

CAPÍTULO 8. MAGNETISMO E INDUCCIÓN

Este tema incluye algunos resultados básicos sobre magnetoestática. Comenzamos analizando el comportamiento de algunos materiales como los imanes y solenoides. Esto nos lleva a definir el campo magnético y a considerar su forma más sencilla: el campo magnético generado por un solenoide. A continuación, enunciamos la ley de Lenz-Faraday que explica cómo se puede inducir una fuerza electromotriz por medio de un flujo magnético variable en el tiempo. Como aplicación del resultado anterior, analizamos el fenómeno de autoinducción, lo que nos llevará al concepto de autoinductancia. Finalmente, estudiamos los generadores de corriente alterna y los transformadores.

8.1. Imanes y solenoides

En la naturaleza existen materiales que, sin estar cargados, atraen y repelen a otros. Se les llama *imanes* y, a la propiedad que presentan, *magnetismo*.

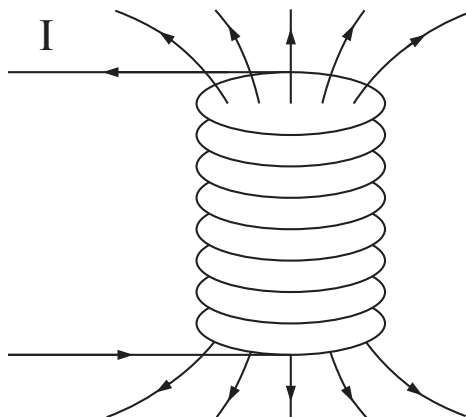
Todo imán tiene dos polos, llamados norte y sur magnéticos, de tal forma que los polos del mismo tipo se repelen y los polos de tipo opuesto se atraen. Los imanes crean *campos magnéticos* a su alrededor. Estos campos magnéticos son campos vectoriales. Las *líneas de campo magnético*, que se definen de manera que en cada punto son tangentes al vector campo magnético, son cerradas. Los polos norte son manantiales de líneas de campo magnético y los polos sur son sumideros de líneas de campo magnético. Las líneas se cierran por el interior del imán.

Denotaremos el campo magnético creado por determinada fuente, como un imán, mediante la notación **B**. La unidad de campo magnético es el *tesla* (T).

Campo magnético de un solenoide

Las cargas eléctricas en movimiento y las corrientes eléctricas son *fuentes de campo magnético*, es decir, son responsables de crear campos magnéticos. Sin embargo, para nuestras aplicaciones es suficiente considerar aquí un caso particular especialmente sencillo, que es el campo magnético creado por un solenoide.

Figura 8.1: Representación de un solenoide y el campo magnético que genera.



Un *solenoide* es una bobina (geométricamente, un cilindro de longitud ℓ y sección circular de radio R) sobre la cual se enrolla un alambre conductor dando N vueltas. Este dispositivo proporciona un *campo magnético intenso y aproximadamente uniforme en la región acotada por el alambre enrollado*. Es, por tanto, el análogo magnético al campo eléctrico de un condensador. Un esquema de un solenoide y las líneas de campo magnético que produce se ven en la figura 8.1.

Cuando una corriente eléctrica I recorre un solenoide largo y de muchas *vuel-
tas por unidad de longitud*, representadas por la cantidad $n = N/\ell$, las líneas magnéticas en el interior del solenoide son aproximadamente paralelas al eje del solenoide y están muy juntas unas de otras, es decir, el campo magnético es intenso y aproximadamente uniforme. Fuera del solenoide, las líneas están mucho más espaciadas, indicando que el campo es mucho menos intenso. En general, presentan *la misma configuración que las líneas creadas por un imán permanente de la misma forma y tamaño*.

El campo magnético en el interior del solenoide se puede expresar de la forma que sigue. Supongamos que el eje del solenoide es el eje z , es decir, el eje z está a lo largo del pulgar de nuestra mano derecha cuando los dedos mayores de la misma mano recorren la superficie del solenoide en el sentido de la corriente eléctrica. Entonces

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k}, \quad (8.1)$$

donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ es la *permeabilidad magnética del vacío*.

Como vemos en la expresión anterior, el campo magnético interior de un solenoide es un *campo uniforme*. Este campo se puede hacer aún mucho mayor si colocamos en el interior del solenoide un *núcleo ferromagnético*. Este dispositivo (un solenoide largo con un núcleo ferromagnético) se llama *electroimán*.

Ejemplo 8.1.1 Calculemos el módulo del campo magnético generado por un solenoide de 10 cm de longitud compuesto por 100 vueltas de cable cuando por éste circula una corriente de 0,1 A.

Sol. Tenemos que $n = \frac{100}{0,1} = 10^4 \text{ m}^{-1}$. Usando la ecuación (8.1) en forma escalar, llegamos a que el módulo del campo magnético es

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 0,1 = 4\pi \cdot 10^{-4} \simeq 1,26 \text{ mT}.$$

8.2. Inducción electromagnética

De forma independiente, Faraday y Henry descubrieron que un campo magnético variable en el tiempo podía producir una fuerza electromotriz. Por ejemplo, si colocamos un imán permanente cerca de una espira y no hay movimiento relativo entre ellos, la corriente que circula por la espira es cero pues no está conectada a ninguna fuente de fem. Pero si aproximamos el imán a la espira se comprueba que aparece una corriente en ella, como se representa en la figura 8.2. Si alejamos el imán, la corriente tiene sentido contrario. Y también se generaría una corriente en la espira si movemos la espira pero no el imán. La corriente en la espira se llama *corriente inducida*, pues ha sido producida por un campo magnético variable en el tiempo. Y la misma espira se comporta como una fuente de *fem inducida* capaz de producir esa corriente.

