

CAPÍTULO 6. CARGA Y CORRIENTE ELÉCTRICA

En este tema estudiamos el campo electrostático y algunas magnitudes y leyes relacionadas. En la primera parte, describimos la interacción electrostática entre partículas cargadas y caracterizamos el comportamiento conductor y dieléctrico de los materiales. Tras definir el campo eléctrico, consideramos su expresión para el caso de un condensador plano. A partir de la energía potencial electrostática, definimos el potencial eléctrico y deducimos una expresión para obtenerlo a partir del campo eléctrico. Esto nos permite, más tarde, deducir una expresión para la capacidad del condensador plano. Esta primera parte termina con un estudio de la asociación de condensadores. En la segunda parte del tema estudiamos la intensidad de corriente, la resistencia eléctrica en materiales óhmicos (su dependencia con la longitud, sección del conductor y la temperatura), las fuentes de fuerza electromotriz y las potencias suministradas por las fuentes y disipadas por las resistencias.

6.1. Carga eléctrica

Los cuerpos poseen una propiedad llamada *carga eléctrica*, que es una magnitud escalar que puede tomar valores positivos o negativos. La unidad SI de carga es el *culombio* (C). También hay cuerpos que poseen la misma cantidad de carga positiva y negativa; nos referimos a ellos como eléctricamente *neutros*. Experimentalmente se han observado las siguientes propiedades de la carga eléctrica:

- *Interacción entre cargas.* Las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo opuesto se atraen. La intensidad de estas interacciones decrece con la distancia entre las cargas.
- *Conservación de la carga.* La carga eléctrica es una propiedad de los cuerpos materiales. Sin soporte material no hay carga y el movimiento de la carga está ligado al movimiento del soporte material. A menudo, los cuerpos cargados entran en contacto y la carga se transfiere de un cuerpo a otro. En todos los casos se cumple que la carga neta se conserva.

En los núcleos de los átomos que forman la materia ordinaria hay protones y neutrones. Los neutrones carecen de carga eléctrica pero los protones poseen una carga positiva $q_p = +e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. En torno al núcleo existe cierto número

de electrones, cada uno con una carga negativa $q_e = -e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Dado que la carga de un electrón es de igual magnitud pero de signo opuesto a la de un protón, un átomo que posea tantos protones como electrones será neutro. Pero el número de electrones de un átomo puede variar, bien porque los pierda, en cuyo caso el átomo se convierte en un *ion positivo* o *cación*, o porque los gane, y el átomo se convierte en un *ion negativo* o *anión*. En ambos casos, la carga neta de un átomo será siempre igual a un número entero de veces la carga fundamental $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Para tener una noción sobre lo grande o pequeña que es cierta cantidad de carga, son útiles los siguientes valores típicos:

- Al frotar un cuerpo con otro, la carga generada en cada uno de ellos es del orden de nanoculombios (10^{-9} C).
- En ciertos dispositivos eléctricos llamados *condensadores*, las cargas típicas en sus placas van desde los picoculombios (10^{-12} C) hasta los culombios.

Conductores y dieléctricos

Se llama *conductividad eléctrica* de un material a la habilidad que tiene para permitir el movimiento de carga eléctrica en su interior. Los materiales *conductores* poseen una gran cantidad de *electrones libres* y tales electrones se mueven fácilmente en respuesta a cualquier interacción eléctrica del material. A su vez, los materiales *aislantes* o *dieléctricos* casi no disponen de electrones libres, por lo que las interacciones eléctricas sobre el material no generan movimiento neto de carga en su interior.

El diferente comportamiento de conductores y dieléctricos es consecuencia de la *Física Cuántica*. En los átomos, los electrones se mueven alrededor del núcleo, que está cargado positivamente, situados en diferentes *capas* u *orbitales*. Los electrones de las capas más alejadas del núcleo están débilmente enlazados a él, y es el detalle de este tipo de enlace el que determina las propiedades conductoras del material.

En los *metales*, los electrones de las capas más externas están tan débilmente enlazados a los núcleos que constituyen un mar llamado *banda de conducción* y se desplazan casi libremente a través del metal, por lo que se les llama *electrones libres*. La existencia de muchos electrones libres en los metales explica que éstos sean excelentes conductores.

Por el contrario, los electrones de los materiales dieléctricos participan activamente en el *enlace atómico* iónico o covalente, de manera que están fuertemente ligados a sus átomos o moléculas. Se requiere mucha energía para

liberar electrones que puedan moverse por el interior del material, de modo que su conductividad es muy baja.

En realidad, no existen materiales totalmente conductores ni totalmente aislantes, sino una gama casi completa de comportamientos intermedios. De cualquier modo, la conductividad de un metal puede ser mil millones de veces mayor que la de un aislante como el vidrio. Por ello, asumiremos casi siempre que un buen aislante tiene conductividad nula.

Supongamos que, mediante fricción o contacto, hemos depositado cierta carga en un cuerpo inicialmente neutro. Si el material en que hemos depositado carga es un aislante, la carga normalmente se queda ligada al punto de contacto. Es posible entonces tener una distribución de carga no uniforme, es decir, que varía de un punto a otro. En cambio, si el material es un buen conductor, el exceso de carga depositado en él tiende a dispersarse para minimizar la repulsión electrostática. Cuando las cargas dejan de moverse, se dice que se ha alcanzado el *equilibrio electrostático* y el exceso de carga se habrá situado en la superficie del conductor.

6.2. Campo eléctrico

Consideremos cierta carga Q , que puede ser una carga puntual, un conjunto de cargas puntuales o un cuerpo cargado. Se llama *campo eléctrico* creado por Q a un campo vectorial $\mathbf{E}$ que expresa, en cada punto, la perturbación de las propiedades del espacio debida a la existencia de la carga Q (que, por ello, se llama *fuerza del campo eléctrico*). Para encontrar el valor de $\mathbf{E}$ en un punto cualquiera del espacio, se coloca en ese punto una carga puntual q de pequeño valor (para que no modifique la localización y/o distribución de Q), llamada *carga de prueba*. La carga de prueba experimentará entonces una fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ que expresa la interacción con la carga fuente Q . El campo eléctrico creado por Q en el punto donde se ha situado la carga de prueba q se define como

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_e}{q}.$$

La unidad SI de campo eléctrico es 1 N/C. Se usa también otra unidad equivalente, que es 1 V/m. El *voltio* (V) se define, por tanto, de manera que $1\text{V} = 1(\text{N}\cdot\text{m})/\text{C}$.

Campo eléctrico de un condensador plano

Un caso particularmente sencillo, pero importante, de campo eléctrico es el creado por un condensador plano. Un *condensador plano* está formado por dos placas metálicas planas y paralelas, como vemos en la figura 6.1. Una de

ellas tiene una carga positiva $+Q$ distribuida uniformemente en su superficie, de área A . La otra tiene distribuida uniformemente en su superficie, también de área A , una carga de igual magnitud pero negativa $-Q$. La distancia entre ambas superficies es d .

Si la placa o *armadura positiva* del condensador plano tiene una superficie de área A y en ella hay una carga Q distribuida uniformemente, su *densidad superficial de carga* es

$$\sigma_{\text{pos}} = \frac{Q}{A}.$$

Del mismo modo, la densidad superficial de carga de la *armadura negativa* del condensador es

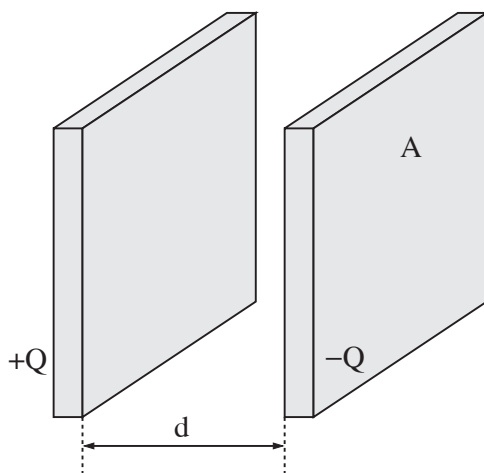
$$\sigma_{\text{neg}} = \frac{-Q}{A}.$$

De este modo, $\sigma_{\text{neg}} = -\sigma_{\text{pos}}$.

El campo eléctrico creado por el condensador *en la región situada entre sus placas o armaduras* se puede aproximar por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{\text{pos}}}{\epsilon_0} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm}. \quad (6.1)$$

Figura 6.1: Condensador plano de área A y distancia entre placas d . La placa izquierda tiene carga Q y la derecha $-Q$.



En esta expresión,

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{m}^2 \cdot \text{N})$$

es la *permitividad del vacío* (hemos supuesto que la región entre las placas contiene vacío o aire; si estuviera rellena de otro material, habría que poner su permitividad en la fórmula del campo eléctrico). A su vez, el vector unitario $\mathbf{u}_{\pm}$ apunta desde la armadura positiva del condensador hasta su armadura negativa perpendicularmente a ambas superficies. Por tanto, el campo eléctrico creado por un condensador plano entre sus placas es *uniforme* (no depende de la posición siempre que estemos entre las placas del condensador) y va desde la placa positiva a la negativa. Es esta sencillez lo que hace que el condensador plano sea tan usado en múltiples aplicaciones en las que se requiere un campo uniforme y apreciable en una región limitada del espacio (entre las placas) pero que sea mucho menor, o prácticamente inexistente, fuera de esa región.

Ejemplo 6.2.1 Calculemos el campo eléctrico entre las placas de un condensador plano sabiendo que las placas son cuadradas de 1 cm de lado y que la carga de la placa positiva vale 10^{-15} C .

