

1 CAMPO ELÉCTRICO

1.1 Ecuaciones relevantes

■ Ley de Coulomb.

Supongamos que tenemos dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia d . La Ley de Coulomb nos dice que la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_2 viene dada por:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

donde

- $\vec{r}_{12}$ es el vector que une la carga q_1 con la carga q_2 . De este modo $d = |\vec{r}_{12}|$ es el módulo del vector que une ambas cargas.
- $\vec{u}_{12}$ es el vector unitario de q_1 a q_2 , es decir, $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$
- La constante K se conoce como constante de Coulomb y su valor es: $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$. Esta constante está relacionada con la permitividad eléctrica del medio en el que se encuentra inmerso nuestro sistema ϵ . Para el caso del vacío $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

■ Campo Eléctrico.

Se define el campo eléctrico en un punto del espacio como la fuerza neta ejercida sobre una carga testigo positiva q_0 dividida por el valor de dicha carga q_0 .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} \quad (1.2)$$

La unidad de campo eléctrico es el $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$ o el $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

■ Campo eléctrico generado por una carga puntual q .

$$\vec{E} = K \frac{q}{|\vec{d}|^3} \vec{d} = K \frac{q}{d^2} \vec{u} \quad (1.3)$$

En este caso

- $\vec{d}$ es el vector que une la carga con el punto donde queremos obtener el campo eléctrico.
- $\vec{u}$ es el vector unitario de $\vec{d}$.

■ Campo generado por un sistema de cargas puntuales.

Aplicando el Principio de Superposición, obtenemos que el campo generado por un sistema de cargas puntuales es el resultado de la suma vectorial de los campos eléctricos generados por cada una de las cargas.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i K \frac{q_i}{d_i^2} \vec{u}_i \quad (1.4)$$

■ Campo generado por una distribución continua de carga.

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \int_V K \frac{dq}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \int_V K \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (1.5)$$

- dq es el diferencial de carga y vendrá dado por $dq = \rho dv$, siendo ρ la densidad de carga y dv el diferencial de volumen.
- $\vec{r}$ es el vector que une el diferencial de carga dq con el punto donde queremos obtener el campo eléctrico.
- $\vec{u}$ es el vector unitario de $\vec{r}$.

■ Ley de Gauss.

El flujo eléctrico ϕ_e es una magnitud matemática relacionada con el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie orientada, $\vec{A}$. Para una superficie plana y un campo uniforme el flujo eléctrico viene definido por:

$$\phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n}A = E_n A \quad (1.6)$$

donde E_n es la componente del campo eléctrico paralela al vector unitario normal a la superficie, $\vec{n}$.

Para el caso de una superficie cerrada, se considerará el convenio de tomar el vector normal a la superficie, $\vec{n}$, dirigido hacia el exterior de la superficie en cada punto de esta. De este modo el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada vendrá dado por:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}dA = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA \quad (1.7)$$

Aplicando la ecuación (1.7) llegamos a la conocida Ley de Gauss:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}dA = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1.8)$$

Una de las principales utilidades de la Ley de Gauss es que nos va a permitir simplificar el cálculo de los campos eléctricos generados por algunas distribuciones continuas de carga con simetrías notables:

Campo eléctrico generado por un plano infinito no conductor con densidad de carga σ .

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u} \quad (1.9)$$

Campo eléctrico generado por un hilo infinito con densidad de carga λ .

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \vec{u} \quad (1.10)$$

Veremos otros ejemplos de distribuciones en los ejercicios.

■ Campo eléctrico en conductores.

En este capítulo únicamente se van a considerar conductores en equilibrio electrostático, es decir, conductores en los cuales las cargas permanecen en "reposo". Esto nos va permitir considerar las siguientes afirmaciones:

- El campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo ($\vec{E}_{int} = 0$).
- La carga eléctrica neta sobre un conductor reside en la superficie de dicho conductor.

1.2 Ejercicios

1. Tenemos dos cargas $q_1 = 3 \mu\text{C}$ y $q_2 = 4 \mu\text{C}$ situadas respectivamente en los puntos $(-1, 0)$ m y $(3, 0)$ m.

