2 \in B$. con lo que

$$0 = \mathrm{ad}_{b_1}^3\left(b_2^3\right) = b_1^3b_2^3 - 3b_2^2b_2^3b1 + 3b_1b_2^3b_1^2 - b_2^3b_1^3 = 6\left[b_1, b_2\right]^3$$

y, por tanto, [b_1, b_2] = 0, ya que [b_1,b_2] es un elemento nilpotente del centro de un álgebra prima.

Por último, consideramos *B*' el ideal intern o abeliano de *R*$^{(-)}$ asociado a *B* como en el segundo punto de la Proposición 2.1.1. Para este ideal interno abeliano *B*' se vcrifica que *π*(*B'*) = *π*(*B*) = *B* y *B'B'* = 0. Para, acabar, veamos

que $B' \cap Z(R) = 0$. Sca $b' \in B' \cap Z(\mathrm{R})$ entonces, para todo $x \in R$, tenemos que

$$0 = [b', x] = b'x - xb$$

y, por tanto,

$$b'xb' = 0,$$

ya que $B'B' = 0$. Luego $b' = 0$ por ser R un álgebra prima. □

Como era de esperar, en el siguiente resultado se demuestra que el subcociente asociado a un ideal interno abeliano en $L = R^{(-)}/Z(R)$ es especial cuando R es un álgebra asociativa prima y $[\mathrm{Ker}_L B, \mathrm{Ker}_L \mathrm{B}] \not\subset \mathrm{Ker}_L B$.

Corolario 3.2.8. *Sea R un álgebra asociativa prima sobre un anillo de escalares ϕ tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. Sea, B un ideal interno abeliano de $L = R^{(-)}/Z(R)$ y consideremos* $\mathrm{Ker}_L B$. Si $\mathrm{Ker}_L B$ *no es subalgebra de L, entonces el subcociente* $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$ *es especial y fuertemente primo.*

Demostración. Como R es prima entonces, por [34, Lemma 4.2], L es fuertemente prima y, por tanto, el subcociente *(B, L/*$\mathrm{Ker}_L B$) es fuertemente primo por [30, Proposition 3.5 (iii)]. Consideremos la clausura central $\hat{R}$ de R, $\hat{L} := \hat{R}^{(-)}/Z(\hat{R})$ y sea $\hat{B}$ la extension por escalares de B en $\hat{L}$. Como R es prima, entonces $\hat{R}$ es prima. Luego, por el lema anterior, podemos suponer que $\hat{B} = \pi(B')$, dond B' es un ideal interno abeliano de $\hat{R}^{(-)}$ tal que $B'B' = 0$ y π denota la proyección canónica de $\hat{R}^{(-)}$ soljrc $\hat{L}$. Por el a.partado 4 de la Proposición 2.1.1, tenemos que $[B', \mathrm{Ker}_{\hat{R}^{(-)}} B']$ es nilpotente y, por tanto, $\pi([B', \mathrm{Ker}_{\hat{R}^{(-)}} B'])$ es una sub algebra de L nilpotente. Por el Corolario 3.2.6, tenemos que el subcociente $(\hat{B}, \mathrm{Ker}_{\hat{L}} \hat{B})$ es especial. Luego (B,L/Ker_LB) es especial. □

Observación 3.2.9. Si L un álgebra de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \in \phi$, vimos que para cada ideal interno abeliano no nulo B de longitud finita, de L. existc una. $\mathbb{Z}$-graduación finita. $L = L_{-\mathrm{n}} \oplus \cdots \oplus \mathrm{L}_0 \oplus \cdots \oplus \mathrm{L}_n$ tal que $B = L_n$ [30, Corollary 6.2], Esto siempre ocurre, por ejemplo, cuando L es no degenerada y de dimensión finita. Con respecto a esta graduación. $\mathrm{Ker}_L B = L_{-(n-i)} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Lo} \oplus \cdots \oplus L_n \mathrm{r}\ [B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$. con lo que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^{n+1} = 0$.

Cuando la graduación es una 3-graduación, $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$, $\mathrm{KLr}_L B = L_0 \oplus L_1$ es siempre es un a subálgebra de L. En esta situación, el Corolario 3.2.6 no

da información sobre la especialidad del subcociente (B, L/Ker$_L$B) ≅ (L_1, L_{-1}). Si revisamos la lista de ideales internos abelianos de las álgebras de Lie de dimensión finita simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero dada en [23], solo cuando $L = E_6$ o E_7 encontramos subcocientes excepcionales: si $L = E_6$, el subcociente asociado al ideal interno abeliano $B_{\{1\}}$ (con la notación de [23]) es isomorfo al par BiCayley excepcional y. si $L = E_7$. el subcocicntc asociado al ideal interno abeliano $B_{\{7\}}$ (con la notación de [23]) es isomorfo al par de Albert excepcional. El resto de subcocientes de ideales internos abelianos de las álgebras de Lie simples de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero son especiales.

CAPÍTULO 4. UNA FORMA CANÓNICA DE JORDAN PARA ELEMENTOS NILPOTENTES

El contenido de este capítulo se encuentra en el artículo publicado [38]. En este último capítulo daremos una nueva demostración de la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario. Si $a \in R$ es un elemento nilpotente del índice n y a^{n-1} es regular von Neumann, podemos descomponer $a = ea + (1-e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$, donde S es un anillo unitario, y $(1-e)a$ es nilpotente de índice menor que n para un idempotente $e \in R$ tal que $ae = ea$. Este resultado hace posible caracterizar los anillos primos de índice acotado n, con un elemento nilpotente $a \in R$ de índice n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann, como un anillo de matrices sobre un dominio unitario. Además, el material de este capítulo ha sido de utilidad para describir los elementos ad-nilpotentes en álgebras de Lie que proceden de álgebras asociativas con involución [20].

A lo largo de este capítulo trataremos con anillos no necesariamente unitarios. Si R es un anillo no unitario, por expresiones del tipo $(1-x)y$, para $x, y \in R$. entenderemos $y - xy \in R$.

4.1. Forma canónica de Jordan

El siguiente lema es análogo a [31, Lema 3.2], pero hemos cambiado ligeramente su demostración para generalizar el resultado a anillos arbitrarios.

Lema 4.1.1. *Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de R con índice n tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Entonces existe $b \in R$ tal que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1}b = b$ y $ba^kb = 0$ para todo $k \in \{0,1, \ldots, n-2\}$.*

Demostración. Como a^{n-1}es regular von Neumann, existe $b \in R$ tal que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$. Consideremos $b' = ba^{n-1}b \in R$, entonces se tiene que

$$a^{n-1}b'a^{n-1} = a^{n-1}(ba^{n-1}b)a^{n-1} = (a^{n-1}ba^{n-1})ba^{n-1} = a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$$

y

$$b'a^{n-1}b' = (ba^{n-1}b)a^{n-1}(ba^{n-1}b) = b(a^{n-1}ba^{n-1})ba^{n-1}b = b(a^{n-1}ba^{n-1})b = b'.$$

Consideremos ahora $c = b' - ab'a^{n-2}b'$. Entonces tenemos que

$$a^{n-1}ca^{n-1} = a^{n-1}b'a^{n-1} - a^nb'a^{n-2}b'a^{n-1} = a^{n-1},$$

$$ca^{n-1}c = b'a^{n-1}\, c - ab'a^{n-2}\, b'a^{n-1}c =$$

$$b'a^{n-1}b' - b'a^nb'a^{n-2}\, b' - ab'a^{n-2}b'a^{n-1}b' + ab'a^{n-2}b'a^nb'a^{n-2}b' =$$

$$b' - ab'a^{n-2}b' = c$$

y

$$ca^{n-2}c = ca^{n-2}b' - ca^{n-1}b'a^{n-2}b' =$$

$$b'a^{n-2}b' - ab'a^{n-2}b'a^{n-2}b' - b'a^{n-1}b'a^{n-2}b' + ab'a^{n-2}b'a^{n-1}b'a^{n-2}b' =$$

$$b'a^{n-2}b' - ab'a^{n-2}b'a^{n-2}b' - b'a^{n-2}b' + ab'a^{n-2}b'a^{n-2}b' = 0.$$

Usaremos un argumento recursivo. Por inducción decreciente sobre $s = n - 2,\ldots, 0$. supougamos que existe $b \in R$ tal que. para todo $k \in \{s + 1,\ldots, n - 2\}$. tenemos que

$$a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1},\ ba^{n-1}b = b \text{ y } ba^k\, b = 0.$$