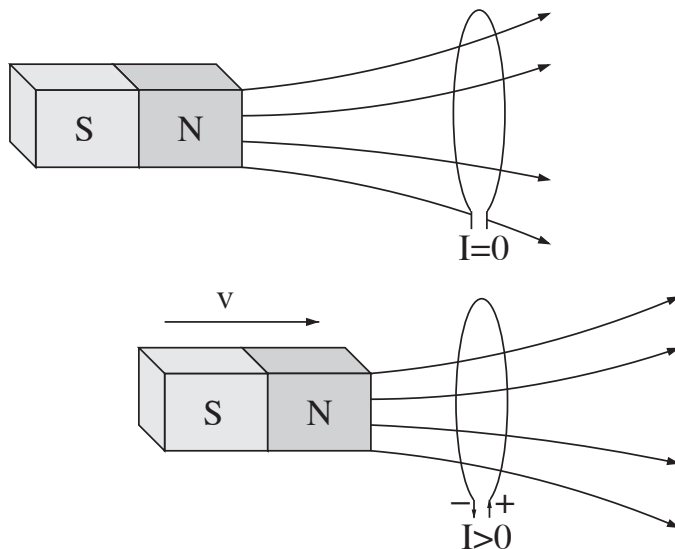
El fenómeno de producción de una fem con ayuda de un campo magnético se llama *inducción electromagnética*.

Ley de Faraday

La *ley de Faraday* de la inducción electromagnética relaciona la fem inducida en un circuito C con el cambio de flujo magnético a través de la superficie S encerrada por él. Se escribe

$$\mathcal{E}_{ind} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (8.2)$$

Figura 8.2: Inducción electromagnética al acercar un imán a una espira. Si la velocidad relativa del imán a la espira es cero, entonces la intensidad inducida es cero (figura superior). En otro caso la intensidad es no nula (figura inferior).



En esta expresión, Φ_m es el *flujo magnético* a través de la superficie S encerrada por C . El flujo se calcula mediante la integral de superficie

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (8.3)$$

donde $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, siendo $\mathbf{n}$ un vector unitario normal a la superficie S en cada punto y dS el elemento de área en ese punto. La unidad de flujo magnético es el *weber*, definido de manera que $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

Si el campo magnético es *uniforme* en la superficie S , que será el caso más usual en las aplicaciones que vamos a tratar, el flujo magnético se puede escribir

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})S.$$

El signo menos que aparece en la ley de Faraday indica que la fem inducida se *opone a la causa que la produce* (que es la variación del flujo magnético). Una manera de comprender esto es a través de la ley de Lenz.

Ley de Lenz

La ley de Lenz explica el sentido de la corriente inducida en un circuito. Esta ley se basa en notar que el campo magnético neto que penetra un circuito está

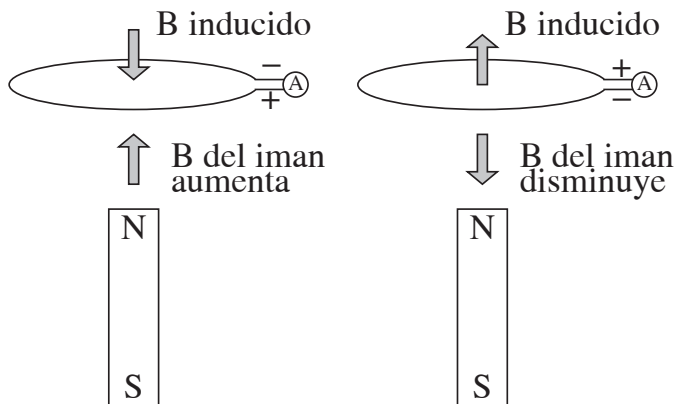
formado por dos contribuciones. La primera es el *campo magnético externo* que produce un cambio en el flujo y da lugar a la fem inducida y a la corriente inducida. Además, existe una segunda contribución, dada por el campo magnético creado por la propia corriente inducida, que se llama *campo magnético inducido*.

La *ley de Lenz* dice que la fem inducida resultante de un flujo magnético variable tiene tal polaridad que la corriente inducida genera un campo magnético inducido que se opone a la variación del flujo magnético original.

Tratemos de encontrar la dirección de la corriente inducida en una espira por un imán permanente que se acerca a ella. El flujo magnético a través de la espira crece porque el campo magnético del imán sobre la espira crece al acercarse. Así, el campo magnético inducido $\mathbf{B}_{ind}$ debe tener un sentido contrario al crecimiento del flujo, por la ley de Lenz, y debe entonces dirigirse hacia abajo. Para crear un campo magnético inducido hacia abajo, el sentido de la corriente inducida debe ser horario, como se ve aplicando la regla del sacacorchos. Este sentido de la corriente nos da la polaridad de la fem inducida (indicada por los signos + y - en la figura 8.3). En el caso en el que el imán se alejase de la espira, el sentido de la corriente inducida se invertiría.

Ejemplo 8.2.1 Consideremos una espira cuadrada de lado 10 cm inmersa en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 5\mathbf{k}$ mT. El ángulo α que forma el vector unitario normal a la espira $\mathbf{n}$ con el campo magnético $\mathbf{B}$ varía con el tiempo como $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}t$, donde t se mide en segundos. Calculemos la fem inducida ε_{ind} en la espira.

Figura 8.3: Campo magnético inducido en una espira al acercar (izquierda) y alejar (derecha) un imán.



Sol. Para obtener el ε_{ind} primero debemos conocer el flujo magnético Φ_m del campo magnético $\mathbf{B}$ a través de la espira como función del tiempo. Dado que $\mathbf{B}$ es uniforme, tenemos

$$\Phi_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}S = 5 \cos(\alpha) 0,1^2 = 0,05 \cos(\alpha) \text{ Wb},$$

donde α es una función conocida del tiempo. Usando ahora la ley de Faraday, obtenemos el resultado deseado

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0,05 \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\pi}{40} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ V}.$$

8.3. Autoinducción

La autoinducción es el fenómeno por el cual un circuito por el que pasa una corriente variable induce una fem en el mismo circuito que se opone a la variación de flujo original.