- ¿En qué punto o puntos (si procede) se anula el campo eléctrico?
- Calcular el campo en el punto $(0, 1)$ m.

Solución

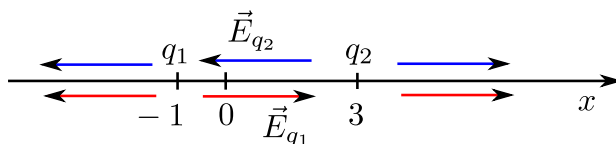
a) Lo primero de lo que debemos darnos cuenta es que el campo eléctrico solo puede anularse en el eje x . Si el lector situase una carga positiva fuera del eje x y dibujase las fuerzas que actúan sobre ella, comprobaría a simple vista que es imposible que las fuerzas se anulen. En este caso, la partícula experimentaría una fuerza que la empujaría hacia el infinito. Sin embargo, vamos a comprobar la existencia de un punto del eje x donde estas fuerzas se anulan.

Supongamos que el punto que estamos buscando tiene por coordenadas $(x, 0)$, para calcular el campo eléctrico en un punto del eje x sumamos los campos generados por las dos cargas teniendo cuidado con su

orientación.

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) &= \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} = \frac{Kq_1}{(x - (-1))^2} \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} \vec{u}_2 = \\ &= \frac{Kq_1}{(x + 1)^2} \frac{(x + 1)\vec{i}}{|x + 1|} + \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} \frac{(x - 3)\vec{i}}{|x - 3|} = \vec{0}\end{aligned}$$

Una simple observación de las líneas de campo a lo largo del eje x nos permite observar que el campo eléctrico únicamente se puede anular entre los puntos de coordenadas $(-1, 0)$ m y $(3, 0)$ m. A la izquierda de $(-1, 0)$ y a la derecha de $(3, 0)$, los campos eléctricos generados por ambas cargas llevan el mismo sentido y, por lo tanto, no se pueden anular.



En este caso tenemos $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = -(x - 3)$.

Simplificando la ecuación anterior llegamos a

$$\frac{Kq_1}{(x + 1)^2} - \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} = 0$$

Lo que nos lleva a una ecuación de segundo orden:

$$\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right)x^2 + \left(2 + 6\frac{q_1}{q_2}\right)x + 1 - 9\frac{q_1}{q_2} = 0$$

cuyos coeficientes son:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{23}{4} = 0$$

La única solución admisible de este polinomio es $x = 0,856$ m.

Otra forma de resolver este problema sería empezando por el dibujo de las líneas de campo que hemos presentado anteriormente. El análisis de esta figura, nos ha permitido deducir que la única región en la que se puede anular el campo eléctrico es entre ambas cargas, puesto que las líneas de campo llevan sentido opuesto. Partiendo de esto, podemos obtener el punto que estamos buscando simplemente exigiendo que los módulos de ambos campos sean iguales. Por lo tanto:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \rightarrow \frac{K|q_1|}{(x)^2} = \frac{K|q_2|}{(4 - x)^2}$$

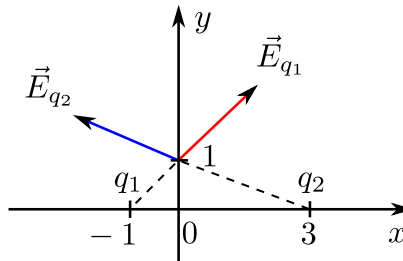
En este caso hemos definido x como la distancia desde la carga q_1 hasta el punto que estamos buscando. La distancia entre el punto y la carga q_2 será $(4 - x)$ siendo 4 la distancia total entre ambas cargas.

El desarrollo de esta ecuación nos vuelve a llevar a un polinomio de orden dos, $x^2 + 24x - 48 = 0$, cuya única solución válida es $x = 1,856\text{m}$.