Definamos $d := 1 - a^{n-1-s}ba^s$. entonces $c := db$ verifica

$$a^kc = a^kdb = a^k(1-a^{n-1-s}ba^s)b =$$

$$a^kb - a^{n+k-1-s}ba^sb = a^kb$$

para, todo $k \in \{s + 1,\ldots,n - 1\}$. ya que $n + k - 1 - s \geq n$ para todo $k \in \{s + 1,\ldots, n - 1\}$ y $a^n = 0$. Además.

$$a^{n-1}ca^{n-1} = a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1},$$

$$ca^{n-1}c = ca^{n-1}b = dba^{n-1}b = db = c$$

y, para todo $k \in \{s + 1,\ldots, n - 1\}$.

$$ca^k\, c = ca^k\, b = dba^k\, b = 0.$$

Veamos que $ca^sc = 0$:

$$ca^sc = ca^s\,(1 - a^{n-1-s}ba^s)b = ca^sb - ca^{n-1}ba^sb =$$

$$dba^sb - d(ba^{n-1}b)a^sb = dba^sb - dba^sb = 0.$$

Por lo tanto, podemos concluir la demostración por recursion. □

Definición 4.1.2. Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de R con índice n tal que a^{n-1} es regular von Neumann. A un elemento $b \in R$ con las características del lema anterior se le denomina *inverso de Rus de a.*

Teorema 4.1.3. *Sea R un anillo y sea a ∈ R un elemento nilpotente de R con índice n tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Sea b ∈ R un inverso de Rus de a.*

Entonces existen n idempotentes ortagonales no nulos $\{e_k\}_{k=1}^n$ *en R (que dependen de b) tales que, si* $e = \sum_{k=1}^{n} e_k$, *entonces se verifica:*

1. $ea = ae$,
2. $a^{n-1}e = a^{n-1}$.
3. $(1 - e)a$ *es nilpotente de índice menor que n.*
4. $eRe \cong M_n(e_1Re_1)$ *y, si* $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ *denotan a las matrices unidades del anillo de matrices eRe, entonces* $ea = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}$.
5. *Para, todo* $s \in \{1, 2,\ldots, n-1\}$, $(ea)^3$ *es unit-rcgular en eRe ya que, si* $d = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,k+1} + e_{n,1}$, *entonces* $(ea)^s d^s (ea)^s = (ea)^s$ *y* d^s *es invertible en eRe.*

Demoslración. Como a es un elemento nilpotente de R de índice n tal que a^{n-1} es regular von Neumann entonces, por el Lema 4.1.1, a tiene inverso de Rus en R, es decir, existe $b \in R$ tal que

$$a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1},\ ba^{n-1}b = b \qquad \text{y} \qquad ba^kb = 0$$

para todo $k \in \{0,1,\ldots,n-2\}$. Consideremos $e_{i,j} = a^{i-1}ba^{n-j}$ para $i, j = 1, 2,\ldots, n$. Entonces tenemos que

$$e_{u,v}e_{r,s} = a^{u-1}ba^{n-v}a^{r-1}ba^{n-s} = a^{u-1}ba^{n-v+r-1}ba^{n-s} =$$
$$\delta_{v,r}a^{u-1}ba^{n-1}ba^{n-s} = \delta_{v,r}a^{u-1}ba^{n-s} = \delta_{v,r}e_{u,s},$$

donde $\delta_{u,r}$ denota la delta de Kronecker, es decir, $\delta_{u,r} = 0$, si $v \neq r$, y $\delta_{,r} = 1$, si $v = r$. Por lo tanto, $\left\{e_k := e_{k,k}\right\}_{k=1}^{n}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales. Además, estos idempotentes son no nulos, ya que

$$e_{n,k}e_k e_{k,1} = e_{n,1} = a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1} \neq 0.$$

1. Como $e_1 a = ba^n = 0, ae_n = a^n b = 0$ y

   para todo $k = 2, \ldots, n$, entonces $e = \sum_{k=1}^{n} e_k$ es un idempotente de R que conmuta con a:

$$ae = a\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = a\left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i\right) = \left(\sum_{i=2}^{n} e_i\right)a = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)a = ea.$$

2. $a^{n-1}e = a^{n-1}e_1 = a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$.

3. Como $(1-e)a = a - ea = a - ae = a(1-e)$ y $(1-e)^2 = (1-e)$, entonces $\left((1-e)a\right)^{n-1} = (1-e)a^{n-1} = a^{n-1} - ea^{n-1} = 0$.

4. Como $\left\{e_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ es un conjunto de matrices unitarias, donde $e_{i,j} = a^{i-1}ba^{n-j}$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces eRe es isomorfo al anillo de matrices $M_n(e_1 R e_1)$ (ver [50, (17.5) y (17.6)]). Además, tenemos que

$$ea = eae = (e_2 + \cdots + e_n)a(e_1 + \cdots + e_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1}ae_k =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(a^k ba^{n-k+1}\right)a\left(a^{k-1}ba^{n-k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} a^k ba^{n-1}ba^{n-k} =$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} a^k ba^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}.$$

5. Si $d = \sum_{k=1}^{n+1} e_{k,k+1} + e_{n,1}$, entonces $d^s = \sum_{k=1}^{n-s} e_{k,k+s} + \sum_{k=1}^{s} e_{n-s+k,k}$ para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es invertible en eRe, ya que $d^n = \sum_{k=1}^{n} e_{k,k}$. Por otra parte, como $ea = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}$, entonces $(ea)^s = \sum_{k=1}^{n-s} e_{k+s,k}$ para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, con lo que

$$\left(ea\right)^s d^s = \sum_{k=1}^{n-s} e_{k+s,\,k+s}$$

y, por tanto,

$$\left(ea\right)^s d^s \left(ea\right)^s = \sum_{k=1}^{n-s} e_{k+s,\,k} = \left(ea\right)^s$$

para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Observación 4.1.4. En la representación matricial de *ea* dada en el punto 4 del teorema anterior, se tiene que $e_{1,n} = b = eb = be$ es un inverso de Rus de *ea* con idempotente asociado *e*.

Definición 4.1.5. Sea *R* un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de *R* con índice *n* tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Sea $b \in R$ un inverso de Rus de *a* y sea e el idempotente asociado a *b*. Al idempotente *e* se le llama *idempotente bloque,* y diremos que *ea* es un *elemento bloque asociado al idempotente bloque e*.

Observación 4.1.6. Si un elemento $a \in R$ es regular von Neumann y nilpotente de índice 2, se tie ne que *a* es un elemento bloque asociado al idempotente bloque $e = ba + ab$ para cualquier inverso de Rus *b* de *a*. Nótese que, en general, si $a \in R$ es nilpotente de índice *n,* a^{n-1} es regular von Neumann y *b* es un inverso de Rus de *a,* el idempotente bloque dado por el Teorema 4.1.3 es $e = (a + b)^n$, ya que

$$\left(a+b\right)^n = a^{n-1}b + a^{n-2}ba + \cdots + aba^{n-2} + ba^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} e_i = e,$$

por ser $ba^k b = 0$ para todo $k = 0, 1, \ldots, n-2$.

Observación 4.1.7. El punto 5 del Teorema 4.1.3 nos ofrece una representación del elemento *ea* como un «bloque de Jordan» (como la forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita). Además, tanto *ea* como sus potencias son regulares von Neumann, con lo que si a a es un elemento bloque nilpotente de índice *n*, La regularidad von Neumann de a^{n-1} implica que cada potencia de *a* es regular von Neumann.

Nótese que la forma canónica de Jordan obtenido en este teorema no es exactamente la forma canónica de Jordan de un anillo de matrices sobre un

cuerpo. En el ambiente clásico, si $a \in M_m(\mathbb{F})$ es un elemento nilpotente de índice n, obtenemos tantos bloques de Jordan de tamaño n como el rango de a^{n-1}. En la descomposición de Jordan dada en el apartado 4 del Teorema 4.1.3, todos los bloques de Jordan del mismo tamaño colapsan en uno.

Ejemplo 4.1.8. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y consideremos el anillo regular von Neumann $R = M_6(\mathbb{F})$. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{F})$$

consiste en dos bloques de Jordan de tamaño 3 × 3 asociados al autovalor 0.