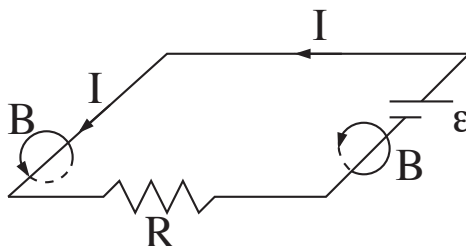
Como vemos en la figura 8.4, consideremos un circuito por el que circula una corriente I variable. Esta corriente crea un campo magnético variable y un flujo variable a través del propio circuito. Según la ley de Faraday, habrá una fem inducida en el circuito, y su valor será

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt},$$

donde L es la *autoinductancia* del circuito, cuya unidad es el *henrio*, 1 H, y que se define como

$$L = \frac{\Phi_m}{I}.$$

Figura 8.4: Ejemplo de autoinducción en un circuito simple.



La autoinductancia sólo depende de la geometría del circuito y de las propiedades de los materiales de los que están compuestos las bobinas que tenga el circuito. Una bobina o solenoide con muchas vueltas y un *núcleo ferro- magnético* posee una L mucho mayor que la de un circuito corriente, en el que se suele despreciar su autoinductancia. La bobina se llama entonces *inductor* y es un elemento de circuito como las resistencias y los condensadores.

Observamos que la fem autoinducida se opone a la causa que la produce, que es la fem variable del generador conectado al circuito. Podemos, pues, considerar un inductor como un elemento en el que cae una tensión V_L . La *ecuación característica* del inductor es entonces

$$V_L = L \frac{dl}{dt}, \quad (8.4)$$

y así aparece normalmente en teoría de circuitos.

Ejemplo 8.3.1 *Calculemos la autoinductancia del solenoide del ejemplo 8.1.1.*

Sol. Supongamos que por el cable del solenoide circula una corriente estacionaria I , cuyo valor no tiene por qué ser el del ejemplo 8.1.1. El campo magnético en su interior es

$$B = \mu_0 n I,$$

donde n es el número de vueltas o espiras por longitud $n = N/\ell$. El flujo magnético total de este campo a través de todas las espiras que forman el solenoide resulta

$$\Phi_m = BNS,$$

donde S es el área de las espiras. Así, la autoinductancia resulta

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \frac{N}{\ell} I N S}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{100^2 0,1^2}{0,1} \approx 1,26 \text{ mH}.$$

El resultado obtenido no depende de I , sino de factores geométricos del solenoide (longitud, sección transversal y número de espiras).

Energía magnética almacenada por un inductor

Igual que un condensador almacena energía eléctrica, un inductor almacena energía magnética cuando es atravesado por una corriente variable. Esta

energía proviene del trabajo realizado por la fuente de fem para establecer una corriente a través del inductor. La *energía magnética* U_m almacenada por el inductor es

$$U_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.5)$$

Otra manera de interpretar este resultado es que, al establecer una corriente a través del inductor, éste crea un campo magnético, de manera que el trabajo realizado para establecer la corriente es también el trabajo necesario para crear ese campo magnético. La energía almacenada en el inductor es por tanto la *energía del campo magnético*.

Ejemplo 8.3.2 Calculemos la energía almacenada por el solenoide del ejemplo 8.1.1.

Sol. Si usamos la fórmula (8.5), necesitamos la autoinductancia que hemos calculado en el ejemplo 8.3.1 y el valor de $I = 0,1 \text{ A}$ del enunciado del ejemplo 8.1.1:

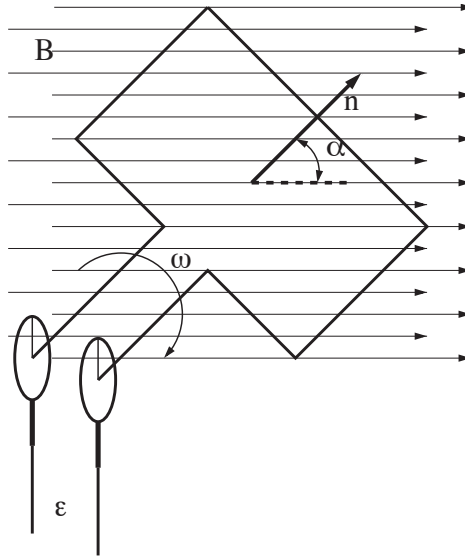
$$U_m = \frac{LI^2}{2} \approx \frac{1}{2} 1,26 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1^2 \approx 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

8.4. Generadores eléctricos de corriente alterna

Prácticamente toda la energía eléctrica que se utiliza en el mundo se produce en forma de *corriente alterna* (ac) a través de *generadores eléctricos*. Los generadores eléctricos producen energía eléctrica a partir de un trabajo mecánico. El funcionamiento de estos generadores se basa en la inducción electromagnética para producir una fem de tipo armónico (es decir, una *fem alterna*) cuando enormes bobinas rotan en presencia de campos magnéticos producidos por electroimanes.

Como vemos en la figura 8.5, un generador eléctrico simplificado es una espira de N vueltas y área S que rota con velocidad angular constante ω entre los polos de un electroimán. El electroimán produce un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. Los terminales de la espira están conectados a unos anillos metálicos deslizantes que giran al rotar la espira. Cada uno de estos anillos roza a una escobilla de grafito (se usa este material para evitar chispazos), de manera que la diferencia de potencial entre los terminales de la espira, que es la misma que hay entre los anillos deslizantes, es igual a la diferencia de potencial entre las escobillas de grafito. Las escobillas son los terminales del circuito externo al que el generador alimenta.