Sol. Supongamos que las placas son paralelas al plano Y Z y que la placa positiva tiene una coordenada x menor que la negativa. Así, el vector unitario $\mathbf{u}_{\pm}$ coincide con $\mathbf{i}$. Además, como $A = 1 \text{ cm}^2$ y $Q = 10^{-15} \text{ C}$, el campo eléctrico resulta

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{10^{-15}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}} \mathbf{i} \approx 1,13 \text{ V/m}.$$

6.3. Potencial eléctrico

Como hemos visto al definir el campo eléctrico, si una carga puntual q está sometida a un campo eléctrico $\mathbf{E}$ (que puede estar creado por otras cargas distintas de q , por un condensador plano o por otro cuerpo cargado), la *fuerza eléctrica* $\mathbf{F}_e$ experimentada por q tiene la forma

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}.$$

Si q tuviera masa m y la fuerza eléctrica fuese la única que actuara sobre ella, por la segunda ley de Newton la aceleración de q estaría dada por

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} \mathbf{E}.$$

Esto implica que una carga positiva, sometida únicamente a una fuerza eléctrica, se acelera en el sentido del campo eléctrico aplicado y una carga negativa se acelera en sentido opuesto al campo eléctrico aplicado.

Además de poderse estudiar la dinámica de una carga sometida a un campo eléctrico a través de la segunda ley de Newton, pueden usarse también métodos basados en las nociones de trabajo y energía. La fuerza eléctrica producida por un *campo electrostático* (es decir, cualquier campo eléctrico creado por cargas en reposo) es una *fuerza conservativa*. Es importante notar que esto no sería cierto en general si el campo eléctrico no fuera conservativo (como el que aparece en el interior de una fuente de fuerza electromotriz, que veremos más adelante), pero nos centraremos en el caso conservativo para simplificar las cosas.

Toda fuerza conservativa lleva asociada una *energía potencial*. La energía potencial asociada a la fuerza electrostática se llama *energía potencial electrostática*, y la escribiremos como U_e . La energía potencial electrostática de una carga puntual q sometida a un campo electrostático $\mathbf{E}$ se puede escribir como

$$U_e = qV.$$

En esta relación, V se llama *potencial eléctrico* y es una función escalar que depende sólo de la forma del campo conservativo $\mathbf{E}$ al que está sometida q . La unidad de potencial eléctrico en el SI es $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Si la carga puntual q se mueve entre un punto inicial A y un punto final B bajo la acción de la fuerza electrostática $\mathbf{F}_e = q \mathbf{E}$, el *trabajo* que realiza esta fuerza en ese movimiento, por la definición de energía potencial, es

$$\begin{aligned} W &= \int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = -\Delta U_e \\ &= -(U_e(\text{final}) - U_e(\text{inicial})) = -(U_e(B) - U_e(A)) \\ &= -q(V_B - V_A) = -q\Delta V, \end{aligned}$$

donde V_A y V_B son los valores del potencial eléctrico en A y B , respectivamente. La cantidad

$$\Delta V = V(\text{final}) - V(\text{inicial}) = V_B - V_A$$

se llama *diferencia de potencial* y su unidad en el SI es también 1 V .

Si una carga puntual q se mueve entre los puntos A y B sometida únicamente a la fuerza electrostática, por la *conservación de la energía mecánica* se tendrá

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B,$$

donde v_A y v_B son las velocidades de la carga q en A y B , respectivamente. Esta expresión nos permite, por ejemplo, conocer el valor de la diferencia de potencial necesaria para acelerar o frenar partículas cargadas.

Relación entre campo eléctrico y potencial eléctrico

Hemos comentado que el potencial eléctrico V es una función escalar que está dada por el campo eléctrico conservativo $\mathbf{E}$ creado por la misma distribución de carga que V . La fórmula matemática de esta relación es

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Dentro de la integral indefinida, se tiene el *producto escalar* de los vectores campo eléctrico $\mathbf{E}$ y *desplazamiento infinitesimal* $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$. En esta expresión queda una constante de integración por determinar. Esta constante se puede fijar asignando un *origen de potencial*.

De la misma manera, la diferencia de potencial entre dos puntos se relaciona con el campo eléctrico mediante la integral definida

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ejemplo 6.3.1 Sabiendo que el campo eléctrico en una región del espacio es $\mathbf{E} = 3 \text{ kV/m } \mathbf{i} + 5 \text{ kV/m } \mathbf{j}$, calculemos la diferencia de potencial entre el punto $A(1 \text{ cm}, -2 \text{ cm}, 3 \text{ cm})$ y el origen de coordenadas O .

Sol. La diferencia de potencial la obtenemos mediante la siguiente expresión

$$\Delta V = V_A - V_O = - \int_O^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Calculemos primero el producto escalar del integrando:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = (3 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = 3 dx + 5 dy,$$

donde debemos recordar que la unidad de $\mathbf{E}$ es kV/m . Así,

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_0^1 3 dx - \int_0^{-2} 5 dy = -[3x]_0^1 - [5y]_0^{-2} = -3 + 10 \\ &= 7 \text{ kV} / \text{m} \cdot \text{cm} = 70 \text{ V}. \end{aligned}$$

Diferencia de potencial entre las placas de un condensador plano

Para calcular la diferencia de potencial en el condensador plano, elegimos el sistema de referencia de manera que la placa positiva esté en $x = 0$ y la negativa esté en $x = d$. El campo eléctrico en este sistema de referencia, como vimos en un apartado anterior, se puede escribir

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{u}_{\pm} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \mathbf{i}.$$

Aquí, Q es la carga de la armadura positiva del condensador (la negativa tiene carga $-Q$) y A es el área de la superficie de ambas armaduras.

La diferencia de potencial entre la placa positiva (en $x = 0$) y la placa negativa (en $x = d$) de este condensador plano estará entonces dada por

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_d^0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_s^0 \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}.$$

El producto escalar dentro de la integral es

$$\mathbf{i} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{i} \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = dx.$$

Poniendo esto en la expresión de la diferencia de potencial, se obtiene

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_d^0 dx = - \frac{Q}{\epsilon_0 A} (0 - d) = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}.$$

El resultado final también se puede escribir como

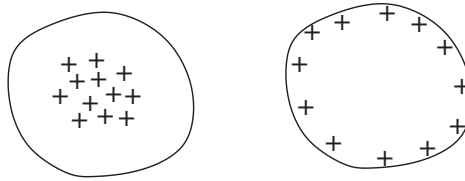
$$\Delta V = Ed.$$

Una aplicación de los condensadores es el *desfibrilador*, cuyas placas se cargan con diferencias de potencial elevadas. Al ponerlas sobre el cuerpo de una persona, el condensador que forman ambas placas se descarga a través del interior del paciente en un cortísimo intervalo de tiempo, generando intensas señales eléctricas para reactivar el latido cardíaco.

Conductores en equilibrio electrostático

Un material conductor contiene un gran número de electrones libres que se mueven obedeciendo campos eléctricos externos o internos. Decimos que el conductor se encuentra en *equilibrio electrostático* si no hay desplazamiento de cargas en su interior. En situación de equilibrio electrostático, cualquier material conductor satisface las siguientes propiedades:

Figura 6.2: Distribución de carga en un conductor. Las cargas depositada inicialmente en el interior del conductor (izquierda) se mueven hacia la superficie (derecha).



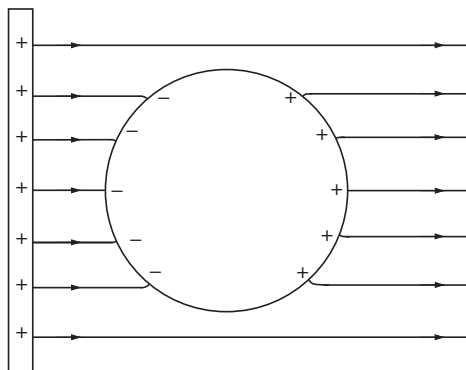
- Si un conductor tiene un exceso de carga en su interior, esta carga se mueve rápidamente intentando reducir la fuerza eléctrica. Cuando se alcanza el equilibrio electrostático, todo el exceso de carga se situá en la superficie del conductor (en general, se distribuye inhomogéneamente en ella como veremos despúes) y el interior queda completamente neutro, como se ve en la figura 6.2.
- El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo. El campo eléctrico $\mathbf{E}_s$ en la superficie de un conductor en equilibrio es perpendicular a ella y tiene un valor

$$\mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n},$$

- siendo $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a la superficie del conductor (que apunta hacia fuera de éste) en cada punto y σ la densidad superficial de carga en ese mismo punto (en realidad, en una superficie infinitesimal alrededor del punto). Dado que la distribución de carga no es, en general, homogénea, el campo en la superficie de un conductor tiene valores diferentes en cada punto, pero en todos obedece la expresión anterior.
- Si se situá un conductor en el seno de un campo eléctrico externo, como en la siguiente figura, las cargas inducidas por el campo externo en la superficie del conductor crean un campo que anula el externo en el interior del material. Esta propiedad se llama *efecto de apantallamiento* y el conductor que lo crea se dice que actuá como una *jaula de Faraday*.
- Dado que en el interior de un material conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo, resulta que el potencial electrostático es el mismo en todos los puntos del interior y tiene un único valor llamado *potencial del conductor* V_c .

Se ha mencionado que el exceso de carga se situá de manera inhomogénea en la superficie de un material conductor en equilibrio electrostático. En realidad, tanto la densidad de carga como el campo eléctrico en equilibrio son mayores en las zonas en que las que el radio de curvatura de la superficie del

Figura 6.3: Distribución de carga en un conductor en el seno de un campo eléctrico.



conductor es menor. Si el conductor tiene una punta, la densidad de carga y el campo eléctrico pueden ser muy grandes en ella, incluso aunque el potencial no lo sea. Si el campo eléctrico en una punta de un conductor supera un valor crítico, llamado *resistencia dieléctrica* del medio a su alrededor (para el aire, este valor es del orden de $E_{\text{max}} = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$), se produce la ionización del medio dieléctrico, liberándose electrones en una fracción de los átomos o moléculas del medio. Este efecto se llama *ruptura dieléctrica* y aparece, por ejemplo, en los rayos de una tormenta.