Si $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{6}$ denotan a las matrices unitarias de $M_6(\mathbb{F})$, entonces $A = e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5}$. El elementó $A \in R$ es nilpotent e de índice 3, ya que $A^2 = e_{3,1} + e_{6,4}$. Un inverso de Rus de A es $B = e_{1,3} + e_{4,6}$ ya que

$$\begin{aligned} A^2BA^2 &= (e_{3,1} + e_{6,4})(e_{1,3} + e_{4,6})(e_{3,1} + e_{6,4}) = \\ &(e_{3,3} + e_{6,6})(e_{3,1} + e_{6,4}) = e_{3,1} + e_{6,4} = A^2, \\ BA^2B &= (e_{1,3} + e_{4,6})(e_{3,1} + e_{6,4})(e_{1,3} + e_{4,6}) = \\ &(e_{1,1} + e_{4,4})(e_{1,3} + e_{4,6}) = e_{1,3} + e_{4,6} = B \end{aligned}$$

y

$$BAB = (e_{1,3} + e_{4,6})(e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5})(e_{1,3} + e_{4,6}) =$$

$$(e_{1,2} + e_{4,5})(e_{1,3} + e_{4,6}) = 0.$$

Si denotamos por letras mayúsculas a los idempotentes $e_{i,j}$ definidos en la demostración del Teorema 4.1.3, tenemos que

$$\begin{aligned} E_{1,1} = BA^2 &= (e_{1,3} + e_{4,6})(e_{3,1} + e_{6,4}) = e_{1,1} + e_{4,4}, \\ E_{2,2} = ABA &= (e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5})(e_{1,3} + e_{4,6})(e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5}) = \\ &(e_{2,3} + e_{5,6})(e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5}) = e_{2,2} + e_{5,5} \end{aligned}$$

y

$$E_{3,3} = A^2B = \left(e_{3,1} + e_{6,4}\right)\left(e_{1,3} + e_{4,6}\right) = e_{3,3} + e_{6,6},$$

con lo que

$$E = E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3} = \mathrm{Id}$$

y, por tanto, $A = EA$ es un elemento bloque asociado a la matriz identidad E en R.

Nótese que

$$E_{2,1} = ABA^2 = AE_{1,1} = (e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5})(e_{1,1} + e_{4,4}) = e_{2,1} + e_{5,4}$$

y

$$E_{3,2} = A^2BA = E_{3,3}A = (e_{3,3} + e_{6,6})(e_{2,1} + e_{3,2} + e_{5,4} + e_{6,5}) = e_{3,2} + e_{6,5},$$

con lo que $A = E_{2,1} + E_{3,2}$. Luego $R \cong M_3(E_{11}RE_{11})$, con $E_{11}RE_{11} \cong M_2(\mathbb{F})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Corolario 4.1.9. *Sea* R *un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente no nulo de índice n tal que a^s es regular von Neumann para todo $s \in \mathbb{N}$. Entonces existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\{u_i\}_{i=1}^{k}$ de R que conmutan con a y tales que $a = \sum_{i=1}^{k} u_i a$ donde, para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. $u_i a$ es un elemento bloque nilpotente de índice n_i, con $n = n_1 > n_2 > \cdots > n_k$, asociado al idempotente bloque u_i.*

Demostración. Sea $a^{(1)} := a$. Por el Teorema 4.1.3 existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\{e_k^{(1)}\}_{k=1}^{n}$ tal que, si $u_1 := \sum_{k=1}^{n} e_k^{(1)}$, entonces $u_1a^{(1)} = u_1a = a^{(1)}u_1 = au_1$ es un elemento bloque nilpotente de índice $n_1 = n$ y $((1-u_1)a^{(1)})^{n-1} = 0$. Por lo tanto, $a^{(2)} := \left(1-u_1\right)a^{(1)} = \left(1-u_1\right)a$ es nilpotente de índice n_2, con $n = n_1 > n_2$. Veamos que $(a^{(2)})^{n^{2-1}}$ os regular von Neumann.

Como a^{n2-1} es regular von Neumann. entonces existe $c \in R$ tal que $a^{n2-1}ca^{n2-1} = a^{n2-1}$ y. si multiplicamos por $1 - u_1$ por ambos lados obtenemos

$$\left(1-u_1\right)a^{n_2-1}ca^{n_2-1}\left(1-u_1\right)=\left(1-u_1\right)a^{n_2-1}\left(1-u_1\right),$$

con lo que

$$(a^{(2)})^{n_2-1}c(a^{(2)})^{n_2-1} = ((1 - u_1)a)^{n_2-1}\, c((1 - u_1)a)^{n_2-1} =$$

$$(1 - u_1)a^{n_2-1}c(1 - u_1)a^{n_2-1} = (1 - u_1)a^{n_2-1}ca^{n_2-1}\,(1 - u_1) =$$

$$(1 - u_1)a^{n_2-1}(1 - u_1) = ((1 - u_1)a)^{n_2-1} = (a^{(2)})n^{2-1}.$$

Por el Teorema 4.1.3, existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\left\{e_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{n_2}$ tal que, si $u_2 : \sum_{k=1}^{n_2} e_k^{(2)}$, entonces $u_2a^{(2)} = u_2(1-u_1)a = a^{(2)}u_2$ es un elemento bloque nilpotente de índice $n_2 = n$ y $((1 - u_2)a^{(2)})^{n_2-1} = 0$. Además, como $e_k^{(2)} \in (1 - u_1)R(1 - u_1)$ para todo $k = 1,...,n_2$- entonces $u_2 \in (1 - u_1)R(1 - u_1)$, con lo $u_1u_2 = 0 = u_2u_1$. Ahora bleu, como $u_1u_2 = u_2u_1 = 0$, $u_2a^{(2)} = a^{(2)}u_2$ y $a^{(2)} = (1 - u_1)a$, entonces

$$u_2\left(1-u_1\right)a = u_2a^{(2)} = a^{(2)}u_2 = \left(1-u_1\right)au_2,$$

es decir,

$$u_2a - u_2u_1a = au_2 - u_1au_2 = au_2 - au_1u_2.$$

Luego $u_2a = au_2$.

Mediante un argumento recursivo, tenemos que existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\left\{u_i\right\}_{i=1}^{k}$ de R, tales que u_ia es un elemento bloque nilpotente de índice n^i asociado al idempotente bloque u_i para todo $i \in \{1, 2,..., k\}$, donde $n = n_1 > n_2 > \cdots > n_k$. Por último, $a = \sum_{i=1}^{k} u_ia$, ya que

$$a = u_1a + (1 - u_1)a = u_1a + u_2a + (1 - u_2)a = \sum_{i=1}^{k} u_ia.$$

□

Ahora seguimos el procedimiento clásico para extender los resultados anteriores a elementos algebraicos en un álgebra asociativa y unitaria R sobre un cuerpo $\mathbb{F}$.

Teorema 4.1.10. *Sea R un álgebra asociativa y unitaria sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea a un elemento algebraico de R tal que su polinomio mínimo $m_a(X)$ se descompone totalmente en $\mathbb{F}[X]$ como $\prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{n_i}$, donde $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Supongamos que $(a-\lambda_i)^{k_i}$ es regular uon Neumann para cada $k_i \leq n_i$, con $i = 1, \ldots, k$. Entonces existe una familia de idempotentes ortogonales $\{v_s\}_{s=1}^{k}$ y familias de idempotentes ortogonales $\{u_{s,i}\} \subset u_s R v_s$, todos conmutando con a, tal que $a = \sum_{s,i} u_{s,i}\, a$, donde cada $u_{s,i}a - \lambda_s u_{s,i} \in u_{s,i} R u_{s,i}$ es un elemento bloque nilpotente de índice $n_{s,i} \leq n_s$ asociado al idempotente bloque $u_{s,i}$, es decir, $u_{s,i} R u_{s,i} \cong \mathrm{M}_{ns,i}(S_{s,i})$ para algún álgebra unitaria $S_{s,i}$ y $u_{s,i}a$ tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

Demostración. Para cada $s = 1, 2, \ldots, k$, definamos $q_s(X) := \prod_{i \neq s}(X-\lambda_i)^{n_i}$. Así, tenemos que $q_1(X), \ldots, q_k(X)$ son coprimos. Luego, aplicando la Identidad de Bézout, existen $r_1(X), \ldots, r_k(X) \in \mathbb{F}[X]$ tales que

$$r_1(X)q_1(X) + r_2(X)q_2(X) + \cdots + r_k(X)q_k(X) = 1.$$

Si definimos $v_s := r_s(a)q_s(a)$ para cada s = 1, 2, . . . , k, tenemos que $\{v_s\}_{s=1}^{k}$ es una familia de idempotentes ortogonales que conmutan con a, ya que $v_s \in \mathbb{F}[a]$ para todo $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Luego $v_s(a-\lambda_s) \in v_s R v_s$ es un elemento nilpotente de R de índice n_s para todo $s \in \{1, \ldots, k\}$, por ser $\prod_{i=1}^{k}(a-\lambda_i)^{n_i} = 0$ y