Figura 8.5: Esquema de un generador eléctrico de corriente alterna.



Consideremos una situación inicial en la que el vector normal a la espira forma un ángulo α_0 con el campo magnético uniforme del electroimán. Empezamos ahora a hacer un trabajo mecánico rotando la espira con velocidad angular ω constante. Esto significa que el ángulo α que forman la normal a la espira y el campo magnético del electroimán varía en el tiempo según la expresión

$$\alpha = \omega t + \alpha_0.$$

El flujo magnético Φ_m a través de la espira es

$$\Phi_m = NSB \cos \alpha = NSB \cos (\omega t + \alpha_0).$$

Según la ley de Faraday, se induce entonces una fem ε en la espira dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = NSB\omega \sin(\alpha_0 + \omega t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \alpha_0),$$

donde

$$\varepsilon_0 = NSB\omega \quad (8.6)$$

es una constante característica del generador, llamada amplitud o *valor de pico* de la fem sinusoidal. La unidad de fem de pico es 1 V. En consecuencia, un generador eléctrico transforma energía mecánica, la necesaria para rotar la espira, en energía eléctrica.

Como vemos, la fem ε es una función periódica armónica de amplitud ε_0 y frecuencia angular ω . La frecuencia f de la fem ε es $f = \omega/(2\pi)$, que es el número de veces que la fem alcanza su valor máximo en un segundo, contando a partir del momento en que tiene ese mismo valor. El inverso de la frecuencia $T = 2\pi/\omega = 1/f$ es el *periodo* de la fem, el tiempo que pasa desde que la fem tiene su valor máximo hasta que vuelve a tenerlo. En la práctica, es común dar las características de un generador de corriente alterna mediante su fem de pico ε_0 y su frecuencia f .

La fem proporcionada por un generador eléctrico cambia su polaridad a medida que rota la espira, lo cual es propio de los *circuitos de corriente alterna*. Así, si se conecta un circuito externo al generador, que se suele denominar *circuito de carga*, a través de él habrá una corriente alterna que cambiará su sentido con la misma frecuencia f con la que la fem cambia su polaridad (aunque no necesariamente en el mismo instante). En los circuitos, el símbolo de un generador que proporciona una fem de este tipo es el que vemos en la figura 8.6.

Algunas centrales eléctricas queman combustible fósil (carbón, gas o petróleo) para calentar agua y producir gas presurizado que hace girar enormes turbinas cuyos ejes están unidos al generador, mientras que otras usan cascadas de agua, energía nuclear u otros medios como fuente de trabajo mecánico.

Ejemplo 8.4.1 Volvamos a considerar el ejemplo 8.2.1 y calculemos el valor de pico, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de la fem.

Sol. En el ejemplo 8.2.1 analizamos un generador eléctrico de corriente alterna con una espira con una única vuelta $N = 1$, con el ángulo inicial $\alpha_0 = 0$ y la frecuencia angular

$$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}.$$

Así, el valor de pico de la fem es la amplitud de la fem sinusoidal (t):

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi}{40} \approx 0,0785 \text{ V}.$$

Figura 8.6: Símbolo de un generador de fem alterna.



Finalmente, la frecuencia f y el periodo T de la fem son:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{4\pi} = 0,25\text{s}^{-1},$$

$$T = \frac{1}{f} = 4\text{s}.$$

8.5. Transformadores

Un *transformador* es una máquina eléctrica que sirve para aumentar o disminuir un voltaje de corriente alterna. En su versión más simple, está formado por dos bobinas de cable conductor enrolladas sobre un único núcleo ferromagnético. La *bobina primaria* tiene N_p vueltas de cable y está conectada a una fuente de fem alterna V_{in} . La bobina secundaria tiene N_s vueltas.

Transformador sin carga

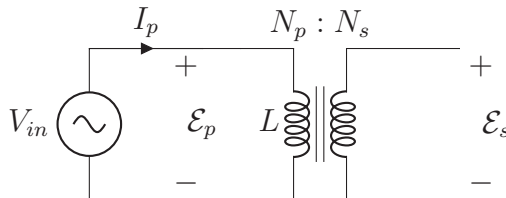
Supongamos, en primer lugar, que la bobina secundaria no está conectada a un circuito externo, es decir, estamos en la condición de circuito abierto en la salida, como vemos en la figura 8.7. La corriente alterna I_p en el circuito primario, proporcionada por su generador, atraviesa la bobina primaria y, debido a la presencia del núcleo ferromagnético, crea un campo magnético notable en ella. Este campo magnético produce un voltaje en la bobina primaria que obedece la ley de la inducción electromagnética, que escribiremos en la forma

$$\varepsilon_p = -N_p \frac{d\Phi_p}{dt},$$

siendo Φ_p el flujo magnético a través de una vuelta de la bobina primaria.

Por otro lado, dado que la bobina secundaria está también enrollada en el núcleo ferromagnético, parte (o todas) las líneas magnéticas que atraviesan la

Figura 8.7: Esquema de un transformador sin carga.



bobina primaria lo hacen con la secundaria. Debido a esto, en la bobina secundaria se induce una fem dada por

$$\varepsilon_s = -N_s \frac{d\Phi_s}{dt},$$

y, en el caso ideal en que las pérdidas de flujo son despreciables, se tiene que $\Phi_s = \Phi_p$, por lo que se llega a

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} = \frac{N_s}{N_p}, \quad (8.7)$$

lo que constituye la *ecuación del transformador*. Así, si $N_s > N_p$, el voltaje de pico de la bobina secundaria ε_s es mayor que el voltaje de pico de la bobina primaria ε_p , y se dice que tenemos un *transformador elevador*. En caso contrario es $N_p > N_s$ y tenemos un *transformador reductor*. La razón N_s/N_p se llama *cociente de vueltas* del transformador.