Como en este caso x representaba la distancia a la carga q_1 volvemos a obtener que la solución que estábamos buscando es el punto de coordenadas $(0,856, 0)$ m.

b) Para calcular el campo eléctrico en el punto $(0, 1)$ m deberemos calcular el campo eléctrico generado por cada carga y aplicar el principio de superposición.

Las distancias entre las cargas y el punto donde queremos calcular el campo total se obtienen mediante el teorema de Pitágoras.



El campo generado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{Kq_1}{(\sqrt{2})^2} \vec{u}_1 = \frac{Kq_1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = 9545,9(\vec{i} + \vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

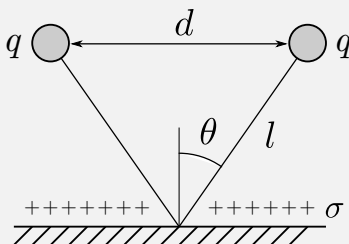
El campo generado por la carga q_2 es:

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{Kq_2}{(\sqrt{10})^2} \vec{u}_2 = \frac{Kq_2}{10} \left(\frac{-3}{\sqrt{10}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{j} \right) = 1138,4(-3\vec{i} + \vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Una vez que tenemos los campos $\vec{E}_{q_1}$ y $\vec{E}_{q_2}$, el campo total lo obtenemos sumando sus respectivas componentes:

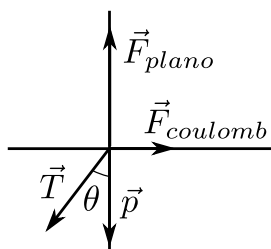
$$\vec{E}_T = 6130,6\vec{i} + 10684,3\vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

2. Dos esferas de masa $m = 1 \cdot 10^{-6}$ kg y carga $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C están atadas a un punto común mediante un hilo de masa despreciable y longitud l . Ambas cargas se encuentran en suspensión por encima de un plano cargado con densidad uniforme $\sigma = 5 \cdot 10^{-6}$ C·m⁻². Si en la situación de equilibrio, los hilos forman un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la vertical, calcule la longitud del hilo y la tensión que este ejerce.



Solución

Las fuerzas que intervienen en este problema son, el peso de cada esfera, la fuerza eléctrica que actúa sobre cada esfera debido al campo que genera el plano, las fuerzas que se ejercen mutuamente las dos esferas y la tensión del hilo que mantiene a las esferas en contacto con el plano. En el siguiente esquema se ha representado las fuerzas que actuarían sobre la carga de la derecha de la figura del problema.



Puesto que el sistema está en equilibrio debe cumplirse $\sum_i \vec{F}_i = 0$. Si descomponemos cada una de las fuerzas que actúan sobre la esfera de la derecha, obtendremos una ecuación para cada uno de los ejes (horizontal y vertical):

$$qE_{plano} - mg - T \cos \theta = 0 \rightarrow T \cos \theta = qE_{plano} - mg$$

$$-K \frac{q^2}{d^2} + T \sin \theta = 0 \rightarrow T \sin \theta = K \frac{q^2}{d^2}$$

Teniendo en cuenta que el parámetro d es la distancia entre ambas cargas, obtenemos $d = 2l \sin \theta$, de modo que la ecuación anterior nos queda:

$$T \sin \theta = K \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \theta} \rightarrow T \sin^3 \theta = K \frac{q^2}{4l^2}$$

Usando la primera ecuación calculamos el valor de la tensión:

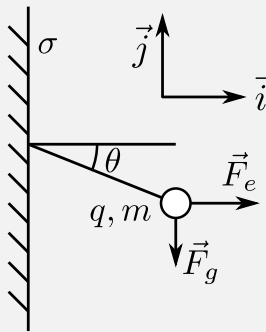
$$T = \frac{qE_{\text{plano}} - mg}{\cos \theta} = \frac{q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - mg}{\cos \theta} = 0,33 \text{ N}$$

Despejamos la longitud l de la segunda ecuación:

$$l = \sqrt{\frac{4T \sin^3 \theta}{Kq^2}} = 4,24 \text{ m}$$

3. Disponemos de un plano infinito vertical cargado con una densidad de carga σ positiva y uniforme. Una pequeña esfera de masa m con carga positiva q se encuentra atada mediante una cuerda al plano. Una vez alcanzada la situación de equilibrio, y considerando que en dicho instante la cuerda está tensa, calcule la relación entre carga y masa para que el ángulo formado entre la cuerda y la normal al plano sea $\theta = 45^\circ$.