6.4. Capacidad y condensadores

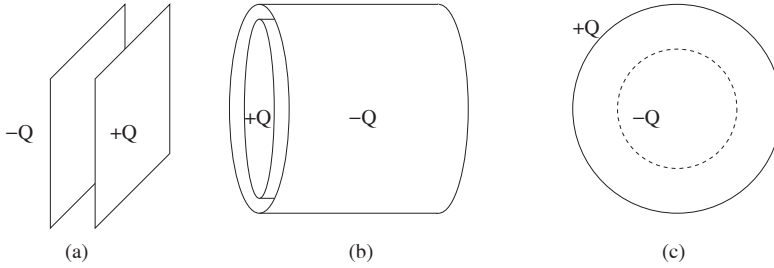
Si depositamos una carga Q en un conductor aislado, se distribuye en la superficie del conductor y todos los puntos del conductor adquieren un potencial V_c respecto al nivel cero (aquel en que no hay carga). Se define la *capacidad* eléctrica del conductor como el cociente entre la carga de su superficie y el potencial respecto al nivel cero, esto es,

$$C = \frac{Q}{V_c}.$$

La unidad SI de capacidad es el *faradio* (F), tal que $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. La capacidad de un conductor mide la cantidad de carga que puede almacenar.

Un *condensador* es un dispositivo que permite almacenar carga. Está formado por dos conductores con la misma geometría situados muy cerca uno del otro pero sin tocarse, llamados placas o armaduras. En la figura 6.4 se puede ver un esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cilíndrico y (c) un condensador esférico.

Figura 6.4: Esquema de (a) un condensador plano, (b) un condensador cilíndrico y (c) un condensador esférico.



Uno de los conductores del condensador se carga con una carga Q y el otro con una carga $-Q$. En el equilibrio electrostático, la armadura de carga positiva adquiere un potencial V_+ , que excede al potencial V_- de la armadura de carga negativa en una cantidad $\Delta V = V_+ - V_-$. Se define la *capacidad* de un condensador como el cociente entre la carga Q situada en la armadura positiva y la diferencia de potencial ΔV entre la armadura positiva y la negativa,

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

La cantidad C depende de los detalles de fabricación del condensador, y mide su posibilidad de almacenamiento de carga.

Capacidad de un condensador plano sin dieléctrico entre sus placas

Para calcular la capacidad de un condensador, se obtiene el campo eléctrico que crea la distribución de carga en el equilibrio para puntos situados en la región entre las armaduras. A partir del campo, se determina la diferencia de potencial ΔV entre la armadura positiva y la negativa. Finalmente, se calcula la capacidad C del condensador mediante el cociente $C = Q/\Delta V$.

Para un condensador plano, como hemos visto en apartados anteriores de este tema, el campo eléctrico es $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 A)$, siendo A el área de las armaduras, y la diferencia de potencial entre las armaduras es $\Delta V = Ed = Qd/(\epsilon_0 S)$, siendo d la distancia entre las placas. Por tanto, la capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d},$$

es decir, depende de factores geométricos (A y d) y del material que se coloca entre las placas (en el caso estudiado, el vacío, por lo cual aparece en la fórmula la permitividad del vacío ϵ_0).

Ejemplo 6.4.1 Consideremos de nuevo el ejemplo 6.2.1 y calculemos la capacidad del condensador con la información adicional de que las placas están separadas $d = 1 \text{ mm}$.

Sol. Podemos calcular la capacidad de dos maneras. Por una parte, usando el valor de Q y la expresión del campo eléctrico obtenida en el ejemplo 6.2.1 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{10^{-15}}{1,13 \cdot 10^{-3}} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F.}$$

Por otra parte, también podemos calcular la capacidad con la siguiente fórmula

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F.}$$

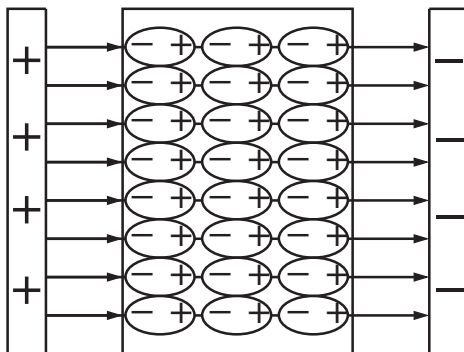
Capacidad de un condensador plano con dieléctrico entre sus placas

Además del vacío o del aire, se pueden insertar otros materiales entre las placas de un condensador, modificando así su capacidad. Cuando se introduce en un condensador un material dieléctrico, como muestra la figura 6.5, el campo eléctrico E se reduce respecto al del vacío E_0 según la expresión $E = E_0/\epsilon_r$, siendo ϵ_r una cantidad adimensional, siempre igual o mayor que 1, llamada *permitividad relativa* del material que se ha introducido entre las placas del condensador. A partir de ella, se define la constante

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

que se llama *permitividad* (absoluta) del material y tiene las mismas unidades que ϵ_0 .

Figura 6.5: Esquema de un condensador con un dieléctrico entre sus placas.



Debido a que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se reduce al colocar un dieléctrico, la diferencia de potencial ΔV se reduce con el mismo factor. Esto implica que la capacidad del condensador C cuando se introduce un dieléctrico aumenta con respecto a la capacidad del mismo condensador cuando entre las placas hay vacío C_0 según

$$C = \epsilon_r C_0.$$

La capacidad de un condensador plano con un dieléctrico ocupando todo el espacio entre sus placas es

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}, \quad (6.2)$$

donde ϵ es la permitividad del material. El hecho de que la capacidad aumente al insertar un dieléctrico es la razón por la cual se suelen fabricar los condensadores con diferentes materiales dieléctricos entre sus armaduras.

Ejemplo 6.4.2 Continuando con el ejemplo 6.4.1, obtengamos la nueva capacidad del condensador si entre las placas introducimos un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 2$.

Sol. Como la capacidad C_0 obtenida en el ejemplo 6.4.1 es conocida, podemos calcular la nueva capacidad como

$$C = \epsilon_r C_0 = 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-13} = 1,77 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

De forma alternativa, podemos calcular C directamente

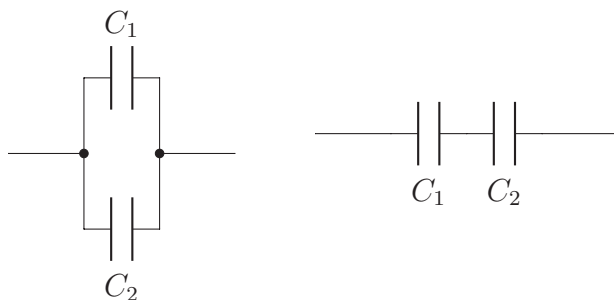
$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 1,77 \cdot 10^{-12} \text{ F.}$$

Asociaciones de condensadores

A veces es conveniente asociar varios condensadores, cuyo conjunto se comporta como un único *condensador equivalente* a efectos del resto del circuito o dispositivo en el que estén integrados. Las principales maneras de conectar varios condensadores mediante cables conductores se pueden observar en las figuras que hay a continuación.

En una *asociación en paralelo*, conectamos el circuito a una diferencia de potencial ΔV , de tal manera que es la misma para cada condensador, es decir,

$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. La carga total almacenada por la asociación es $Q_T = Q_1 + Q_2$, donde $Q_1 = C_1 \Delta V$ y $Q_2 = C_2 \Delta V$. Así, $Q_T = (C_1 + C_2) \Delta V = C_T \Delta V$, y la capacidad equivalente de una asociación en paralelo de dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 es $C_T = C_1 + C_2$.



En una *asociación en serie*, la capacidad equivalente resulta dada por

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \text{ En este caso, la carga en cada condensador es la misma, } Q = Q_1$$

$= Q_2$, siendo $Q_1 = C_1 \Delta V_1$ y $Q_2 = C_2 \Delta V_2$ las cargas almacenadas por cada uno de los condensadores. La diferencia de potencial entre los extremos de la asociación de condensadores en serie es $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$.

Ejemplo 6.4.3 *Tomemos dos condensadores de la misma capacidad C y obtengamos la capacidad equivalente cuando los asociamos en paralelo y en serie.*

Sol. *Si la asociación es en paralelo, entonces*

$$C_T = C + C = 2C,$$

la capacidad resultante se duplica. Mientras que si la asociación es en serie

$$C_T^{-1} = C^{-1} + C^{-1} \Rightarrow C_T = \frac{1}{2}C,$$

la capacidad total se reduce a la mitad.

Energía eléctrica almacenada por un condensador

Un condensador almacena carga cuando se establece una diferencia de potencial entre sus placas. La diferencia de potencial entre estas placas la esta-

blece algún dispositivo que actúe como fuente de trabajo, como una batería. La batería hace trabajo para depositar carga en una armadura del condensador, extrayéndola de la otra armadura.

Cuando una batería está cargando un condensador, ha de ser capaz de ir llevando carga positiva desde la placa negativa hasta la placa positiva venciendo la repulsión electrostática. El trabajo que realiza la batería W_{bat} es igual y de signo opuesto al trabajo (negativo) realizado por la fuerza electrostática en ese proceso. Este trabajo se almacena como energía potencial electrostática $U_e = W_{bat}$ de las cargas sobre las armaduras del condensador. Resulta

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta V)^2}{2} = \frac{Q\Delta V}{2}, \quad (6.3)$$

donde Q es la carga de la placa positiva del condensador y ΔV es la diferencia de potencial entre las placas.

Hay otra manera de interpretar el resultado anterior. En el proceso de carga, se crea un campo eléctrico entre las placas del condensador, de manera que el trabajo realizado para cargar el condensador es también el trabajo necesario para crear este campo eléctrico. La energía almacenada en el condensador se puede considerar *energía del campo eléctrico* que ha sido creado gracias al trabajo de la batería conectada al condensador para cargarlo.

Ejemplo 6.4.4 Continuando con el ejemplo 6.4.3, calculemos la energía almacenada en la asociación de condensadores, suponiendo que inicialmente los dos condensadores tienen las mismas carga Q_0 y diferencia de potencia ΔV_0 .

Sol. Hagamos el cálculo de dos maneras distintas, en primer lugar usando las propiedades de una asociación de condensadores y luego usando la conservación de la energía. Cuando asociamos dos condensadores en paralelo, la nueva carga Q es la suma de la de los condensadores por separado, como ya vimos. Así, en este caso, $Q = 2Q_0$. Por otra parte, como vimos en el ejemplo 6.4.3, la capacidad total es $C_T = 2C_0$, donde C_0 es la capacidad de los condensadores por separado. Por ello, la energía de la asociación en paralelo es

$$U_e = \frac{Q^2}{2C_T} = \frac{Q_0^2}{C_0} = 2U_{e0},$$

donde U_{e0} es la energía de cada condensador antes de asociarse.