$$r_1(a)q_1(a) + r_2(a)q_2(a) + \cdots + r_k(a)q_k(a) = 1.$$

Nótese que, como para cada $s = 1, 2, \ldots, k$, $v_s(a-\lambda_s) = (a-\lambda_s)v_s$ y $(a-\lambda_s)^{k_i}$ es regular von Neumann para todo $k_i \leq n_i$ entonces $v_s(a-\lambda_s)k_i$ es regular von Neuman para todo $k_i \leq n_i$. Luego, aplicando el corolario anterior a cada $v_s(a-\lambda_s) \in vs\ Rv_s$, existe una familia de idempotentes ortogonales $\{u_{s,i}\}_{i=1}^{m_s} \subset v_sRv_s$ que conmutan con $v_s(a-\lambda_s)$ y tales que

$$v_s(a-\lambda_s) = \sum_{i=1}^{m_s} u_{s,i}v_s(a-\lambda_s),$$

donde cada $u_{s,i}v_s(a-\lambda_s)$ es un elemento bloque nilpotente (asociado al idempotente bloque $u_{s,i}$) de índice $n_{s,i}$, donde $n_s = n_{s,1} > n_{s,2} > \ldots$. Para cada $s = 1, 2, \ldots, k$, se tiene que v_sRv_s es un anillo unitario con elemento unidad v_s, con lo que la familia de idempotentes $\left\{u_{s,i}\right\}_{i=1}^{m_s}$ puede completarse a una familia completa de idempotentes ortogonales añadiéndole el idempotente

$$u_{s,m_s+1} = v_s - \sum_{i=1}^{m_s} u_{s,i},$$

siempre que $u_{s,ms+1} \neq 0$. De esta forma, tenemos que $u_{s,ms+1}(a-\lambda_s) = 0$, con lo que $\left\{u_{s,i}\right\}_{i=1}^{m_s+1}$ es una familia completa de idempotentes ortogonales que conmutan con $v_s(a-\lambda_s)$, tales que

$$v_s\left(a-\lambda_s\right) = \sum_{i=1}^{m_s} u_{s,i}v_s\left(a-\lambda_s\right),$$

y donde cada $u_{s,i}v_s(a-\lambda_s)$ es un elemento bloque nilpotente (asociado al idempotente bloque $u_{s,i}$) de índice $n_{s,i}$, donde $ns = n_{s,1} > n_{s,2} > \ldots > n_{s,m_s+1} = 1$.

Ahora bien, como $\left\{u_{s,i}\right\}_{i=1}^{m_s+1} \subset v_sRv_s$ para cada $s \in \{1,2,\ldots, k\}$, entonces $u_{s,i}v_s = u_{s,i} = v_su_{s,i}$ para todo $u_{s,i}$, con lo que cada $u_{s,i}(a-\lambda_s) = u_{s,i}a - \lambda_s u_{s,i} \in u_{s,i}Ru_{s,i}$ es un elemento bloque nilpotente, asociado al idempotente bloque $u_{s,i}$, de índice $n_{s,i}$ donde $n_s = n_{s,1} > n_{s,2} > \ldots > n_{s,ms+1}$. Además, como cada $u_{s,i}$ conmuta con $v_s(a-\lambda_s)$, entone es cada $u_{s,i}$ conmuta con a, ya que

$$u_{s,i}a - \lambda_s u_{s,i} = u_{s,i}v_s\left(a-\lambda_s\right) = \left(a-\lambda_s\right)v_su_{s,i} = \left(a-\lambda_s\right)u_{s,i} = au_{s,i} - \lambda_s u_{s,i}.$$

Por otra parte, como $\sum_{i=1}^{m_s+1} u_{s,i} = v_s$ y $\sum_{s=1}^{k} v_s = 1$, entonces

$$\sum_{s,i} u_{s,i} a = \sum_{s} v_s a = a.$$

Por último, aplicando el Teorema 4.1.3 a cada elemento $u_{s,i}v_s(a - \lambda_s) = u_{s,i}(a - \lambda_s) = u_{s,i}(a - \lambda_s)u_{s,i} \in u_{s,i} R u_{s,i} \cong M_{n\,s,i}(S_{s,i})$, con $S_{s,i}$ un álgebra unitaria, tenemos que $u_{s,i}(a - \lambda_s)$ puede verse como una matriz de tamaño $n_{s,i} \times n_{s,i}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $u_{s,i}a$ puede verse como una matriz de tamaño $n_{s,i} \times n_{s,i}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Corolario 4.1.11. *Todo elemento algebraico en un álgebra unitaria regular von Neumann sobre un cuerpo algebraicamente cerrado admite una forma canónica de Jordan.*

Observación 4.1.12. En general, ni el inverso de Rus ni el idempotente asociado en el Teorema 4.1.3 son únicos: si $R = M_3(\mathbb{F})$ y $a = e_{1,2} \in R$, el elemento $b = e_{2,1} \in R$ es un inverso de Rus de a y a es un elemento de bloque con idempotente bloque asociado

$$e = ba + ab = e_{2,1}e_{1,2} + e_{1,2}e_{2,1} = e_{1,1} + e_{2,2}.$$

El elemento $b' = e_{2,1} + e_{3,1} \in R$ es otro inverso de Rus de a y a es un elemento de bloque con idempotente de bloque asociado

$$e' = ba + ab = (e_{2,1} + e_{3,1})e_{1,2} + e_{1,2}(e_{2,1} + e_{3,1}) = e_{1,1} + e_{2,2} + e_{3,2}.$$

Sin embargo, veremos que todos los idempotentes bloque coinciden cuando son centrales.

El siguiente resultado es (*c*) ⇒ (*a*) de [39, Theorem 7.2].

Lema 4.1.13. *Sea R un anillo no necesariamente unitario y sea* $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ *un conjunto de idempotentes ortogonales no nulos, donde uno de ellos puede ser de la forma* $1 - e \in R^1$, *con e un idempotente de R y* $R^1 = R + \mathbb{Z}1$ *la, unitilización de R. Supongamos que existe* $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, n-1$, *con* $e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots e_{n-1} x_{n-1} e_n \neq 0$. *Entonces R tiene un elemento nilpotente de índice n.*

Demostración. Consideremos el elemento $a := \sum_{i=1}^{n-1} e_i x_i e_{i+1} \in R$. Entonces

a es nilpotente de índice *n,* ya que $a^{n-1} = e_1 x_1 e_2 x_2 \cdots e_{n-1} x_{n-1} e_n \neq 0$ y $a^n = 0$.

Definición 4.1.14. Sea *R* un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de índice *n* tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Diremos que *a* es un *bloque maximal* si uno de los idempotentes bloque asociados a *a* está en el centro de *R*, es decir, si existe un inverso de Rus de *a* tal que el idempotente construido en el Teorema 4.E3 es central.

Proposición 4.1.15. *Sea R un anillo y sea* $a \in R$ *un bloque maximal. Entonces todos los idempotentes bloque centrales asociados a a coinciden.*

Demostración. Sea. $a \in R$ un elemento nilpotente de índice *n* tal que a^{n-1} es regular von Neumann y supongamos que *e* es un idempotente bloque asociado a *a* tal que $e \in Z(R)$. Por el apartado 4 del Teorema 4.1.3, tenemos que $eRe \cong M_n(e_1 R e_1)$ y $ea = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}$. Denotemos por (a^{n-1}) al ideal generado por a^{n-1}. Veamos que $\langle a^{n-1} \rangle = eR$. Por una parte, como $ea = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}$, entonces

$$a^{n-1} = ea^{n-1} = (ea)^{n-1} = e_{n,1},$$

con lo que

$$e_{i,j} = e_{i,n} e_{n,1} e_{1,j} \in \langle a^{n-1} \rangle$$

para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ y, por tanto, $e \in \langle a^{n-1} \rangle$. Luego $eR \subseteq \left\langle a^{n-1} \right\rangle$. Por otra parte, como $a^{n-1} = ea^{n-1} \in eR$ y eR es un ideal de R por ser $e \in Z(R)$, entonces $\left\langle a^{n-1} \right\rangle \subseteq eR$. Por lo tanto, $\left\langle a^{n-1} \right\rangle$ es un anillo unitario, siendo e su elemento unidad.

Supongamos ahora que $e' \in Z(R)$ es otro elemento bloque asociado a a. Repitiendo el mismo razonamiento, tenemos que $\langle a^{n-1} \rangle = e'R$, siendo e' el elemento unidad de $\langle a^{n-1} \rangle$. con lo que $e' = e$. □

Corolario 4.1.16. *Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de R de índice maximal n tal que a^{n-1} es regular von Niinmann. Entonces a es un bloque maximal y sus idempotentes bloque asociados coinciden.*

Demostración. Como a es nilpotente de índice n y a^{n-1} es regular von Neumann entonces, por el Teorema 4.1.3, existen n idempotentes ortogonales no nulos $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ tales que $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ es un idempotente bloque asociado a a.