Datos: $\sigma = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$, $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



Solución

Para obtener un ángulo θ de 45° entre la horizontal y la cuerda necesitamos hallar una relación entre las componentes de la tensión $\vec{T}$.

Usando la condición de equilibrio entre las fuerzas, la tensión $\vec{T}$ se expresa como:

$$\vec{T} + \vec{F}_g + \vec{F}_e = 0$$

Las fuerzas conocidas son: $\vec{F}_g = -mg\vec{j}$ y $\vec{F}_e = q\vec{E} = q\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i}$.

Si ahora descomponemos la tensión $\vec{T}$ según los ejes vertical y horizontal y aplicamos la ecuación del equilibrio según estos dos ejes obtendremos:

$$-T \sin \theta + F_g = 0$$

$$-T \cos \theta + F_e = 0$$

Despejamos:

$$T \sin \theta = F_g$$

$$T \cos \theta = F_e$$

Dividiendo una ecuación por la otra desaparece la tensión T :

$$\tan \theta = \frac{F_g}{F_e} = \frac{2mg\epsilon_0}{q\sigma}$$

Podemos despejar la relación carga masa para formar un ángulo de 45° :

$$\frac{q}{m} = \frac{2g\epsilon_0}{\sigma \tan \theta} = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}$$

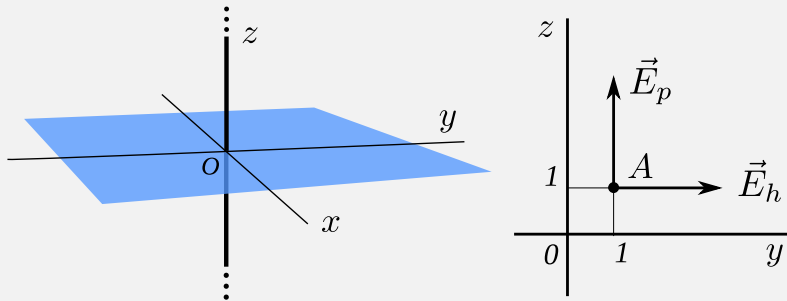
4. Una esfera de superficie S situada en el vacío contiene tres cargas eléctricas $q_1 = 1 \mu\text{C}$, $q_2 = -3 \mu\text{C}$, $q_3 = 4 \mu\text{C}$. ¿Cuánto vale el flujo eléctrico a través de dicha superficie?

Solución

La solución consiste en aplicar directamente la definición de la ley de Gauss a la superficie S : El flujo del campo eléctrico es simplemente la suma de las cargas contenidas en la esfera dividido por la constante ϵ_0 :

$$\phi_e = \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{\epsilon_0} = 225988,7 \text{ V}\cdot\text{m}$$

5. Un plano indefinido con densidad de carga $\sigma > 0$ se encuentra en el plano xy , mientras que un hilo cargado con densidad $\lambda > 0$ se sitúa sobre el eje z tal y como se muestra en la figura. Obtenga el campo eléctrico en el punto $A(0, 1, 1)$ m.



Solución

Para solucionar el problema aplicaremos el principio de superposición. Por un lado calcularemos mediante la ecuación (1.9) el campo generado por el plano xy , $\vec{E}_p$, y por otro lado, el campo generado por el hilo, $\vec{E}_h$, mediante la ecuación (1.10).