Análogamente, en la asociación en serie es $\Delta V = 2\Delta V_0$ y $C_T = \frac{1}{2}C_0$, por

lo que la energía es

$$U_e = \frac{C_T (\Delta V)^2}{2} = C_t (\Delta V_0)^2 = 2U_{e0}.$$

Al idénticos resultados llegamos si tenemos en cuenta que la energía se conserva. Antes de la asociación, cada condensador tenía una energía U_{e0} , por lo que el conjunto tenía una energía $2U_{e0}$. Al asociarlos, no perdemos energía, así que la energía de la asociación sigue siendo $2U_{e0}$.

6.5. Corriente eléctrica

En este tema hemos estudiado cómo se crean un campo eléctrico y un potencial eléctrico a partir de la existencia de carga en una región del espacio. El movimiento colectivo o flujo de muchas pequeñas cargas situadas en una región en la que hay un campo eléctrico es el fundamento de la corriente eléctrica.

Llamamos *corriente eléctrica* al flujo "ordenado" de carga eléctrica. De todas las posibles maneras capaces de generar este flujo, nos centraremos en la *corriente de conducción*, que es el flujo ordenado de carga eléctrica por el interior de materiales *conductores*.

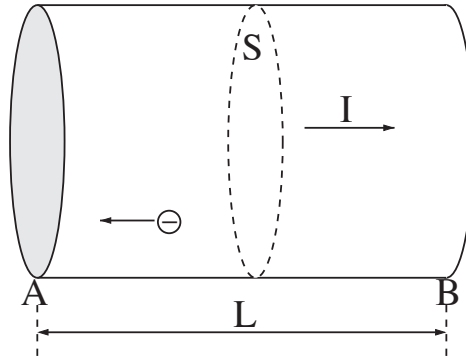
Necesitamos alguna magnitud bien definida para estudiar la corriente. Consideraremos la *intensidad de corriente eléctrica* I , que es la cantidad de carga *positiva* que atraviesa una *sección transversal* de un material conductor en la unidad de tiempo, es decir

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

En esta expresión, Δq es la carga positiva que atraviesa la sección transversal del material conductor en el intervalo de tiempo Δt . La unidad de intensidad de corriente eléctrica en el SI es el *amperio* (A), de tal modo que $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Supongamos el caso más común en el que la corriente atraviesa un *cable* o *filamento* conductor de sección de área uniforme. En la figura 6.6, tenemos un trozo de cable de sección uniforme S y longitud L , con extremos en los puntos A y B .

Figura 6.6: Trozo de conductor entre los puntos A y B, de sección S y longitud L por el que circula una corriente I .



Para que aparezca corriente en el cable, es necesario aplicar en su interior un campo eléctrico $\mathbf{E}$ (en el ejemplo, el campo va desde A hacia B y suponemos, por simplicidad, que es un campo uniforme). Este campo crea una diferencia de potencial entre el punto inicial y el punto final del cable, dada por

$$V = V_A - V_B = E L.$$

En esta ecuación, V es positivo, ya que *el potencial decrece en el sentido del campo*, de manera que $V_A > V_B$ porque $\mathbf{E}$ va desde A hasta B. Es común denominar, por ello, a la cantidad positiva $V = V_A - V_B$ como *caída de potencial*, *caída de tensión* o *voltaje* entre los extremos del trozo de cable conductor que estamos estudiando.

Los electrones libres del material conductor se mueven en sentido opuesto al campo eléctrico aplicado $\mathbf{E}$, es decir, desde B hacia A. En su camino, atraviesan la sección del conductor S dibujada en la figura 6.6. La cantidad de carga, en valor absoluto, que atraviesa la sección S en la unidad de tiempo constituye la intensidad de corriente eléctrica I en el cable. Pero hemos dicho antes que ésta se refiere a la carga positiva. Es fácil ver que, si los electrones libres se mueven hacia A, físicamente es como si carga positiva se moviera hacia B. Por tanto, I tiene sentido opuesto al movimiento de los electrones libres y el mismo sentido que el campo eléctrico aplicado, es decir, *la corriente eléctrica se produce en el sentido en que decrece el potencial*. Esta convención histórica para definir el sentido de la corriente eléctrica, en relación opuesta al movimiento real de los electrones, se llama *sentido convencional del flujo*.

Un aspecto importante de la corriente eléctrica es cómo mantenerla en el tiempo. Para ello, no podemos llegar al equilibrio electrostático en el que las cargas están en reposo, de modo que necesitaremos dos cosas:

- Que el camino recorrido por los electrones libres no tenga principio ni fin, es decir, hace falta un camino ininterrumpido por el que fluya la corriente. Tal camino se llama *circuito eléctrico*.
- Que el campo eléctrico aplicado no se anule. Esto implica tener en el circuito una fuente de campo eléctrico que lo mantenga. Tal dispositivo, del que hablaremos más adelante en este mismo tema, se llama *fuentes de fuerza electromotriz*.

6.6. Resistencia

En el apartado anterior, hemos visto que la intensidad de corriente eléctrica I en un cable conductor está constituida por un gran número de electrones libres que se mueven en sentido opuesto a un campo eléctrico aplicado. En realidad, el movimiento de cada electrón libre es una composición de dos tipos de movimiento:

- La aceleración impuesta por el campo eléctrico, dada por

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

- El *movimiento térmico* de los electrones incluso en ausencia de campo eléctrico, debido a la energía cinética que poseen, relacionada con la *temperatura* del material. Este movimiento térmico es desordenado y muy rápido, pero no conlleva un flujo colectivo de electrones en una dirección fija, por lo que no está asociada, por sí mismo, con una corriente eléctrica.

El movimiento térmico de los electrones libres de un material conductor continúa cuando ya se ha establecido una corriente eléctrica en su interior, e implica que éstos chocan múltiples veces con los iones positivos del material. En estos choques, los electrones pierden energía cinética y *el material aumenta su energía interna*, es decir, aumenta su temperatura.

A nivel macroscópico, por tanto, el flujo de corriente eléctrica por el interior de un material conductor está limitado por la pérdida de energía cinética de los electrones libres y genera un calentamiento del material. Tal efecto se puede describir por medio de una cantidad que se llama *resistencia eléctrica* del material. Si un conductor está sometido a una caída de potencial V entre sus extremos y circula por él, en el sentido en que cae el potencial, una intensidad de corriente I , su resistencia se define como

$$R = \frac{V}{I}.$$

La unidad de resistencia en el SI es el *ohmio* (Ω), definido de tal manera que $1\Omega = 1 \text{ V/A}$.

Cuando el valor de R en un material es constante e independiente de la caída de tensión V aplicada en él, se dice que el material es *óhmico* y que en él se cumple siempre la *ley de Ohm*

$$V = R I \text{ (siendo } R \text{ una constante).} \quad (6.4)$$

Materiales de este tipo son las *resistencias* o *resistores* que se usan en los circuitos eléctricos para limitar la corriente.

Resistividad y conductividad

La resistencia R de un cable conductor depende básicamente de dos cosas: el material del que está hecho (y las propiedades de este material) y la forma y tamaño del cable. Es posible separar ambas dependencias en el caso de un cable conductor de sección uniforme S y longitud ℓ . En este caso, se cumple

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S}. \quad (6.5)$$

La cantidad ρ_e sólo depende del material y se llama *resistividad eléctrica* (con unidad en el SI $\Omega \cdot m$).

La inversa de la resistividad se llama *conductividad eléctrica* del material,

$$\sigma_e = \frac{1}{\rho_e}.$$

Esta es la cantidad que determina qué materiales son buenos conductores (alto valor de σ_e) y cuáles son dieléctricos (valor de σ_e cercano a cero). La siguiente tabla muestra valores de resistividad de algunos materiales en condiciones normales de presión y temperatura.

Sustancia	$\rho_e (\Omega \cdot m)$
Plata	$1,6 \cdot 10^{-8}$
Cobre	$1,7 \cdot 10^{-8}$
Oro	$2,4 \cdot 10^{-8}$
Platino	$1,1 \cdot 10^{-7}$
Plomo	$2,2 \cdot 10^{-7}$
Nicromo	$1,5 \cdot 10^{-6}$
Carbono	$3,5 \cdot 10^{-5}$
Vidrio	de 10^{10} a 10^{14}
Goma	10^{13}

Los mejores conductores, como plata, cobre, oro, etc. tienen los menores valores de resistividad en la tabla (y valores muy altos de conductividad). Los cables conductores hechos con estos materiales tienen, por tanto, resistencias muy bajas a menos que sean muy largos o de secciones muy pequeñas. Los valores de las resistencias de estos cables se suelen despreciar en muchos circuitos y, en ese caso, aparecen dibujados como líneas rectas; se dicen que se comportan como *cortocircuitos*. En un cortocircuito, según la ley de Ohm,

$$R = 0 \quad \Rightarrow \quad V = 0.$$

Es decir, en un cortocircuito no hay resistencia ni caída de tensión, pero la corriente I puede tener cualquier valor.

Otros materiales, como el nicromo y el carbono, tienen resistividades más altas (y, en consecuencia, conductividades más bajas), por lo que la resistencia de dispositivos contruidos con ellos no es despreciable. Estos dispositivos de resistencias no nulas se llaman *resistores* o simplemente *resistencias*, cumplen la ley de Ohm $V = IR$ y se dibujan en los circuitos mediante líneas en zigzag.

Finalmente, el vidrio y la goma son buenos ejemplos de aislantes o dieléctricos, con una resistividad enorme y una conductividad cercana a cero. El límite de conductividad nula y resistividad infinita se alcanza en el vacío (o, con buena aproximación, en el aire). Un espacio vacío en un circuito se llama *circuito abierto* y, según la ley de Ohm,

$$R = \infty \quad \Rightarrow \quad I = 0.$$

Es decir, en un circuito abierto, la resistencia es infinita y la corriente eléctrica es nula, pero la caída de potencial V puede tener cualquier valor.

Ejemplo 6.6.1 Calculemos la intensidad I que atraviesa un cable de Nicromo, de 1 m de longitud y sección circular de 2 mm de diámetro, cuando está sometido a una diferencia de potencial de $V = 1$ V.