Está claro por qué *un transformador no opera en corriente continua*: la corriente en el circuito primario ha de variar con el tiempo para que haya flujo magnético en la bobina secundaria.

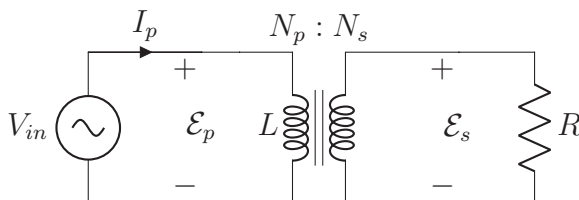
Transformador con carga

Supongamos ahora que conectamos un *circuito de carga* a la bobina secundaria, como vemos en la figura 8.8, de manera que circula una corriente alterna I_s a través de él.

Si se desprecian posibles pérdidas de potencia en el transformador (usualmente menores del 10 %), se ha de cumplir que la potencia es igual en el circuito primario que en el secundario,

$$I_p \varepsilon_p = I_s \varepsilon_s,$$

Figura 8.8: Esquema de un transformador con carga.



donde I_p e I_s son la intensidad de pico en el primario y la intensidad de pico en el secundario, respectivamente. Usando ahora la ecuación del transformador, tenemos

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}. \quad (8.8)$$

Por tanto, un transformador que eleva el voltaje de pico disminuye la corriente de pico y viceversa.

Los transformadores juegan un papel importante en la transmisión de potencia entre plantas de generación eléctrica y las comunidades a las que sirven. Cuando se transmite la corriente eléctrica, hay siempre pérdidas de potencia debido al calor Joule $P_R = I^2 R$ disipado en los cables, que presentan alta resistencia porque son muy largos. Las compañías eléctricas reducen estas pérdidas usando transformadores que aumentan el voltaje a valores muy altos, reduciendo mucho la corriente. Así, las centrales eléctricas producen voltajes del orden de 10^4 V. A la salida de las centrales se utilizan transformadores elevadores, que elevan los voltajes hasta órdenes de $2 \cdot 10^5$ V y conducen la corriente a larga distancia a través de cables de *alta tensión*. Luego, para reducir los voltajes a valores más seguros en el interior de las ciudades, se sitúan a la entrada de éstas *subestaciones de potencia*, con transformadores reductores que dejan los valores en unos $8 \cdot 10^3$ V. A su vez, cerca de cada área de población se instalan nuevos transformadores reductores, para obtener los valores de 200 V típicos del consumo diario.

Ejemplo 8.5.1 Consideremos un transformador construido con dos bobinas, la primaria con $N_p = 100$ vueltas y la secundaria con N_s vueltas. Calculemos el valor de N_s que duplique la fem en el secundario y el valor que la reduzca a la mitad. En sendos casos, veamos cómo se modifican las corrientes cuando el circuito secundario tiene carga.

Sol. Usando las ecuaciones

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{N_s}{N_p}, \quad \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s},$$

si $\mathcal{E}$ se duplica, entonces

$$\frac{N_s}{N_p} = 2 \Rightarrow N_s = 200,$$

y la intensidad en el secundario se reduce a la mitad

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{1}{2} \Rightarrow I_s = \frac{I_p}{2}.$$

Análogamente, si la tensión se reduce a la mitad, tenemos

$$N_2 = 50, \\ I_s = 2I_p.$$

8.6. Tabla resumen

Fórmula/ magnitud	Definición	Ecuación
$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k}$ μ_0 n I $\mathbf{k}$	Campo magnético de un solenoide Permeabilidad magnética del vacío Número de vueltas (espiras) por unidad de longitud Intensidad que circula por las espiras Vector unitario en la dirección del del solenoide y sentido que marca I	(8.1)
$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$	Ley de Lenz-Faraday	(8.2)
$\mathcal{E}_{ind}$	Fem inducida	(8.3)
$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ t $\mathbf{B}$ $\mathbf{S}$	Flujo magnético Tiempo Campo magnético Vector diferencial normal a la superficie S	
$V_L = L \frac{dI}{dt}$ V_L L I t	Ecuación característica del inductor Caída de tensión en el inductor o bobina Autoinductancia Intensidad que circula por el inductor Tiempo	(8.4)
$U_m = \frac{LI^2}{2}$	Energía magnética del inductor	(8.5)

Fórmula/ magnitud	Definición	Ecuación
$\varepsilon_0 = NSB\omega$	Valor de pico de una fem sinusoidal	(8.6)
N	Número de vueltas	
S	Área de la espira	
B	Módulo del campo magnético	
ω	Velocidad angular de rotación	
$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_p} = \frac{N_s}{N_p}$	Ecuación del transformador	(8.7)
ε_s	Tensión de pico en la bobina secundaria	
ε_p	Tensión de pico en la bobina primaria	
N_s	Número de vueltas en la bobina secundaria	
N_p	Número de vueltas en la bobina primaria	
$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$	Ecuación del transformador con carga	(8.8)
I_s	Intensidad de pico en la bobina secundaria	
I_p	Intensidad de pico en la bobina primaria	

8.7. Problemas resueltos

1. Con un solenoide de 15 cm de longitud y 500 vueltas de cable queremos generar un campo magnético en su interior de 10 mT. Calcula la corriente necesaria por el cable.

Sol. El campo magnético en el interior de un solenoide de $n = N/\ell$ vueltas por metro es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{\ell}.$$

Despejando, obtenemos la corriente

$$I = \frac{B \ell}{\mu_0 N} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,15}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500} \approx 2,39 \text{ A}.$$

2. En el interior de un solenoide de 50 cm de longitud y 500 vueltas de cable colocamos otro solenoide de igual longitud pero con 250 vueltas. Teniendo en cuenta que por ambos solenoides circula la misma intensidad de 2 A,

calcula el campo magnético en el interior del segundo solenoide y en el espacio entre los dos solenoides cuando las dos corrientes fluyen:

- a) En el mismo sentido.
- b) En sentidos opuestos.