Veamos que $eR(1 - e) = 0 = (1 - e)Re$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $eR(1 - e) \neq 0$. Como $eR(1 - e) \neq 0$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in R$ tales que $e_{k,k}x(1-e) \neq 0$, con lo que

$$e_{1,1}e_{1,2}e_{2,2}\cdots e_{k-1,k-1}e_{k-1,k+1}e_{k+1,k+1}\cdots e_{n,n}e_{n,k}e_{k,k}x(1-e) \neq 0.$$

Por el lema 4.1.13, existe un elemento nilpotente de índice $n + 1$, lo cual es una contradicción, ya que R no tiene elementos nilpotentes de índice mayor que n. Luego $eR(1 - e) = 0$.

De forma análoga, se tiene que $(1 - e)Re = 0$ y, por tanto, $e \in Z(R)$, con lo que todos los idempotentes bloque asociados a a son centrales. Aplicando ahora la Proposición 4.1.15, obtenemos que todos los idempotentes bloques asociados a a coinciden. □

Varios autores han estudiado los anillos semiprimos con índice de nilpo- tencia acotado como, por ejemplo, los trabajos de Beidar y Mikhalev [15] y Hannah [40]. Mencionamos también el resultado de Armendáriz [4, Theorem 1], donde demostró que un anillo semiprimo de índice máximo n es un producto subdirecto de anillos primos de índices menores o iguales que n.

En el siguiente resultado describimos la estructura de los anillos con un elemento nilpotente a de índice máximo n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Con algunas condiciones adicionales sobre la regularidad del anillo, damos descripciones más precisas sobre los coeficientes de los anillos de matrices involucrados. Algunos de los apartados de este teorema ya han aparecido en la literatura (por ejemplo, el segundo punto es [39, Lemma 7.17] y el quinto punto es [39, Theorem 7.9]).

Teorema 4.1.17. *Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de índice maximal n tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Entonces*

1. *Cualquier inverso de Rus de a da lugar al mismo idempotente (central) e y $R = eRe \oplus (1-e)R(1-e)$. Además, $eRe \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario sin elementos nilpotentes no nulos.*

2. *Si R es regular von Neumann, $eRe \cong M_n(S)$, donde S es regular abeliano.*

3. *Si R es indescomponible, $R \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario sin elementos nilpotentes no nulos.*

4. *Si R es primo, $R \cong M_n(S)$, donde S es dominio unitario.*

5. *Si R es indescomponible y regular von Neumann, $R \cong M_n(\Delta)$. donde Δ es un anillo de división.*

En cualquier caso, si. R es indescomponible, $e = 1$ y a es un elemento bloque.

Demostración. Como a es nilpotente de índice n y a^{n-1} es regular von Neumann entonces, por el Teorema 4.1.3, existen n idempotentes ortogonales no nulos $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ tales que $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ y $ea = ae \in eRe \cong M_n(e_1Re_1)$. $i=1$

1. Por el Corolario 4.1.16, solo existe un idempotente bloque (central) asociado a a y $R = eRe \oplus (1-e)R(1-e)$. Supongamíos que $b \in e_1Re_1$ es un elemento nilpotente no nulo de índice m. Veamos que $b + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,k+1}$ es nilpotente de índice $n+1$. En primer lugar, nótese que como $b \in e_1Re_1 \subset R$ y el índice de nilpotencia maximal en R es n, entonces $m \leq n$. Ahora bein, dado $l \in N$, tenemos que

$$\left(b + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,\,k+1}\right)^{l} = b^{l} + be_{1,\,l} + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,\,k+l},$$

ya que $b = e_{1,1}be_{1,1} \in e_1 Re_1$. En particular, tenemos que

$$\left(b + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,\,k+1}\right)^{n-1} = b^{n-1} + be_{1,\,n-1} + e_{1,\,n},$$

con lo que

$$\left(b + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,\,k+1}\right)^{n} = b^{n} + be_{1,\,n} = be_{1,\,n} \neq 0$$

por ser $b = be_{1,1} = be_{1,n}e_{n,1} \neq 0$. Por lo tanto, $b + \sum_{k=1}^{n-1} e_{k,k+1}$ es un elemento nilpotente de índice $n + 1 > n$, lo cual es una contradicción. Luego e_1Re_1 no tiene elementos nilpotentes no nulos.

2. Si R es regular von Neumann, entonces $S = e_1Re_1$ es regular von Neumann. Como S no tiene elementos nilpotentes no nulos y es regular von Neumann, entonces S es regular abeliano ([39, Theorem 3.2]).

3. Si R es indescomponible entonces $e = 1$, ya que $ea^{n-1} = a^{n-1} \neq 0$. por ser a nilpotente de índice n. Luego, por el apartarlo 1, tenemos que $R \cong M_n(S)$ y $S = e_1Re_1$ es un anillo unitario sin elementos nilpotentes no nulos.

4. Si R es primo, entonces R es indescomponible y, por tanto, $e = 1$ y $R \cong M_n(S)$. Como R es primo, entonces $S = e_1Re_1$ es también primo. Como S es un anillo primo y no tiene elementos nilpotentes no nulos, entonces S es un dominio.

5. Como R es indescomponible y regular von Neumann, entonces $R \cong M_n(S)$. donde S es regular abeliano. Veamos que S es un anillo de división. Sea $x \in S$, con $x \neq 0$. Como S es regular von Neumann, existe entonces $y \in S$ tal que $xyx = x$ y. por tanto, xy es un idempotente (central) de S distinto de cero. Luego $\sum_{i=1}^{n}(xy)\mathrm{e}_{i,i} \in R$ es un idempotente central no nulo de R. Ahora bien, como $R \cong M_n(S)$ es indescomponible y $xy \neq 0$, entonces $1 = \sum_{i=1}^{n}(xy)\mathrm{e}_{i,i} = (xy)\sum_{i=1}^{n} e_{i,i}$, con lo que $xy = 1$. Por lo tanto, S es un anillo de división.

□

CAPÍTULO 5. RESULTADOS Y MÉTODOS

5.1. Resultados principales

A modo de resumen, los principales resultados de este trabajo son los siguientes:

1. El Corolario 3.1.4 ([36]), que nos indica bajo qué condiciones un álgebra de Jordan L_a, asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual que 3 en un álgebra de Lie L, es especial. Concretamente:

   Sea L un álgebra de Lie fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$. y sea $a \in L$ un elemento Jordan. Si $\mathrm{Ker}_L a$ *no es subálgebra de L, entonces* L_a *es un álgebra de Jordan fuertemente prima y especial.*

2. El Corolario 3.2.6 ([36]), con el que obtenemos la especialidad del subcociente asociado a un ideal interno abeliano B de un álgebra de Lie L:

   Sea L un álgebra de Lie fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ. Sea B un ideal interno abeliano de L y consideremos $\mathrm{Ker}_L B$. *Supongamos que existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$. *Si* $\mathrm{Ker}_L B$ *no es subálgebra, de L, entonces el subeoeiente* $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$ *es un par de Jordan especial fuertemente primo.*

3. El apartado 4 del Teorema 4.1.3 ([38]) que nos permite caracterizar un elemento $ea \in R$ como un bloque de Jordan de tamaño n x n. donde a es un elemento nilpotente de R de índice n, con a^{n-1} regular von Neumann, y e es un idempotente de R que se construye a partir de a:

   Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente de R con índice n tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Sea, $b \in R$ un inverso de Rus de a. Entonces existen n idempotentes ortagonales no nulos $\left\{e_k\right\}_{k=1}^{n}$ *en R (que dependen de b) tales que, si* $e = \sum_{k=1}^{n} e_k$, *entonces* $eRe \cong M_n(e_1 R e_1)$ *y, si* $\left\{e_{i,j}\right\}_{i,j=1}^{n}$ *denotan a las matrices unidades del anillo de matrices eRe, entonces* $ea = eae = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1,k}$.

Gracias a este resultado y al hecho que se recoge en el punto 3 del Teorema 4.1.3, que nos indica que $(1 - e)a$ es nilpotente de índice menor que n, tenemos el Corolario 4.1.9 ([38]) que nos descompone un elemento nilpotente a en un anillo arbitario R como suma de elementos bloque nilpotentes siempre que todas las potencias del elemento a sean regular von Neumann:

Sea R un anillo y sea $a \in R$ un elemento nilpotente no nulo de índice n tal que a^s es regular von Neumann para todo $s \in \mathbb{N}$. Entonces existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\{u_i\}_{i=1}^{k}$ de R que conmutan con a y tales que $a = \sum_{i-1}^{k} u_i a$ $u_i a$ donde, para cada, $i \in \{1, 2,..., k\}$. $u_i a$ es un elemento bloque nilpotente de índice n_i, con $n = n_1 > n_2 > ... > n_k$, asociado al idempotente bloque u_i.