El campo generado por el plano en el punto A es:

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

El campo generado por el hilo conductor a una distancia de 1 m del hilo es:

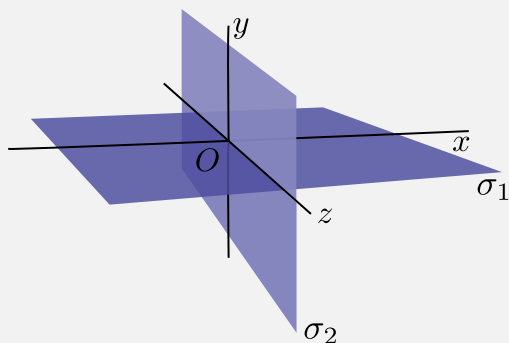
$$\vec{E}_h = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot 1} \vec{j} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

y su dirección es perpendicular al campo generado por el plano.

El campo total es la suma de estos dos campos:

$$\vec{E} = \vec{E}_h + \vec{E}_p = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \cdot 1} \vec{j} \right) \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

6. Tenemos dos planos indefinidos situados en un sistema de coordenadas (O, x, y, z) . Uno de ellos se sitúa en el plano xz y tiene una densidad superficial de carga $\sigma_0 = -0,25 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, mientras que el otro se sitúa en el plano yz y tiene una densidad superficial de carga $\sigma_2 = -0,5 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$.



Calcular la expresión del campo eléctrico en el plano xy .

Solución

Para obtener el campo en cualquier punto del plano xy debemos descomponer el problema en cuatro zonas y hallar el campo generado por cada plano cargado en cada una de las zonas. La suma de ambas componentes nos proporcionará el campo eléctrico buscado: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

- $x > 0, y > 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{j} \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = -\frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} - \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x < 0, y > 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{j} \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (-\vec{i}) \rightarrow \vec{E}_T = -\frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} + \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x < 0, y < 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} (-\vec{j}) \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (-\vec{i}) \rightarrow \vec{E}_T = \frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} + \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x > 0, y < 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} (-\vec{j}) \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = \frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} - \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

7. Un hilo infinito cargado con una densidad $\lambda = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se encuentra situado a lo largo del eje x . Si una carga $q = -1 \mu\text{C}$ está situada en el punto $(0, 1, 2)$ m:

- Calcular el campo eléctrico generado por el cable en dicho punto.
- Calcular la fuerza eléctrica que actúa sobre q .

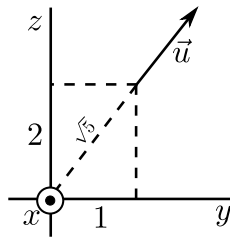
Solución

a) El campo eléctrico generado por un hilo cargado a una distancia d del propio hilo viene dado por la ecuación (1.10):

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ el vector unitario perpendicular al hilo que apunta hacia el punto donde queremos calcular el campo.

El punto $(0, 1, 2)$ m se encuentra a una distancia $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ m del hilo, y por lo tanto el vector unitario que indica la dirección del campo es $\vec{u} = (\vec{j} + 2\vec{k})/\sqrt{5}$.



Con estos datos, el campo se expresa como:

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{5}} \frac{(\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{5}} = 7193,44(\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) La fuerza eléctrica sobre la carga q es simplemente el producto del campo por la carga:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(d) = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{5}} \frac{(\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{5}} = -7,19 \cdot 10^{-3}(\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ N}$$

8. Se sitúa un electrón ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) a una cierta distancia por debajo de una lámina horizontal cargada con una densidad superficial uniforme σ . Se observa que el electrón queda estacionariamente suspendido por debajo de la placa. Teniendo en cuenta que el electrón también está sometido a la acción de la gravedad,

- Calcule el valor de la densidad de carga σ .
- Si se repite el experimento con una carga positiva de valor $q = 1 \mu\text{C}$ y masa $m = 1 \cdot 10^{-16}$ kg. ¿Cuánto vale la aceleración de la partícula en este caso?

Datos: $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

Solución

a) El enunciado nos dice que el electrón queda suspendido en equilibrio por debajo de la placa. En este instante las fuerzas que actúan sobre el electrón son el peso y la fuerza eléctrica debida a la lámina, que deberán tener sentido opuesto para que el electrón esté en equilibrio. Esto nos indica que la lámina debe tener carga positiva.