Sol. Consideramos el solenoide 1 como el exterior y el 2 como el interior, de modo que $l_1 = l_2 = l = 0,5$ m, $N_1 = 500$, $N_2 = 250$. Tomaremos la aproximación de que el campo creado por un solenoide en su interior es uniforme y de módulo igual a $\mu_0 n l$, mientras que el campo creado por un solenoide en su exterior es cero.

- a) Como las corrientes van en el mismo sentido, el campo en el interior es la suma de los campos de ambos solenoides,

$$\begin{aligned} B_{int} &= \frac{\mu_0 N_1 l}{\ell_1} + \frac{\mu_0 N_2 l}{\ell_2} = \frac{\mu_0 l}{\ell} (N_1 + N_2) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{0,5} (500 + 250) \approx 3,77 \text{ mT}. \end{aligned}$$

Sin embargo, el campo en el hueco entre solenoides sólo tiene contribución del solenoide externo,

$$B_{hueco} = \frac{\mu_0 N_1 l}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2}{0,5} \approx 2,51 \text{ mT}.$$

- b) Las corrientes van en sentido opuesto ahora. Esto significa que los campos magnéticos producidos por los solenoides tienen sentido opuesto, así que el campo total es la resta de los producidos por cada solenoide. El campo en el interior es

$$\begin{aligned} B_{int} &= \frac{\mu_0 N_1 l}{\ell_1} - \frac{\mu_0 N_2 l}{\ell_2} = \frac{\mu_0 l}{\ell} (N_1 - N_2) \\ &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{0,5} (500 - 250) \approx 1,26 \text{ mT}. \end{aligned}$$

En el hueco entre los solenoides no cambia nada:

$$B_{hueco} = \frac{\mu_0 N_1 l}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 2}{0,5} \approx 2,51 \text{ mT}.$$

3. Una espira cuadrada de 10 cm de lado está en el seno de un campo magnético uniforme de 50 mT. Determina el flujo magnético a través de la espira

cuando el ángulo que forman el plano de la espira y el campo magnético valen: 0° , 60° y 90° .

Sol. El flujo magnético a través de la superficie S encerrada por la espira es

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de la espira y dS es un elemento infinitesimal de área en la espira. Si $\mathbf{B}$ y $\mathbf{n}$ son *vectores uniformes en la superficie S* (es decir, su módulo, dirección y sentido son los mismos en todos los puntos de S), podemos sacarlos fuera de la integral y el flujo magnético queda

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})NS = BNS \cos\theta.$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{n}$, y siendo N el *número de vueltas de cable* en la espira. En el ejercicio, nos dan el valor del ángulo α que forma el campo magnético con el plano de la espira. Este ángulo está relacionado con θ mediante

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Tomando $B = 50 \text{ mT}$, $N = 1$, $S = 10^2 = 100 \text{ cm}^2$, encontramos:

Para $\alpha = 0^\circ = 0 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos\theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= 0 \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Para $\alpha = 60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos\theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\approx 4,33 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

Para $\alpha = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad}$,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= BNS \cos\theta = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 100 \cdot 10^{-4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

4. Una espira circular, de radio 1 cm y 5 vueltas, se coloca en el interior de un solenoide de 10 cm de longitud, 500 vueltas de cable y 1 A de corriente. Teniendo en cuenta que el ángulo θ que forman el eje de la espira y el eje del solenoide es $\theta = 5t$, siendo t el tiempo medido en segundos, calcula el flujo magnético a través de la espira como función del tiempo.

Sol. El campo magnético creado por el solenoide es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N_s I}{\ell_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 1}{0,1} = 2\pi \text{ mT}.$$

El flujo de este campo magnético a través de la espira es

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) N_e S = B N_e S \cos\theta = 2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot \pi (0,01)^2 \cdot \cos(5t) \\ &= 2\pi \cdot 10^{-6} \cos(5t) \text{ Wb}.\end{aligned}$$

Por ejemplo, para $t = 0,5$ s tenemos

$$\Phi_m = 2\pi \cdot 10^{-6} \cos(5 \cdot 0,5) \simeq -5,03 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}.$$

5. Generamos un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$, cuyo módulo B varía en el tiempo. Entre los tiempos $t = 0$ s y $t = 1$ s la variación es lineal, de modo que $B(t = 0 \text{ s}) = 40 \text{ mT}$ y $B(t = 1 \text{ s}) = 20 \text{ mT}$. En este campo, está inmersa una espira cuadrada de 10 cm de lado, con 10 vueltas, cuyo eje permanece paralelo al campo $\mathbf{B}$.

- a) Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira durante el primer segundo.
- b) Teniendo en cuenta que la espira está hecha con un cable conductor con una resistencia de 1Ω , calcula la corriente inducida en la espira junto con su sentido de giro.