En otras palabras, este resultado nos aporta una forma canónica de Jordan del elemento nilpotente a.

5.2. Métodos utilizados

La metodología aplicada para lograr los resultados citados anteriormente podrían resumirse de la siguiente forma:

1. Para el estudio de la especialidad del álgebra de Jordan L_a, la clave está en utilizar el álgebra 5-graduada

$$\hat{L} = G_{-2} \oplus G_{-1} / G_{-2} \oplus G_0 / G_{-1} \oplus G_1 / G_0 \oplus G_2 / G_1,$$

que aparece gracias a la filtración principal definida por a,

$$G_{-2} \subset G_{-1} \subset G_0 \subset G_1 \subset G_2,$$

donde $G_{-2} = (a)_L = [a, [a, L]] + \phi a$, $G_1 = \mathrm{Ker}_L a$ y $G_2 = L$, dada en [35].

Gracias a esta filtración, obtenemos que el par de aplicaciones

$$\Psi_1 : G_{-2} \to \mathrm{Hom}\left(G_1 / G_0, G_{-1} / G_{-2}\right)$$

$$\Psi_{-1} : G_2 / G_1 \to \mathrm{Hom}\left(G_{-1} / G_{-2}, G_1 / G_0\right)$$

definidas por $\psi_1(b) = \mathrm{ad}_b$ para todo $b \in [a, [a, L]] + \phi a$, y $\psi_{-1}(\bar{x}) = \mathrm{ad}_{\bar{x}}$ para todo $\bar{x} \in L/\mathrm{Ker}_L a$, es un homomorfismo de pares de Jordan entre $V = (G_{-2}, G_2/G_1)$ y el par de Jordan especial

$$\left(\mathrm{Hom}\left(G_1/G_0, G_{-1}/G_{-2}\right), \mathrm{Hom}\left(G_{-1}/G_{-2}, G_1/G_0\right)\right)^{(+)}.$$

Por último, gracias a un resultado técnico, obtenemos que el núcleo de este homomorfismo entre pares de Jordan es cero si L es un álgebra de Lie fuertemente prima tal que $\mathrm{Ker}_L a$ no sea un subálgebra de L.

2. Dado un ideal interno abeliano B, para determinar las condiciones bajo las cuales el subcociente $(B, \mathrm{Ker}_L B)$ es especial se sigue el mismo procedimiento, sin embargo, en este caso no disponemos de una filtración adecuada. Por ello, el primer paso es construir una filtración asociada a B, es decir, una cadena de conjuntos

$$\ldots \subset F_{-n} \subset F_{-n+1} \subset \ldots \subset F_0 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n \subset \ldots$$

donde $F_{-m} := \{0\}$ y $F_m := L$ para todo $m > n$ y

$$\begin{aligned}
F_{-n} &:= B \\
&\vdots \\
F_{-k} &:= \left[B, \mathrm{Ker}_L B\right]^k + B, \text{para } k = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
F_0 &:= \left\{x \in L : \left[x, B\right] \subset B\right\} \\
&\vdots \\
F_s &:= \mathrm{ad}^{n-s-1}_{[B, \mathrm{Ker}_L B]}\left(\mathrm{Ker}_L B\right) + F_0, \text{para } s = 1, \ldots, n-1 \\
&\vdots \\
F_n &:= L
\end{aligned}$$

De esta forma, se obtiene que el álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida

$$\hat{L} = \underbrace{F_{-n}}_{\hat{L}_{-n}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{F_n / F_{n-1}}_{\hat{L}_n}$$

tiene como par de Jordan asociado al subcociente

$$\left(\hat{L}_{-n}, \hat{L}_n\right) = \left(B, L/\mathrm{Ker}_L B\right)$$

y, por tanto, el par de aplicaciones

$$\Psi_{n-1} : \hat{L}_{-n} \to \mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1}\right)$$

$$\Psi_{1-n} : \hat{L}_{n} \to \mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1}\right)$$

definidas por $\Psi_{\sigma(n-1)}(x)(y)$ $\mathrm{ad}_x y$ para todo $x \in \hat{L}_{-\sigma n}$ y para todo $y \in \hat{L}_{n-1}$, si $\sigma = +$ o $y \in \hat{L}_{-1}$ si $\sigma = -$, es un homomorfismo de pares de Jordan entre $(B, L/\mathrm{Ker}_L B) = (\hat{L}_{-n}, \hat{L}_n)$ y el par de Jordan especial

$$\left(\mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{n-1}, \hat{L}_{-1}\right), \mathrm{Hom}\left(\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{n-1}\right)\right)^{(+)}.$$

Para poder determinar esta $\mathbb{Z}$-filtración acotada asociada a un ideal interno abeliano B necesitamos una condición aparentemente fuerte: que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, [\mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ Esta restricción termina resultando menos restrictiva de lo que parece, ya que se verifica en las álgebras de Lie mas usuales.

Por último, gracias a algunos resultados técnicos, obtenemos que el núcleo del homomorfismo entre pares de Jordan (Ψ_{n-1}, Ψ_{1-n}) es nulo si L es un álgebra, de Lie fuertemente prima, y $\mathrm{Ker}_L B$ es un subalgebra de L.

3. Para determinar la forma canónica de Jordan del elemento nilpotente a dada en el Corolario 4.1.9. debemos construir un idempotente e de R, que conmuta con a, y tal que $eRe \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario. Gracias a este idempotente, podemos expresar el elemento a como $a = ea + (1 - e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño n x n.

   Para ello, hacemos uso de un inverso de Rus de a, esto es, un elemento $b \in R$ tal que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1}b = b$ y $ba^k b = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Dado un inverso de Rus b del elemento a, podemos construir una familia de idempotentes $\left\{e_i\right\}_{i=1}^{n}$ de man era que $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Además, se tiene que el anillo unitario S que aparecía como anillo de escalares bajo el isomorfismo $eRe \cong M_n(S)$ es $S = e_1 R e_1$.

PARTE III

DISCUSIÓN GENERAL

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES PARCIALES

En la primera parte de este trabajo nos centramos en estudiar la especialidad del álgebra de Jordan asociado a un elemento ad-nilpotenten de índice menor o igual a 3 y la especialidad del subcociente asociado a un ideal interno abeliano ([36]).

En el caso del álgebra de Jordan L_a asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual a 3 de un álgebra de Lie L fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, tenemos que L_a es especial si el conjunto

$$\mathrm{Ker}_L a = \left\{ x \in L : \left[a, \left[a, x \right] \right] = 0 \right\}$$

no es un subálgebra de L. Para ello, utilizamos el trabajo de Esther García y Miguel Gómez [35] en el que se demuestra que para cualquier elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 $a \in L$ da lugar a una filtración

$$G_{-2} \subset G_{-1} \subset G_0 \subset G_1 \subset G_2,$$

donde $G_{-2} = (a)_L = [a, [a, L]] + \Phi a$, $G_1 = \mathrm{Ker}_L a$ y $G_2 = L$, lo que induce un álgebra 5-graduada

$$\hat{L} = G_{-2} \oplus G_{-1} / G_{-2} \oplus G_0 / G_{-1} \oplus G_1 / G_0 \oplus G_2 / G_1.$$

Nótese que, es este caso, se tiene que

$$\left[(a)_L, \mathrm{Ker}_L a \right] = \left[G_{-2}, G_1 \right] \subset G_{-1}$$

con lo que $[(a)_L, \mathrm{Ker}_L a]^2 \subset G_{-2} = (a)_L$ y $[(a)_L, \mathrm{Ker}_L a]^3 = 0$. Esta filtración principal asociada a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 y sus propiedades serán de utilidad para poder construir posteriormente una filtración asociada a un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie.

Cuando B es un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie L fuertemente prima, no solo tenemos que pedir que el conjunto

$$\mathrm{Ker}_L B = \left\{ x \in L : \left[B, \left[B, x\right]\right] = 0 \right\}$$

no sea un subálgebra de L, sino que necesitamos que $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ sea una subálgebra nilpotente de L. Esta condición se tiene cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$, ya que esto implica que

$$\left[B, \mathrm{Ker}_L B\right]^{n+1} \subset \left[B, \left[B, \mathrm{Ker}_L B\right]\right] = 0.$$

Bajo la condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ para, algún $n \in \mathbb{N}$. podemos construir una $\mathbb{Z}$-filtración acotada asociada al ideal interno abeliano B de manera, que B es el primer submódulo no nulo de la filtración. Además, el par de Jordan asociado al álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada inducida por esta filtración coincide con el subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$. Esta filtración extiende a la filtración principal inducida por un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 definida en [35].