Sol. Calculemos primero la resistencia R del cable. Para ello, necesitamos la resistividad del Nicromo, que según la tabla anterior es $\rho_e = 1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot m$:

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S} + 1,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\pi (1 \cdot 10^{-3})^2} \approx 0,477 \Omega.$$

Admitiendo que se cumple la ley de Ohm, la intensidad que atraviesa esta resistencia es

$$I = \frac{V}{R} \approx \frac{1}{0,477} \approx 2,10 \text{ A}.$$

Dependencia de la resistencia con la temperatura

Dado que la resistencia de un material es la cantidad macroscópica que tiene en cuenta la pérdida de energía cinética de los electrones libres debida a los choques que se producen en su movimiento, es lógico pensar que la temperatura del material (que está directamente relacionada con la energía interna del propio material, es decir, la energía del movimiento térmico de sus componentes) tenga gran influencia en su resistencia.

Para un amplio rango de temperaturas, la resistividad eléctrica de un material depende de su temperatura mediante la ley

$$\rho_e = \rho_{e0} [1 + \alpha (T - T_0)]. \quad (6.6)$$

En esta fórmula, ρ_e es la resistividad del material a temperatura T , ρ_{e0} es la resistividad del mismo material a temperatura T_0 y α se llama *coeficiente térmico de la resistividad* y su unidad en el SI es 1 K^{-1} .

Para los buenos conductores, α suele ser positivo, de manera que la resistividad eléctrica aumenta con la temperatura en ellos. En los materiales *semiconductores*, como el carbono, el silicio y el germanio, α es negativo, de manera que la resistividad disminuye con la temperatura. Finalmente, para muchos dieléctricos, α es prácticamente nula, por lo que la resistividad de estos aislantes es independiente de la temperatura.

La fórmula anterior se puede escribir también para la resistencia, es decir, también se cumple

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

donde ahora R es la resistencia a la temperatura T y R_0 la resistencia a la temperatura T_0 .

Ejemplo 6.6.2 *La relación entre la resistencia y la temperatura de un material la podemos usar también para conocer su temperatura. Por ejemplo, consideremos un cable de platino, de coeficiente térmico $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, con una resistencia a 15°C de 50Ω . Calculemos su temperatura cuando su resistencia aumenta 1Ω .*

Sol. *De la relación*

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

conocemos $R_0 = 50 \, \Omega$, α y $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Despejando la temperatura T para que la nueva temperatura sea $R = 51 \, \Omega$, tenemos

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 15 + \frac{1}{3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 50} \approx 20,1^\circ \text{C}.$$

Asociaciones de resistencias

En ocasiones resulta conveniente conectar entre sí varias resistencias para obtener cierto valor determinado. Estas asociaciones pueden sustituirse en los cálculos por una sola *resistencia equivalente* R_T , que tiene la misma intensidad de corriente y la misma caída de potencial que toda la asociación. Las formas básicas de asociación son en serie y en paralelo:

- En una *asociación en serie*, las resistencias se conectan una a continuación de otra. El conjunto de las dos resistencias se comporta como si hubiera una sola resistencia equivalente cuyo valor es igual a la suma de las resistencias individuales,

$$R_T = R_1 + R_2 \quad (6.7)$$

- La corriente que circula por la asociación es la misma que la que circula por cada resistencia, cumpliéndose $I_1 = I_2 = IT$. Por su parte, las caídas de tensión en cada resistencia se suman para obtener la caída de tensión en la asociación según $V_T = V_1 + V_2$.
- En una *asociación en paralelo*, las resistencias se conectan entre dos puntos comunes. La resistencia equivalente satisface entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (6.8)$$

- Esta vez, la caída de tensión en cada resistencia es la misma que la que hay en la asociación, de manera que $V_T = V_1 = V_2$. Por su parte, la corriente total se distribuye entre las dos resistencias, y tenemos $I_T = I_1 + I_2$.

Ejemplo 6.6.3 Tenemos una resistencia de valor $R_1 = 1 \, \Omega$. Veamos con qué otra resistencia R_2 debemos asociar R_1 para, en primer lugar, triplicar su valor y luego disminuir su valor a una tercera parte.

Sol. Por una parte, en la asociación en serie, el valor de la resistencia equivalente es mayor que la de las resistencias por separado. Así, para tener $R_T = 3R_1$ debemos poner R_1 en serie con R_2 :

$$3R_1 = R_1 + R_2 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 2\ \Omega.$$

Por otra parte, para que R_T sea $\frac{1}{3}R_1$ debemos poner R_1 y R_2 en

paralelo:

$$\left(\frac{R_1}{3}\right)^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1}{2} = 0,5\ \Omega.$$

6.7. Fuentes de fuerza electromotriz

Hemos comentado antes que, para mantener una corriente eléctrica en un circuito, hace falta en él un dispositivo que proporcione sin descanso un campo eléctrico o diferencia de potencial. En la figura 6.7, tenemos un circuito muy básico, formado por una pila, cables conductores de resistencia despreciable y una bombilla cuyo filamento actúa como una resistencia.

Las reacciones electrolíticas que ocurren en el interior de pilas y baterías producen una diferencia de potencial entre sus terminales + y -. La corriente eléctrica fluye entonces desde el terminal positivo de la pila, atraviesa el resto del circuito pasando por la bombilla y luego vuelve a la pila por su terminal negativo. Para completar el circuito, la corriente ha de ir, por el interior de la pila, desde su terminal negativo hasta el positivo, y esto cuesta un trabajo a la pila o batería, que ha de extraer de su energía interna que libera a través de las reacciones de su interior. El *trabajo por unidad de carga eléctrica* realizado por la pila se conoce con el nombre de *fuerza electromotriz* o *fem* ε y su unidad en el SI es 1 V. Así, la pila del circuito anterior es un ejemplo de *fuerza electromotriz* o *fuerza de fem*. También lo son las placas solares y los generadores de corriente alterna de las centrales eléctricas. En general, una fuente de fem realiza un trabajo por unidad de carga igual a su fuerza electromotriz ε , que se transforma en diferencia de potencial entre sus terminales positivo y negativo. Esta diferencia de potencial alimenta al circuito al que se conecta la fuente.

Figura 6.7: Circuito sencillo con una pila y una bombilla.

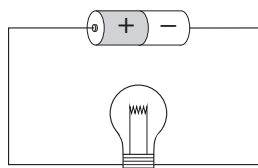
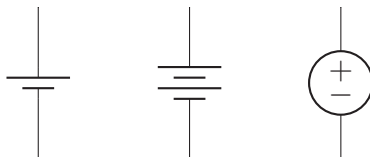


Figura 6.8: Diferentes formas de representar fuentes fem ideales.



En una *fente de fem ideal*, el valor numérico de su fem ε es igual a la diferencia de potencial $V = V_+ - V_-$ entre sus terminales positivo y negativo, y esta diferencia de potencial proporcionada no varía independientemente del circuito al que conectemos la fuente. Una pila recién estrenada se comporta aproximadamente como fuente de fem ideal y el valor de la diferencia de potencial que proporciona es su fem nominal (por ejemplo, 1,5 V). En los diagramas de circuitos, representaremos las fuentes de fem ideales mediante dos barras paralelas de distinto tamaño, siendo la barra mayor el terminal positivo y la barra menor el terminal negativo. Otras maneras de representar fuentes de fem ideales pueden verse en la figura 6.8.

En una *fente de fem real*, la diferencia de potencial que proporciona es algo menor que su fem y depende del valor de la corriente que atraviesa la fuente cuando se conecta a un circuito. Podemos representar una fuente real mediante una fuente ideal de fem ε en serie con una resistencia interna r . Una pila que lleva algún tiempo en funcionamiento se comporta como fuente de fem no ideal. La resistencia interna de la pila va aumentando con el tiempo y llega un momento que es tan grande que la pila deja de funcionar.

Ejemplo 6.7.1 Una manera de obtener el valor de la resistencia interna r de una batería, conocida su fem ideal ε (o diferencia de potencial cuando la corriente que la atraviesa es cero), es conectar la batería a una resistencia R y medir la corriente I que la atraviesa. Expresemos r en función de V , R e I .

Sol. Teniendo en cuenta que una batería en serie con una resistencia R es equivalente a una fuente ideal ε en serie con dos resistencias r y R , podemos usar la ley de Ohm con la resistencia equivalente R_T :

$$\varepsilon = R_T I = (r + R)I.$$

Despejando r llegamos al resultado buscado

$$r = \frac{\varepsilon}{I} - R.$$

6.8. Potencia eléctrica

Consideremos una batería ideal de fem ε conectada a un circuito y tal que la intensidad de corriente que atraviesa la batería es I . Esta fuente suministra energía que proviene, como hemos visto, del trabajo de las reacciones químicas del interior de la batería. Cada vez que una carga positiva Δq llega al terminal negativo de la batería, formando parte de la corriente que recorre el circuito, la batería ha de hacer un trabajo para llevarla, por su interior, hasta su terminal positivo. El trabajo que realiza la fuerza eléctrica para que la carga Δq vaya desde el terminal negativo hasta el positivo es

$$W_e = -\Delta q \Delta V = -\Delta q \varepsilon$$

que es negativo, por lo que la carga no hará ese movimiento a menos que la batería realice un trabajo del mismo valor y signo opuesto para que ocurra. Ese trabajo es la *energía potencial eléctrica* suministrada al circuito por una fuente de fem ε y tiene un valor

$$U_\varepsilon = \Delta q \varepsilon.$$

Si por la fuente de fem pasa una corriente I en un intervalo de tiempo Δt , se puede escribir $\Delta q = I \Delta t$, de manera que

$$U_\varepsilon = I \varepsilon \Delta t.$$

La *potencia eléctrica* suministrada por la fuente es, entonces,

$$P_\varepsilon = \frac{U_\varepsilon}{\Delta t} = I \varepsilon \quad (6.9)$$

y su unidad en el SI es el vatio (W).