Sol. El flujo magnético en la dirección del eje Z a través de la superficie encerrada por la espira es una función del módulo B del campo magnético:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = B \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 0 = 0,1B.$$

Como la variación del campo es lineal con el tiempo, su derivada temporal coincide con su tasa media de variación en el tiempo. Así, el flujo magnético en el intervalo $0 \text{ s} < t < 1 \text{ s}$ es

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_m}{dt} &= \frac{\Phi(t=1s) - \Phi(t=1s)}{\Delta t} \\ &= \frac{(0,1 \cdot 20 \cdot 10^{-3}) - (0,1 \cdot 40 \cdot 10^{-3})}{1} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/s.}\end{aligned}$$

Con esto, resolvemos las preguntas que nos hace el ejercicio.

a) La fem inducida en la espira, según la ley de Faraday, es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -(-0,002) = 2\text{mV.}$$

b) La corriente inducida en la espira, por la ley de Ohm, es

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{0,002}{1} = 2\text{mA.}$$

Aplicamos la ley de Lenz para conocer el sentido de recorrido de esta corriente. Los pasos son:

- Como hemos visto, la tasa de variación del flujo magnético a través de la espira en la dirección del eje z es negativa. Esto indica que el flujo magnético a lo largo del eje z decrece en el tiempo.
- Por tanto, el flujo magnético a lo largo del eje $-z$ crece en el tiempo.
- Según la ley de Lenz, el campo magnético creado por la corriente inducida en la espira ha de oponerse a la variación de flujo magnético. En este caso, ha de ir a lo largo del eje z .
- Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira será antihoraria.

6. Una espira, con un área de $0,1 \text{ m}^2$ y 10 vueltas, está inmersa en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B} = -0,2\mathbf{k} \text{ T}$. La espira, inicialmente paralela al eje XY , comienza a rotar con velocidad angular constante de manera que, al cabo de $0,2 \text{ s}$, el eje de la espira forma un ángulo de 60° con el campo. Calcula:

- a) La fuerza electromotriz media inducida en la espira.
- b) La corriente inducida en la espira y su sentido, si ésta tiene una resistencia de $1,5\Omega$.

Sol. El flujo magnético en la dirección y sentido del eje $-Z$ a través de la superficie encerrada por la espira es una función del ángulo θ entre el campo magnético y el vector normal a la espira:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = 0,2 \cdot 10 \cdot 0,1 \cdot \cos\theta = 0,2 \cdot \cos\theta \text{ Wb.}$$

La tasa media de variación en el tiempo de este flujo magnético en el intervalo $0 \text{ s} < t < 0,2 \text{ s}$ es

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{\Phi_m(0,2) - \Phi_m(0)}{\Delta t} = \frac{(0,2 \cdot \cos 60^\circ) - (0,2 \cdot \cos 0)}{0,2} = -0,5 \text{ Wb/s.}$$

Vamos con las preguntas.

a) La fem inducida en la espira es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -(-0,5) = 0,5 \text{ V.}$$

b) La corriente inducida en la espira es

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}_{ind}|}{R} = \frac{0,5}{1,5} \approx 0,33 \text{ A.}$$

Aplicamos la ley de Lenz:

- La tasa de variación del flujo magnético a través de la espira en la dirección y sentido del eje $-Z$ es negativa. Esto indica que el flujo magnético a lo largo del eje $-Z$ decrece en el tiempo.
 - Por tanto, el flujo magnético a lo largo del eje Z crece en el tiempo.
 - Según la ley de Lenz, el campo magnético creado por la corriente inducida en la espira ha de oponerse a la variación de flujo magnético. En este caso, ha de ir a lo largo del eje $-Z$.
 - Usando la regla del tornillo, la corriente inducida en la espira será horaria.
7. En el interior de una bobina de 1 m de longitud, de 250 vueltas y por la que circula una corriente de 2 A se coloca un equipo eléctrico con una superficie perpendicular al eje de la bobina de 25 cm^2 . Teniendo en cuenta que la fuerza electromotriz inducida sobre el equipo puede ser de 0,5 V como máximo, calcula

- a) La fuerza electromotriz inducida en el equipo si la corriente se anula a un ritmo constante en 2 ms.
- b) Cuánto tiempo como mínimo debe tardar la corriente del solenoide en anularse de forma uniforme, en caso de avería, sin dañar al equipo.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo, a través de la superficie del equipo electrónico es una función de la corriente en la bobina:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = (\mu_0 n I) S \cos 0 \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 250 \cdot 25 \cdot 10^{-4} I \simeq 1,57 \cdot 10^{-6} I.\end{aligned}$$

donde debemos escribir I en A y Φ_m resultará en Wb. La fem inducida en el equipo mientras la corriente I se va a cero en un intervalo de tiempo Δt es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ind} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \simeq -1,57 \cdot 10^{-6} \frac{I_f - I_i}{\Delta t} \\ &= 1,57 \cdot 10^{-6} \frac{2}{\Delta t} \simeq \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{\Delta t}.\end{aligned}$$

Ahora Δt debe ir en segundos para tener ε_{ind} en V.

- a) Si la corriente se anula en $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s, la sobretensión será

$$\varepsilon_{ind} = \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{\Delta t} = \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \simeq -1,57 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

- b) Si la sobretensión máxima que puede soportar el equipo es 0,5 V, el tiempo Δt en que la corriente se va a cero ha de cumplir

$$\frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{\Delta t} < 0,5 \quad \Rightarrow \quad \Delta t > \frac{3,14 \cdot 10^{-6}}{0,5} \simeq 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

8. Se construye una espira rectangular con dos trozos de cable. El primero tiene forma de $\sqcup$, con base de longitud igual a 1m, y el segundo es horizontal y móvil (hacia arriba). La espira tiene una superficie inicial de 0,5 m² y el lado móvil aumenta su altura a una velocidad constante igual a 2 cm/s. Teniendo en cuenta que la espira se mantiene inmerso en un campo magnético uniforme y constante de módulo $B = 1$ T que se mantiene perpendicular a ella, calcula la fuerza electromotriz inducida como función del tiempo.