Por lo tanto, si pedimos como condición extra que exista $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$, no solo tendremos que $[B, \mathrm{Ker}_L B]$ es nilpotente, sino que además podremos utilizar la filtración inducida por el ideal interno abeliano B para demostrar la especialidad del subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$.

En ese caso, debemos analizar la hipótesis $[B, Ker_L B]^n \subset B$ para algún $n \in \mathbb{N}$, llegando a la conclusión de que no es una hipótesis muy restrictiva, ya que se verifica en las álgebras de Lie más usuales: si B es un ideal interno abeliano de un álgebra asociativa semiprima R, B es un ideal interno abeliano de los elementos antisimétricos de un álgebra asociativa semiprima con involución, o B es un ideal interno abeliano de longitud finita de un álgebra de Lie no degenerada, la condición $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ siempre se verifica para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, queda abierta la cuestión de si siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ en mi álgebra, de Lie L no degenerada, fuertemente prima o simple.

Analizamos también la relación existente entre la filtración principal asociada a un elemento ad-nilpotente $a \in L$ de índice menor o igual que 3 en un álgebra de Lie no degenerada sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y la filtración asociada al ideal interno abeliano $B = (a)_L = [a, [a, L]] + \Phi a$. Si denotamos por $\{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a la filtración principal definida por a dada en [35] y por $\{F_i\}_{ie\mathbb{Z}}$ a la filtración asociada al ideal interno abeliano $B = (a)_L$, tenemos entonces que

$$\begin{array}{ccccccccccccc} F_{-2} & \subset & F_{-1} & \subset & F_0 & \subset & F_1 & = & K & \subset & F_2 & = & L \\ \| & & \| & & \cup & & \| & & & & \| & & \\ G_{-2} & \subset & G_{-1} & \subset & G_0 & \subset & G_1 & = & K & \subset & G_2 & = & L \end{array}$$

Además, ambas filtraciones coinciden cuando $a \in [a, [a, L]]$.

En la segunda parte del trabajo obtenemos una forma canónica de Jordan de un elemento nilpotente en un anillo arbitrario ([38]). Si $a \in R$ es un elemento nilpotente del índice n y a^{n-1} es regular von Neumann, podemos construir un idempotente $e \in R$, que conmuta con a, y tal que $eRe \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario. Además, el elemento a se descompone como $a = ea + (1 - e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$ y $(1 - e)a$ un elemento nilpotente de índice menor que n. Tal idempotente e aparece gracias al concepto de inverso de Rus del elemento a, esto es, un elemento b de R verificando que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1}b = b$ y $ba^kb = 0$ para, todo $k \in \{0, 1,..., n - 2\}$. Dado un inverso de Rus de a, definimos una familia de idempotentes $\{e_i\}_{i=1}^{n}$, con $e_i = a^{i-1}ba^{n-i}$, tal que $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Gracias a este resultado, demostramos que si $a \in R$ es un elemento nilpotente tal que a^s es regular von Neumann para todo $s \in \mathbb{N}$. entonces existe una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\{u_i\}_{i=1}^{k}$, todos ellos conmatando con a. tales que a se pueden descomponer como $a = \sum_{i=1}^{k} u_i a$, donde cada elemento $u_i a$ es mi elemento bloque nilpotente de índice n_i. con $n = n_1 > n_2 > \cdots > n_k$, asociado al idempotente bloque u_i. Al ser cada sumando $u_i a$ un bloque de Jordan, llamaremos forma canónica de Jordan del elemento nilpotente a a la suma de estos bloques de Jordan.

Aplicamos estos resultados para describir la estructura de los anillos con un elemento nilpotente a de índice máximo n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Con algunas condiciones adicionales sobre la regularidad del anillo, damos descripciones más precisas sobre los coeficientes de los anillos de matrices involucrados. Por ejemplo, si R es regular von Neumann, entonces $eRe \cong M_n(S)$, donde S es regular abeliano y, si además R es indescomponible, entonces S resulta ser un anillo de división.

PARTE IV

CONCLUSIONES GENERALES

PRINCIPALES HALLAZGOS E IMPLICACIONES

La posibilidad de poder ver un sistema de Jordán dentro de un sistema asociativo ha sido considerada desde el comienzo de la Teoría de Jordan. Por ello, uno de los resultados principales de este trabajo ha sido dar condiciones bajo las cuales sistemas de Jordan asociados a un álgebra de Lie L fuertemente prima son especiales. Se ha estudiado la especialidad tanto del álgebra de Jordan asociado a un elemento ad-nilpotente de índice menor o igual que 3 como del subcociente asociado a un ideal interno abeliano. Además, ambas condiciones son condiciones Lie, aunque tratamos con sistemas de Jordan.

En el caso del álgebra de Jordan L_a asociada a un elemento ad-nilpotente a de índice menor o igual que 3 de un álgebra de Lie L fuertemente prima sobre un anillo de escalares ϕ, con $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, tenemos que L_a es especial si $\mathrm{Ker}_L a$ no es un subálgebra de L.

Cuando B es un ideal interno abeliano de un álgebra de Lie L fuertemente prima, tal que $[B, \mathrm{Ker}_L B]^n \subset B$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $\mathrm{Ker}_L B$ no sea un subálgebra de L, entonces el subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$ es especial. Gracias a este resultado obtenemos que si R es un álgebra asociativa sobre un anillo de escalares ϕ, tal que $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in \phi$, y consideramos el álgebra de Lie $L = R^- /Z(R)$, entonces el subcociente $(B, L/\mathrm{Ker}_L B)$ es especial y fuertemente primo para cualquier ideal interno abeliano B de L. Estos resultados se encuentra en el artículo publicado [36].

Otro resultado de suma importancia es poder caracterizar un elemento $ea \in R$ como un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$, donde a es un elemento nilpotente de R de índice n, con a_{n-1} regular von Neumann, y e es un idempotente de R. Concretamente, si $a \in R$ es un elemento nilpotente del índice n con a^{n-1} es regular von Neumann, podemos encontrar un elemento $b \in R$ tal que $a^{n-1}ba^{n-1} = a^{n-1}$, $ba^{n-1}b = b$ y $ba^k b = 0$ para, todo $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.

A un elemento con estas características se le denomina inverso de Rus de b. Dado un inverso de Rus del elemento a, construimos una familia de idempotentes $\{e_i\}_{i=1}^n$, con $e_i = a^{i-1}ba^{n-i}$. De esta forma, obtenemos que $e = \sum_{i=1}^{k} e_i$ es un idempotente que conmuta con a y tal que $eRe \cong M_n(S)$, donde S es un anillo

unitario. Haciendo uso de este idempotente e, el elemento a se descompone como $a = ea + (1 - e)a$, siendo $ea \in eRe \cong M_n(S)$ un bloque de Jordan de tamaño $n \times n$, asociado al idempotente bloque e, y $(1 - e)a$ un elemento nilpotente de índice menor que n.

Gracias a esto podemos describir la estructura de los anillos con un elemento nilpotente a de índice máximo n y tal que a^{n-1} es regular von Neumann. Concretamente, si R es indescomponible, entonces a es un elemento bloque asociado al idempotente $e = 1$ y $R \cong M_n(S)$, donde S es un anillo unitario sin elementos nilpotentes no nulos. Si además R es regular von Neumann, entonces $R \cong M_n(\Delta)$, donde Δ es un anillo de división. Por otra parte, si R es regular von Neumann, entonces $eRe \cong M_n(S)$, donde S es regular abeliano y, si R es primo, $R \cong M_n(S)$, donde S es dominio unitario.

Además, podemos utilizar también este resultado para determinar la forma canónica de un elemento nilpotente en un anillo R. Si a es un elemento nilpotente de R tal que para todo $s \in \mathbb{N}$ se verifica que a^s es regular von Neumann, podemos construir una familia de idempotentes ortogonales no nulos $\{u_i\}^k{}_{i=1}$, tales que $u_i a = a u_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, de manera que a se puede descomponer en una suma finita de elementos bloques nilpotentes de índices decrecientes asociados a esos idempotentes. Concretamente, se tiene que $a = \sum_{i=1}^{k} u_i a$, donde cada elemento $u_i a$ es un elemento bloque nilpotente de índice n_i, con $n = n_1 > n_2 > \ldots > n_k$, asociado al idempotente bloque u_i. A esta descomposición en bloques de Jordan se le denomina forma canónica de Jordan del elemento nilpotente a. Estos resultados pueden verse en el artículo publicado [38].

BIBLIOGRAFÍA COMÚN

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Adrian Albert. On a certain algebra of quantum mechanics. *Ann. of Math. (2),* 35(1):65–73, 1934.