La potencia eléctrica suministrada por una fuente ha de repartirse entre todos los elementos del circuito. En particular, la *potencia que consume una resistencia* de valor R , que tiene una caída de potencial V entre sus terminales y que es atravesada por una corriente I en el sentido en que cae el potencial, se puede escribir, usando la ley de Ohm para pasar de una manera a otra, como

$$P_R = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}. \quad (6.10)$$

La energía que consume la resistencia se debe a la pérdida de energía cinética de los electrones libres al atravesar el interior de esa resistencia. Esta energía cinética perdida por los electrones se transforma, en la resistencia, en un aumento de su energía interna, es decir, en un aumento de su temperatura. Por tanto, la energía consumida en una resistencia es *disipada en el medio en forma de calor*.

Una nota final. Una fuente proporciona energía a un circuito si la corriente que la atraviesa por su interior lo hace desde su terminal negativo hacia su terminal positivo. La potencia que proporciona la fuente en tal caso es, como hemos visto, $P_{\varepsilon} = I \varepsilon$. Hay casos en que un circuito tiene varias fuentes y, en alguna de ellas, la corriente va por su interior desde el terminal positivo al negativo. En este caso, la potencia de esa fuente, $P_{\varepsilon} = I \varepsilon$, no será potencia proporcionada al circuito, sino potencia consumida por esa fuente en particular.

Ejemplo 6.8.1 Dos resistencias, $R_1 = 1 \Omega$ y $R_2 = 3 \Omega$, que están en paralelo, se conectan a una fuente ideal de tensión de 6 V. Calculemos la potencia disipada en cada resistencias y comprobemos que su suma coincide con la potencia suministrada por la fuente.

Sol. Las dos resistencias están en paralelo y por tanto la caída de tensión en ambas es la misma, y coincide con la tensión de la fuente $\varepsilon = 6$ V. Así, las potencias disipadas son

$$P_{R_1} = \frac{\varepsilon^2}{R_1} = \frac{36}{1} = 36 \text{ W},$$

$$P_{R_2} = \frac{\varepsilon^2}{R_2} = \frac{36}{3} = 12 \text{ W}.$$

En total, la potencia disipada es

$$P_R = P_{R_1} + P_{R_2} = 48 \text{ W}.$$

Este valor de P_R también lo podemos calcular usando el valor de la resistencia equivalente

$$R_T = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4} = 0,75 \Omega.$$

Así,

$$P_R = \frac{\varepsilon^2}{R_T} = \frac{36}{0,75} = 48 \text{ W}.$$

Para obtener la potencia suministrada por la fuente, necesitamos calcular la intensidad I que la atraviesa. Esta intensidad es la misma que circula por la resistencia R_T y que podemos calcular con la ley de Ohm:

$$\varepsilon = I R_T \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R_T} = \frac{6}{0,75} = 8 \text{ A}.$$

De este modo, la potencia suministrada por la fuente es

$$P_{\varepsilon} = I \varepsilon = 6 \cdot 8 = 48 \text{ W},$$

que coincide con la potencia disipada P_R .

6.9. Tabla resumen

Fórmula/magnitud	Definición	Ecuación
$\mathbf{E} = \frac{\sigma_{pos}}{\epsilon_0} \mathbf{u}_{\pm}$	Campo eléctrico condensador plano	(6.1)
$\sigma_{pos} = \frac{Q}{A}$	Densidad superficial de carga positiva	
ϵ_0	Carga de la placa positiva	
A	Permitividad del vacío	
$\mathbf{u}_{\pm}$	Área de las placas	
$C = \frac{\epsilon A}{d}$	Capacidad del condensador plano	(6.2)
ϵ	Permitividad del dieléctrico o vacío (ϵ_0)	
d	Distancia entre placas	
$C_T = C_1 + C_2$	Capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo	
$C_T^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$	Capacidad equivalente de dos condensadores en serie	
$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C(\Delta V)^2}{2}$ $= \frac{Q(\Delta V)}{2}$	Energía de un condensador	(6.3)
ΔV	Diferencia de potencial entre placas	
$V = RI$	Ley de Ohm	(6.4)
V	Caída de potencial	
R	Resistencia	
I	Intensidad	
$R = \rho_e \frac{\ell}{S}$	Resistencia	(6.5)
ρ_e	Resistividad eléctrica	
ℓ	Longitud del cable	
S	Sección del cable	

$\rho_e = \rho_{e0} [1 + \alpha (T - T_0)]$	Resistividad versus temperatura	(6.6)
ρ_e	Resistividad a la temperatura T	
ρ_{e0}	Resistividad a la temperatura T_0	
α	Coeficiente térmico de la resistividad	
$R_T = R_1 + R_2$	Resistencia equivalente de dos resistencias en serie	(6.7)
$R_T^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$	Resistencia equivalente de dos resistencias en paralelo	(6.8)
$P_\varepsilon = P_\varepsilon$	Potencia suministrada por la fuente	(6.9)
I	Intensidad a través de la fuente	
ε	del polo negativo al positivo	
	Fuerza electromotriz de la fuente	
$P_R = I V = I^2 R$	Potencia consumida por la resistencia R	(6.10)
$= \frac{V^2}{R}$		
I	Intensidad	
V	Caída de potencial	

6.10. Problemas resueltos

1. A partir de la siguiente expresión del campo eléctrico $\mathbf{E} = 4 \text{ kV/m } \mathbf{i} + 7 \text{ kV/m } \mathbf{j}$, calcula la diferencia de potencial entre cualquiera pareja de los puntos $A = (0, 0, 0) \text{ cm}$, $B = (1, 0, 0) \text{ cm}$ y $C = (2, 3, 0) \text{ cm}$.

Sol. La diferencia de potencial entre dos puntos P y Q puede calcularse a partir del campo eléctrico $\mathbf{E}$ mediante

$$\Delta V = V_P - V_Q = - \int_Q^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Si el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es uniforme (no depende de la posición), puede sacarse de la integral. Entonces,

$$\Delta V = V_P - V_Q = -\mathbf{E} \cdot \int_Q^P d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)$$

Para el caso del ejercicio,

$$V_B - V_A = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -(4000, 7000, 0) \cdot (0, 01, 0, 0) = -40V,$$

$$V_C - V_B = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) = -(4000, 7000, 0) \cdot (0, 01, 0, 03, 0) = -250\text{V};$$

$$\begin{aligned} V_A - V_C &= -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) = -(4000, 7000, 0) \cdot (-0, 02, -0, 03, 0) \\ &= 80 + 210 = 290\text{V}; \end{aligned}$$

2. Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ V/m y los puntos $A = (-2, -3, 1)$ m y $B = (1, -2, 3)$ m, calcula el potencial en el punto B sabiendo que el potencial en el punto A es 5 V.

Sol. La diferencia de potencial entre B y A , dado que el campo eléctrico es uniforme, es

$$V_B - V_A = -\mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = -(-1, 2, -3) \cdot (3, 1, 2) = -(-3 + 2 - 6) = 7\text{V}.$$

Dado que $V_A = 5\text{V}$,

$$V_B - V_A = 7 \quad \Rightarrow \quad V_B = V_A + 7 = 5 + 7 = 12\text{V}.$$

3. Un condensador plano se situá perpendicularmente al eje X , con su placa positiva en $x = 0$ y la negativa en $x = 1$ cm. Teniendo en cuenta que el campo eléctrico generado entre las placas es igual a $\mathbf{E} = 4$ kV/m $\mathbf{i}$ y que el potencial de la placa positiva es $V_+ = 10$ V, calcula

- la diferencia de potencial entre la placa positiva y la placa negativa del condensador,
- el potencial de los puntos $x = 0,1$ cm y $x = 0,9$ cm,
- la posición del punto que se encuentra a potencial nulo.

Sol. En primer lugar, calculemos el potencial de cualquier punto entre las placas del condensador, es decir, el potencial $V(x)$ en los puntos $x \in (0 \text{ cm}, 1 \text{ cm})$. La expresión del potencial en función del campo eléctrico es

$$V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + k.$$

donde se ha usado que $\mathbf{E}$ es uniforme y k es una constante de integración. En el caso del ejercicio,

$$V = -(4000, 0, 0) \cdot (x, y, z) + k = -4000x + k.$$

Para calcular el valor de k , el dato que nos ofrecen es que el potencial de la placa positiva es $V_+ = 10$ V. Dado que esta placa se encuentra en $x = 0$ cm, tendremos

$$V_+ = 10 = V(0) = -4000 \cdot 0 + k = k$$

Por tanto, el potencial entre las placas del condensador es

$$V(x) = 10 - 4000x$$

con $0 \text{ m} \leq x \leq 0,01 \text{ m}$.

a) La diferencia de potencial entre las placas del condensador es

$$\Delta V = V_+ - V_- = V(0) - V(1) = (10 - 4000 \cdot 0) - (10 - 4000 \cdot 0,01) = 40 \text{ V}.$$

b) Para los puntos $x = 0,1 \text{ cm}$ y $x = 0,9 \text{ cm}$,

$$V(0,1 \text{ cm}) = 10 - 4000 \cdot 0,001 = 6 \text{ V},$$

$$V(0,9 \text{ cm}) = 10 - 4000 \cdot 0,009 = -29 \text{ V}.$$

c) Hay muchos puntos en los que el potencial vale cero. Son todos aquéllos entre las placas con coordenada horizontal x_0 :

$$V(x_0) = 0 = 10 - 4000x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{10}{4000} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

4. Se carga un condensador de capacidad 5 nF con una batería de 12 V . Una vez cargado, se desconecta de la batería y se le introduce entre sus placas un dieléctrico con una permitividad relativa igual a 2. En la configuración final, calcula

a) la carga almacenada en el condensador,

b) la diferencia de potencial entre sus placas.