Sol. El flujo magnético en la dirección del campo magnético a través de la superficie encerrada por la espira es una función de la altura y del lado móvil:

$$\Phi_m = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot y \cos 0 = y,$$

donde y se debe medir en m, Φ_m se mide en Wb e y varía en el tiempo según

$$y = y_0 + vt.$$

Tenemos el dato $v = 2 \text{ cm/s}$. Para calcular y_0 , usamos la superficie inicial

$$S_0 = 1 \cdot \pi y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{S_0}{1} = 0,5 \text{ m}.$$

Con esto,

$$y = y_0 + vt = 0,5 + 2t.$$

La fem inducida en el anillo es

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(0,5 + 2t)}{dt} = -2 \text{ V},$$

que resulta ser independiente del tiempo.

9. Un solenoide de 1000 vueltas por metro tiene una sección transversal de 5 cm^2 . Alrededor de éste se enrolla una bobina de 500 vueltas. Teniendo en cuenta que inicialmente la corriente por el solenoide es de $0,1 \text{ A}$ y que ésta cambia durante 1 s , calcula la fuerza electromotriz promedio inducida en la bobina cuando al final la corriente:

- a) Es cero.
- b) Es el doble.
- c) Cambia de signo.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo magnético del solenoide, a través de la superficie encerrada por la bobina es una función de la corriente del solenoide dada por:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = (\mu_0 n_s I) N_b S \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot I = \pi \cdot 10^{-4} \cdot I,\end{aligned}$$

donde, al medir I en A, obtenemos Φ_m en Wb. La fem promedio inducida en la bobina en un intervalo de tiempo $\Delta t = 1 \text{ s}$ será

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi \cdot 10^{-4} \frac{I_f - 0,1}{1} \approx -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1).$$

a) Si $I_f = 0$ A,

$$\varepsilon_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = -3,14 \cdot 10^{-5} \text{ V.}$$

b) Si $I_f = 0,2$ A,

$$\varepsilon_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = -3,14 \cdot 10^{-5} \text{ V.}$$

c) Si $I_f = -0,1$ A,

$$\varepsilon_{ind} \simeq -3,14 \cdot 10^{-4} \cdot (I_f - 0,1) = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ V.}$$

10. La corriente alterna $I = 2$ A sin $(50\pi t)$ circula por un solenoide de 500 espiras por metro. Calcula la fuerza electromotriz inducida en una bobina, de 100 espiras y 10 cm^2 de sección, cuyo eje es el mismo que el del solenoide.

Sol. El flujo magnético, en la dirección del campo magnético del solenoide, a través de la superficie encerrada por la bobina es una función de la corriente del solenoide:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = (\mu_0 n_s I) N_b S \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 500 \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot I \simeq 6,28 \cdot 10^{-5} I.\end{aligned}$$

La fem inducida en la bobina es

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ind} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \simeq -6,28 \cdot 10^{-5} \frac{d}{dt} [2 \cdot \sin(100\pi t)] \\ &= -6,28 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 50\pi \cdot \cos(100\pi t) \\ &\simeq -1,97 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cos(100\pi t).\end{aligned}$$

11. Un corriente de 50 mA circula por un solenoide de sección circular, de 20 cm de longitud y 1 cm de radio, formado por 200 espiras. Calcula:

a) El flujo magnético a través de la bobina.

b) La autoinductancia de la bobina.

c) La fuerza electromotriz autoinducida en la bobina si la corriente se anula a un ritmo constante en 10^{-3} s.

Sol. El campo magnético en el interior del solenoide es

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{\ell} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{0,2} \simeq 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

a) El flujo magnético a través del solenoide es

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta \\ &\simeq 6,28 \cdot 10^{-5} \cdot 200 \cdot \pi (10^{-2})^2 \simeq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Wb.}\end{aligned}$$

b) La autoinductancia es

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \simeq \frac{1,26 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 2,51 \cdot 10^{-5} \text{ H.}$$

c) La fem inducida cuando la corriente se va a cero en 10^{-3} s es

$$\varepsilon_{ind} = -L \frac{dI}{dt} \simeq -2,51 \cdot 10^{-5} \frac{0 - 0,05}{0,001} \simeq 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ V.}$$

12. Un generador de corriente alterna está construido con una bobina cuadrada de 50 vueltas y 0,1 m de lado. Teniendo en cuenta que el campo magnético en el que está inmersa la bobina vale 0,5 T y que ésta gira con una velocidad angular constante igual a 100 rad/s, calcula la fuerza electromotriz de pico, la frecuencia y el periodo del generador.

Sol. El flujo magnético a través de la bobina del generador es

$$\begin{aligned}\Phi_m &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) NS = BNS \cos\theta = 0,5 \cdot 50 \cdot (0,1)^2 \cos(100t) \\ &= 0,25 \text{ Wb} \cos(100t),\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que inicialmente el eje de la bobina está alineado con el campo. Por tanto, la fem inducida es

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0,25 \cdot 100 \sin(100t) = 25 \text{ V} \sin(100t).$$

De aquí, la fem de pico es

$$\varepsilon_0 = 25 \text{ V.}$$

La frecuencia es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \simeq 15,9 \text{ Hz,}$$

y el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} \simeq 0,0628 \text{ s.}$$

13. Un transformador está formado por dos bobinas, la primera con 200 vueltas y la secundaria con 50 vueltas. Teniendo en cuenta que el voltaje y la corriente en el primario valen 200 V y 0,5 A, respectivamente, calcula el voltaje y la corriente en la bobina secundaria, así como la potencia que suministra.

Sol. Por la ecuación del transformador,

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow V_s = \frac{V_p N_s}{N_p} = \frac{200 \cdot 50}{200} = 50 \text{ V.}$$

Para las corrientes, la ecuación es

$$\frac{I_p}{I_s} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow I_s = \frac{I_p N_p}{N_s} = \frac{0,5 \cdot 200}{50} = 2 \text{ A.}$$

La potencia, suponiendo que el transformador es ideal, es la misma en la bobina primaria que en la secundaria. Por tanto,

$$P = I_p V_p = 0,5 \cdot 200 = 100 \text{ W.}$$