[2] José A. Anquela, Teresa Cortés, Ottmar Loos, and Kevin McCrimmon. An elemental characterization of strong primeness in Jordan systems. *J. Pure Appl. Algebra,* 109(1):23–36, 1996.

[3] José A. Anquela, Teresa Cortés, and Efim Zelmanov. Local nilpotency of the McCrimmon radical of a Jordan system. *Tr. Mat. Inst. Steklova,* 292(Algebra, Geometriya i Teoriya Chisel):7–15, 2016.

[4] Efraim P. Armendariz. On semiprime rings of bounded index. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 85(2):146–148, 1982.

[5] A. A. Baranov and J. Rowley. Inner ideals of simple locally finite Lie algebras. *J. Algebra,* 379:11–30, 2013.

[6] Y. Barnea and D. S. Passman. Filtrations in semisimple Lie algebras. I. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 358(5):1983–2010, 2006.

[7] Y. Barnea and D. S. Passman. Filtrations in semisimple Lie algebras. II. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 360(2):801–817, 2008.

[8] Willard E. Baxter and Wallace S. Martindale, III. The extended centroid in $*$-prime rings. *Comm. Algebra,* 10(8):847–874, 1982.

[9] K. I. Beidar, W. S. Martindale, III, and A. V. Mikhalev. *Rings with generalized identities,* volume 196 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[10] K. I. Beidar, K. C. O'Meara, and R. M. Raphael. On uniform diagonalisation of matrices over regular rings and one-accessible regular algebras. *Comm. Algebra,* 32(9):3543–3562, 2004.

[11] G. Benkart. The Lie inner ideal structure of associative rings. *J. Algebra,* 43(2):561–584, 1976.

[12] G. Benkart. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 232:61–81, 1977.

[13] G. Benkart and A. Fernández López. The Lie inner ideal structure of associative rings revisited. *Comm. Algebra,* 37(11):3833–3850, 2009.

[14] Georgia Benkart. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 232:61–81, 1977.

[15] K. I. Beĭdar and A. V. Mikhalëv. Semiprime rings with bounded indexes of nilpotent elements. *Trudy Sem. Petrovsk.,* (13):237–249, 259–260, 1988.

[16] Bailey Brown and Neal H. McCoy. Prime ideals in nonassociative rings. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 89:245–255, 1958.

[17] J. Brox, A. Fernández López, and M. Gómez Lozano. Inner ideals of Lie algebras of skew elements of prime rings with involution. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 144(7):2741–2751, 2016.

[18] J. Brox, A. Fernández López, and M. Gómez Lozano. Clifford elements in Lie algebras. *J. Lie Theory,* 27(1):283–294, 2017.

[19] J. Brox, E. García, and M. Gómez Lozano. Jordan algebras at Jordan elements of semiprime rings with involution. *J. Algebra,* 468:155–181, 2016.

[20] J. Brox, E. García, Gómez Lozano M., R. Muñoz Alcázar, and G. Vera de Salas. Ad-nilpotent elements of skew-index in semiprime associative algebras with involution *(submitted).*

[21] J. Brox, E. García, Gómez Lozano M., R. Muñoz Alcázar, and G. Vera de Salas. A description of ad-nilpotent elements in semiprime rings with involution. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.,* 2021.

[22] A.M. Cohen. Inner ideals in Lie algebras and spherical buildings, *ar-Xiv:2010.15897.*

[23] C. Draper, A. Fernández López, E. García, and M. Gómez Lozano. The inner ideals of the simple finite dimensional Lie algebras. *J. Lie Theory,* 22(4):907–929, 2012.

[24] J. R. Faulkner. On the geometry of inner ideals. *J. Algebra,* 26:1–9, 1973.

[25] A. Fernández López. *Jordan structures in Lie algebras,* volume 240 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[26] A. Fernández López, E. García, and M. Gómez Lozano. Inner ideals of finitary simple Lie algebras. *J. Lie Theory,* 16(1):97–114, 2006.

[27] A. Fernández López, E. García, and M. Gómez Lozano. The Jordan algebras of a Lie algebra. *J. Algebra,* 308(1):164–177, 2007.

[28] A. Fernández López, E. García, and M. Gómez Lozano. An Artinian theory for Lie algebras. *J. Algebra,* 319(3):938–951, 2008.

[29] A. Fernández López, E. García, and M. Gómez Lozano. Inner ideal structure of nearly Artinian Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 137(1):1–9, 2009.

[30] A. Fernández López, E. García, M. Gómez Lozano, and E. Neher. A construction of gradings of Lie algebras. *Int. Math. Res. Not. IMRN,* (16):Art. ID rnm051, 34, 2007.

[31] A. Fernández López, E. García Rus, M. Gómez Lozano, and M. Siles Molina. Jordan canonical form for finite rank elements in Jordan algebras. *Linear Algebra Appl.,* 260:151–167, 1997.

[32] Antonio Fernández López. Prime nondegenerate Jordan algebras with nonzero socle and the symmetric Martindale algebra of quotients. *Collect. Math.,* 39(3):249–256, 1988.

[33] E. García and M. Gómez Lozano. An elemental characterization of strong primeness in Lie algebras. *J. Algebra,* 312(1):132–141, 2007.

[34] E. García and M. Gómez Lozano. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra. *J. Algebra,* 346:266–283, 2011.

[35] E. García and M. Gómez Lozano. Principal filtrations of Lie algebras. *Comm. Algebra,* 40(10):3622–3628, 2012.

[36] E. García, M. Gómez Lozano, and R. Muñoz Alcázar. On the speciality of Jordan algebras and subquotients of Lie algebras. *J. Algebra,* 563:426–441, 2020.

[37] E. García, Gómez Lozano M., and R. Muñoz Alcázar. A filtration associated to an abelian inner ideal of a lie algebra *(submitted)*.

[38] Esther García, Miguel Gómez Lozano, Rubén Muñoz Alcázar, and Guillermo Vera de Salas. A Jordan canonical form for nilpotent elements in an arbitrary ring. *Linear Algebra Appl.,* 581:324–335, 2019.

[39] K. R. Goodearl. *Von Neumann regular rings.* Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Malabar, FL, second edition, 1991.

[40] John Hannah. Quotient rings of semiprime rings with bounded index. *Glasgow Math. J.,* 23(1):53–64, 1982.

[41] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory,* volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. Second printing, revised.

[42] N. Jacobson. *Lectures on quadratic Jordan algebras.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 45. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1969.

[43] N. Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[44] P. Jordan, J. von Neumann, and E. Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. of Math. (2),* 35(1):29–64, 1934.

[45] I. L. Kantor. Classification of irreducible transitive differential groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 158:1271–1274, 1964.

[46] I. L. Kantor. Non-linear groups of transformations defined by general norms of Jordan algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 172:779–782, 1967.

[47] I. L. Kantor. Certain generalizations of Jordan algebras. *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.,* 16:407–499, 1972.

[48] Max Koecher. Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. I. *Amer. J. Math.,* 89:787–816, 1967.

[49] Max Koecher. Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. II. *Amer. J. Math.,* 90:476–510, 1968.

[50] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings,* volume 189 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[51] O. Loos. *Jordan pairs*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[52] O. Loos. Filtered Jordan systems. *Comm. Algebra,* 18(6):1899–1924, 1990.

[53] Neal H. McCoy. Prime ideals in general rings. *Amer. J. Math.,* 71:823–833, 1949.

[54] Kevin McCrimmon. Strong prime inheritance in jordan systems. *Algebras, Groups and Geometries,* 1:217–234, 1984.

[55] Kevin McCrimmon. Martindale systems of symmetric quotients. *Algebras Groups Geom.,* 6(2):153–237, 1989.

[56] Kevin McCrimmon. *A taste of Jordan algebras.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.

[57] Kevin C. O'Meara, John Clark, and Charles I. Vinsonhaler. *Advanced topics in linear algebra.* Oxford University Press, Oxford, 2011. Weaving matrix problems through the Weyr form.

[58] D. S. Passman. Filtrations in semisimple rings. *Trans. Amer. Math. Soc.,* 357(12):5051–5066, 2005.

[59] D. S. Passman. Filtrations in semisimple Lie algebras, III. In *Advances in ring theory,* Trends Math., pages 257–268. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[60] J. Tits. Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.,* 24:530–535, 1962.

[61] E. I. Zelmanov. Prime Jordan algebras. II. *Sibirsk. Mat. Zh.,* 24(1):89–104, 192, 1983.

[62] E. I. Zelmanov. Lie algebras with finite gradation. *Mat. Sb. (N.S.),* 124(166) (3):353–392, 1984.

Universidad
Rey Juan Carlos

Tesis doctoral

Rubén José Muñoz Alcázar

Universidad
Rey Juan Carlos

Tesis doctoral

Editorial Academia Abierta