Sol. Dado que el condensador se carga con una pila de 12 V , la diferencia de potencial inicial entre sus placas es $\Delta V_0 = 12 \text{ V}$. La carga inicial que almacena el condensador es

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 12 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C}.$$

a) Al desconectar el condensador de la batería, la carga ha de mantenerse constante (el condensador no está en contacto con nada, de manera que la carga no puede moverse de sus placas). Así, la carga después de introducir el dieléctrico será la misma que antes de hacerlo, es decir,

$$Q = Q_0 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

b) Al introducir el dieléctrico con permitividad relativa $\epsilon_r = 2$, la capacidad del condensador cambia del siguiente modo:

$$C = \epsilon_r C_0 = 2 \cdot 10^{-9} = 2 \text{ nF.}$$

La diferencia de potencial entre las placas del condensador con el dieléctrico será

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{6 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 6 \text{ V.}$$

5. Se carga un condensador de $1,5 \mu\text{F}$ de capacidad con una pila de $4,5 \text{ V}$. Sin desconectar el condensador de la pila, se inserta entre las placas un dieléctrico. Calcula la permitividad relativa de éste sabiendo que la placa positiva recibe una carga adicional de $5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Sol. La carga almacenada por el condensador sin dieléctrico es

$$C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} \Rightarrow Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,5 = 6,75 \cdot 10^{-6} \text{ C,}$$

donde $\Delta V_0 = 4,5 \text{ V}$ es la diferencia de potencial proporcionada por la pila para cargar el condensador. Dado que nunca se desconecta el condensador de la pila, la diferencia de potencial tras introducir el dieléctrico ha de mantenerse igual,

$$\Delta V = \Delta V_0 = 4,5 \text{ V.}$$

La permitividad relativa del dieléctrico introducido entre las placas del condensador puede calcularse de la siguiente manera:

$$C = \epsilon_r C_0 = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{Q}{C_0 \Delta V} = \frac{6,75 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}}{1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4,5} \approx 1,74.$$

6. Un condensador está hecho de placas cuadradas, de 1 cm de lado, separadas 1 mm . Tras cargarlo con una batería de 5 V , se desconecta y la separación entre las placas se incrementa en 1 mm . Calcula el incremento de energía.

Sol. La capacidad inicial del condensador plano es

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{ F.}$$

Dado que se usa una batería de 5 V, la carga almacenada inicialmente es

$$Q_0 = C_0 \Delta V_0 = 8,85 \cdot 10^{-13} \cdot 5 \simeq 4,43 \cdot 10^{-12} \text{ C.}$$

Como se desconecta después el condensador de la batería, su carga permanece igual,

$$Q = Q_0 \simeq 4,43 \cdot 10^{-12} \text{ C.}$$

Su capacidad, al separar las placas hasta 2 mm, es

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} \simeq 4,43 \cdot 10^{-13} \text{ F.}$$

El incremento de energía electrostática resulta

$$\begin{aligned} \Delta U_e &= U_e - U_{e,0} = \frac{1}{2} Q \Delta V - \frac{1}{2} Q_0 \Delta V_0 \\ &= \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q_0^2}{2C_0} = \frac{(4,43 \cdot 10^{-12})^2}{2 \cdot 4,43 \cdot 10^{-13}} - \frac{(4,43 \cdot 10^{-12})^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-13}} \simeq 1,11 \cdot 10^{-11} \text{ J.} \end{aligned}$$

Esta diferencia de energía electrostática proviene del trabajo realizado por el agente que separa las placas, que ha de vencer la atracción electrostática entre ellas.

7. Se conecta una batería de 12 V a una asociación en paralelo de dos condensadores de cargas $0,5 \mu\text{F}$ y tres de $0,25 \mu\text{F}$. Calcula la carga total almacenada.

Sol. Dado que los condensadores están en paralelo, su capacidad equivalente es

$$C_T = C_1 + \dots + C_5 = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,25 = 1,75 \mu\text{F.}$$

La carga total almacenada por la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T = 1,75 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ C.}$$

8. Se conecta una batería de 12 V a una asociación en serie de dos condensadores de cargas $0,5 \mu\text{F}$ y tres de $0,25 \mu\text{F}$. Calcula la carga total almacenada.

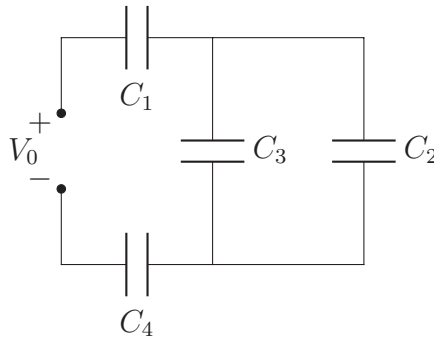
Sol. Dado que los condensadores están en serie, su capacidad equivalente está dada por

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_5} = \frac{2}{0,5} + \frac{3}{0,25} = 14 \Rightarrow C_T = \frac{1}{14} \approx 0,0714 \mu\text{F}.$$

La carga total almacenada por la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T \simeq 0,0714 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \simeq 8,57 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

9. A la asociación de condensadores de la figura, con $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$, $C_2 = 0,2 \mu\text{F}$, $C_3 = 0,3 \mu\text{F}$ y $C_4 = 0,4 \mu\text{F}$, se le aplica una diferencia de potencial $V_0 = 12 \text{ V}$. Calcula la carga almacenada y la diferencia de potencial en cada condensador.



Sol. Calculamos primero la capacidad equivalente del sistema. Como C_2 y C_3 están en paralelo,

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 0,2 + 0,3 = 0,5 \mu\text{F}.$$

Ahora, C_1 , C_{23} y C_4 están en serie, de modo que

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,4} = 14,5 \Rightarrow C_T = \frac{1}{14,5} \approx 0,0690 \mu\text{F}.$$

La carga total almacenada en la asociación es

$$Q_T = C_T \Delta V_T \simeq 6,90 \cdot 10^{-8} \cdot 12 = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

Dado que C_1 , C_{23} y C_4 están en serie, almacenan la misma carga que toda la asociación, es decir,

$$Q_1 = Q_{23} = Q_4 \simeq 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

La diferencia de potencial en C_1 , C_{23} y C_4 es

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \approx \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,1 \cdot 10^{-6}} = 8,28 \text{ V},$$

$$\Delta V_{23} = \frac{Q_{23}}{C_{23}} \approx \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,5 \cdot 10^{-6}} \approx 1,66 \text{ V},$$

$$\Delta V_4 = \frac{Q_4}{C_4} \approx \frac{8,28 \cdot 10^{-7}}{0,4 \cdot 10^{-6}} \approx 2,07 \text{ V}.$$

Y, dado que están en serie, se cumple $\Delta V_T = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 12 \text{ V}$ (excepto por errores de redondeo).

Faltan por calcular los valores asociados a C_2 y C_3 . Están en paralelo entre ellos, de modo que

$$\Delta V^2 = \Delta V_3 = \Delta V_{23} \approx 1,66 \text{ V}.$$

Las cargas almacenadas en C_2 y C_3 son

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 \approx 2 \cdot 10^{-7} \cdot 1,66 \approx 3,31 \cdot 10^{-7} \text{ C},$$

$$Q_3 = C_3 \Delta V_3 \approx 3 \cdot 10^{-7} \cdot 1,66 \approx 4,97 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

Y, dado que están en paralelo, se cumple $Q_{23} = Q_2 + Q_3 \approx 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ C}$.

10. Dos condensadores de idéntica capacidad $C_{01} = C_{02} = 1 \mu\text{F}$ se conectan en paralelo a una pila de 3 V hasta que se cargan completamente, momento en el que se desconectan de ésta. Entonces se introduce en el segundo condensador un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 2$. Calcula la carga almacenada en cada condensador en la situación final. **Sol.** Antes de desconectar los condensadores de la pila, la capacidad equivalente es

$$C_{T0} = C_{01} + C_{02} = 1 + 1 = 2 \mu\text{F}$$

y la carga total almacenada en la asociación es

$$Q_{T0} = C_{T0} \Delta V_{T0} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

Tras desconectar la asociación de la pila, la carga total ha de seguir siendo la misma, aunque cambie la de cada condensador, así que tendremos

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = Q_{T0} = 6 \mu\text{C}.$$

La capacidad equivalente tras introducir el dieléctrico en el segundo condensador será

$$C_T = C_1 + C_2 = C_{01} + \varepsilon_r C_{02} = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \mu\text{F}.$$

Con esto, la diferencia de potencial final en la asociación es

$$\Delta V_T = \frac{Q_T}{C_T} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ V}.$$

Dado que los condensadores están en paralelo, la diferencia de potencial en cada uno de ellos es igual a la que hay en la asociación, es decir,

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V_T = 2 \text{ V}.$$

Finalmente, la carga almacenada en cada condensador resulta

$$Q_1 = C_1 \Delta V_1 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

$$Q_2 = C_2 \Delta V_2 = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ C},$$

Y se cumple que $Q_1 + Q_2 = 6 \mu\text{C}$, como antes de haber desconectado la asociación de condensadores de la batería.

11. Un alambre de aluminio tiene un diámetro de 2 mm. Teniendo en cuenta que la resistividad del aluminio es de $\rho_e = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, calcula la longitud necesaria para obtener una resistencia de $0,5 \Omega$.

Sol. El área de una sección transversal del cable, de diámetro d , es

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Con esto, de la relación entre resistencia y resistividad en el cable, llegamos a

$$R = \rho_e \frac{\ell}{S} \Rightarrow \ell = \frac{S R}{\rho_e} = \frac{10^{-6} \cdot 0,5}{2,8 \cdot 10^{-8}} \approx 17,9 \text{ m}.$$

12. Se utiliza un cable de platino para medir temperaturas. Determina la precisión con la que se ha de medir la resistencia del cable si queremos medir la temperatura con un error máximo de $0,5^\circ\text{C}$. Ten en cuenta que la resistencia del cable a temperatura ambiente es 50Ω y que el coeficiente térmico del platino es de $3,9 \cdot 10^{-3}^\circ\text{C}^{-1}$.

Sol. De la ecuación de la dependencia de la resistencia con la temperatura, podemos escribir

$$\Delta R = R - R_0 = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] - R_0 = R_0 \alpha \Delta T.$$

Por tanto, si el error máximo en la medición de temperatura es $\Delta T = 0,5^\circ\text{C}$, el error máximo en la medición de resistencia ha de ser

$$\Delta R = R_0 \alpha \Delta T = 50 \cdot 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \simeq 0,0975 \, \Omega.$$

13. Un cable hecho de nicromo, de coeficiente térmico de resistencia de $4,1 \cdot 10^{-4} \, \text{K}^{-1}$, está sometido a una diferencia de potencial igual a 220 V. Cuando su temperatura es de 25°C , la intensidad que fluye por el cable es de 3 A. Tras un rato, la temperatura del cable cambia de modo que la intensidad se reduce a 2,8 A. Calcula la nueva temperatura.

Sol. En primer lugar, se calculan las resistencia del cable a 25°C , que llamaremos R_0 y a temperatura T , que llamaremos R , con la ley de Ohm:

$$R_0 = \frac{V}{I_0} = \frac{220}{3} \simeq 73,3 \, \Omega,$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{220}{2,8} = 78,6 \, \Omega.$$

Usamos ahora la dependencia de la resistencia con la temperatura,

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

para despejar la temperatura final T ,

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0} \simeq 25 + \frac{88 - 78,6}{4,1 \cdot 10^{-4} \cdot 78,6} \simeq 199^\circ\text{C}.$$

14. Una bombilla tiene un filamento formado de tungsteno, con coeficiente térmico de resistencia de $3,9 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1}$. Teniendo en cuenta que, cuando el filamento está sometido a una diferencia de potencial de 220, disipa 25 W y está a 1800 K, calcula su resistencia a 25°C .

Sol. La resistencia a $T = 1800 \, \text{K}$ puede calcularse mediante la expresión de la potencia disipada por una resistencia:

$$P_R = IV = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P_R} = \frac{220^2}{25} = 1936 \, \Omega.$$

Con este dato, de la dependencia de la resistencia con la temperatura,

$$R = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

con $T_0 = 298,15 \text{ K}$ y despejando R_0 , tenemos

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha(T - T_0)} = \frac{1936}{1 + 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot (1800 - 298,15)} \approx 282 \, \Omega.$$

15. Calcula la resistencia interna de una batería de 15 V teniendo en cuenta que, al conectarla a una resistencia de $200 \, \Omega$, la diferencia de potencial entre sus terminales es de 14V.

Sol. Una batería real funciona como una batería ideal de fem ϵ en serie con una resistencia interna r . Si conectamos la batería a una resistencia R , las resistencias r y R estarán en serie entre ellas, así que su resistencia equivalente y la corriente por el circuito serán

$$R_{eq} = r + R \Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R_{eq}} = \frac{\epsilon}{r + R}.$$

La diferencia de potencial entre los terminales de la batería real cuando es atravesada por la corriente I es

$$V = \epsilon - rI = \epsilon - r \frac{\epsilon}{r + R} = \frac{R\epsilon}{r + R}.$$

Despejando r y usando los datos del ejercicio,

$$r = \frac{R\epsilon}{V} - R = \frac{200 \cdot 15}{14} - 200 \approx 14,3 \, \Omega.$$

16. Calcula la fuerza electromotriz y la resistencia interna de una batería sabiendo que, cuando se conecta a una resistencia de $100 \, \Omega$, la intensidad que la atraviesa es de 15 mA, mientras que si se conecta a una resistencia de $200 \, \Omega$ la intensidad se reduce a 10 mA.

Sol. La resistencia equivalente y la corriente por el circuito son

$$R_{eq} = r + R \Rightarrow I = \frac{\epsilon}{R_{eq}} = \frac{\epsilon}{r + R}.$$

Para los dos casos del ejercicio,

$$I_1 = \frac{\epsilon}{r + R_1}$$

$$I_2 = \frac{\epsilon}{r + R_2}.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, llegamos a

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_2}{r + R_1},$$

de la que podemos despejar la resistencia interna

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = \frac{(15 \cdot 100) - 10 \cdot 200}{10 - 15} = 100 \, \Omega.$$

A partir del resultado, la fem de la batería será

$$\epsilon = I_1 (r + R_1) = 15 \cdot 10^{-3} \cdot (100 + 200) = 4,5 \, \text{V}.$$

17. Conectamos una batería y dos resistencias, $R_1 = 10^6 \, \Omega$ y $R_2 = 2 \cdot 10^6 \, \Omega$, en serie. Teniendo en cuenta que la caída de potencial en R_1 es de 5 V, calcula la fuerza electromotriz de la batería supuesta ideal, así como la corriente que circula por el circuito.

Sol. La corriente por el circuito, en el que todos los elementos están en

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{5}{10^6} = 5 \cdot 10^{-6} \, \text{A}.$$

Por tanto, la caída de potencial en R_2 es

$$V_2 = I R_2 = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 = 10 \, \text{V}.$$

La fem de la batería es la suma de V_1 y V_2 :

$$\epsilon = V_1 + V_2 = 5 + 10 = 15 \, \text{V}.$$

18. Conectamos la asociación de tres resistencias en paralelo, $R_1 = 10 \, \text{k}\Omega$, $R_2 = 20 \, \text{k}\Omega$ y $R_3 = 30 \, \text{k}\Omega$, a una batería. Teniendo en cuenta que la corriente a través de R_1 es de 1 mA, calcula la fuerza electromotriz de la batería, supuesta ideal, y la corriente que circula por ella y por las otras resistencias..

Sol. La diferencia de potencial en R_1 es

$$V_1 = I_1 R_1 = 1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^3 = 10 \, \text{V}.$$

Como los elementos están en paralelo, se cumple

$$\epsilon = V_1 = V_2 = V_3 = 10 \, \text{V}.$$

Con esto, las corrientes en R_2 y R_3 son

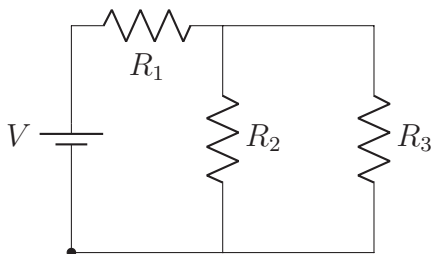
$$I_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{10}{20 \cdot 10^3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{V_3}{R_3} = \frac{10}{30 \cdot 10^3} \approx 0,333 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Finalmente, la corriente en la batería es

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \approx 10^{-3} + 0,5 \cdot 10^{-3} + 0,333 \cdot 10^{-3} \approx 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

19. Calcula el valor de la resistencia R_3 en el circuito de la figura para que por la batería circula una intensidad de 0,1 A. Datos: $V = 5 \text{ V}$, $R_1 = 10\Omega$ y $R_2 = 50\Omega$.



Sol. Podemos obtener la resistencia equivalente a partir de la ley de Ohm en la batería,

$$R_{eq} = \frac{\varepsilon}{I} = \frac{5}{0,1} = 50 \Omega.$$

Por otro lado, la resistencia equivalente es

$$R_{eq} = R_1 + R_{23} \Rightarrow R_{23} = R_{eq} - R_1 = 50 - 10 = 40\Omega,$$

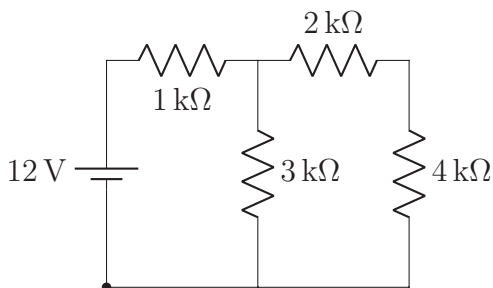
donde R_{23} es la resistencia equivalente a la asociación de R_2 y R_3 . Como R_2 y R_3 están en paralelo, tenemos

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200}.$$

Invirtiendo la última igualdad,

$$R_3 = 200 \Omega.$$

20. Calcula la corriente por la batería y la diferencia de potencial entre los extremos de las resistencias del siguiente circuito.



Sol. Para calcular la corriente total, se puede primero obtener la resistencia equivalente. Se procede desde las resistencias más alejadas a la batería. Las dos últimas están en serie, de manera que

$$R_{24} = 2 + 4 = 6 \text{ k}\Omega.$$

El resultado está en paralelo con la resistencia de 3 kΩ,

$$\frac{1}{R_{324}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{324} = 2 \text{ k}\Omega.$$

Finalmente, la anterior está en serie con la resistencia de 1 kΩ, con lo que llegamos a

$$R_{eq} = 2 + 1 = 3 \text{ k}\Omega.$$

Ya podemos calcular la corriente total en la batería mediante

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{12}{3 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

La caída de potencial en la resistencia de 1 kΩ es

$$V_1 = I R_1 = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 4 \text{ V}.$$

Por tanto, en la resistencia de 3 kΩ, y también en la asociación en serie de las resistencia de 2 kΩ y 4 kΩ, hay una caída de potencial

$$V_3 = V_{24} = \varepsilon - V_1 = 12 - 4 = 8 \text{ V}.$$

La corriente en la asociación en serie de las resistencia de 2 kΩ y 4 kΩ

$$I_{24} = \frac{V_{24}}{R_{24}} = \frac{8}{6 \cdot 10^3} \approx 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Finalmente, con I_{24} obtenemos las caídas de potencial en las resistencias de 2 y 4 k Ω

$$V_2 = I_{24} R_2 \simeq 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 = 2,66 \text{ V},$$

$$V_4 = I_{24} R_4 \simeq 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 \simeq 5,33 \text{ V}.$$

21. Los cables de la instalación eléctrica de una casa, de resistividad igual a $1,5 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, tienen un diámetro de 2 mm. Calcula la corriente máxima que pueden transportar para que el calor que desprendan por efecto Joule sea inferior a 1 W/m.

Sol. La potencia convertida en calor Joule en el cable es

$$P = IV = I^2 R = I^2 \rho_e \frac{\ell}{S}.$$

De aquí, la potencia por unidad de longitud de cable (dado que el dato que nos dan está en W/m, se trata de una potencia por unidad de longitud) es

$$\frac{P}{\ell} = \frac{I^2 \rho_e}{\pi r^2},$$

donde $r = d/2$ es el radio de la sección del cable y d es su diámetro, que es lo que nos piden. Dado que la potencia por unidad de longitud ha de ser menor de 1 W/m, llegamos a

$$\frac{I^2 \rho_e}{\pi (d/2)^2} < 1.$$

Despejando la intensidad,

$$I < \sqrt{\frac{\pi d^2}{4 \rho_e}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-8}}} \simeq 14,5 \text{ A}.$$

Por tanto, la intensidad máxima I_m es

$$I_m \simeq 14,5 \text{ A}.$$