Para calcular su valor, simplemente debemos aplicar la segunda ley de Newton. En este caso, al conocer el sentido de ambas fuerzas, únicamente debemos exigir que ambos módulos sean iguales, es decir, utilizaremos el valor absoluto de la carga del electrón. El balance de fuerzas

$$\sum \vec{F} = 0 = \vec{p} + \vec{F}_e$$

nos lleva a

$$m_e g = |e| E = |e| \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

y despejamos σ

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 m_e g}{|e|} = 9,87 \cdot 10^{-22} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$$

b) Ahora las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa $m = 1 \cdot 10^{-16}$ kg y carga $1 \mu\text{C}$ llevan el mismo sentido y por lo tanto la aplicación directa de la 2ª Ley de Newton nos dará el resultado que buscamos

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{p} + \vec{F}_e = m\vec{g} + q\vec{E} = mg(-\vec{j}) + q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{j})$$

$$\vec{a} = \left(g + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 m} \right) (-\vec{j}) = -10,35\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

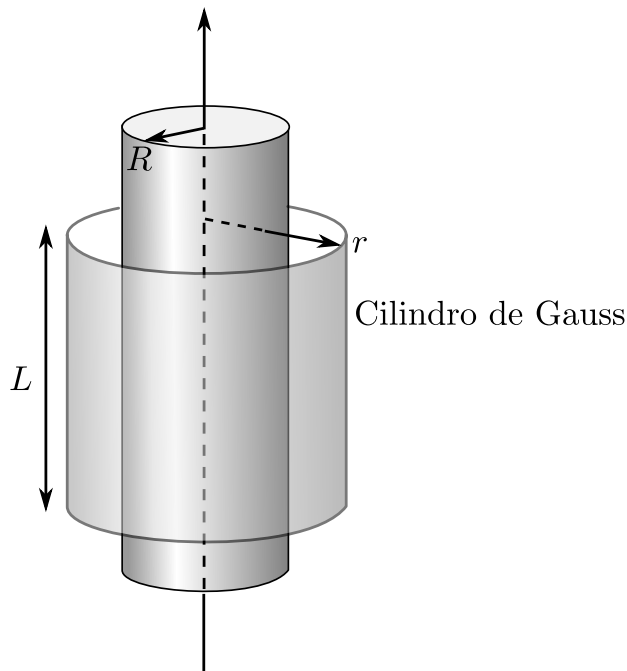
9. Dado un cilindro macizo, infinito y conductor de radio R y con densidad de carga $+\sigma$ distribuida uniformemente en la superficie. Calcule el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

Solución

El campo alrededor del cilindro macizo depende de la distancia al eje r y tiene simetría cilíndrica. Debemos diferenciar dos regiones: la externa al cilindro cargado $r > R$ y la zona interior al cilindro.

- Para $r > R$ podemos hallar el campo eléctrico aplicando el teorema de Gauss. Para ello tomaremos como superficie Gaussiana un cilindro de radio r y altura L que comparta el eje con el cilindro cargado, tal y como se muestra en la figura:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$E(r)2\pi rL = \frac{\sigma 2\pi RL}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- Para $r < R$ tenemos un campo nulo, $\vec{E}(r) = 0$ dado que nos encontramos dentro del cilindro conductor en equilibrio electrostático y por lo tanto toda la carga se encuentra sobre la superficie.

10. Un plano infinito se extiende sobre el plano xy y se deposita sobre este una densidad de carga $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Se sitúa otro plano cargado paralelo al primero y 2 m por encima de este. El segundo plano tiene una densidad de carga $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Calcule el campo eléctrico en los puntos A(0,0,-1), B(0,0,0.5) y C(0,0,3). Las coordenadas están en metros.

Solución

Tenemos dos planos paralelos con cargas diferentes. Para poder calcular el campo en los puntos A, B y C tenemos que descomponer el espacio en tres zonas: para $z < 0$, $0 < z < 2$ y $2 < z$.

En cada una de estas zonas tenemos que aplicar el principio de superposición sabiendo que cada plano genera el siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

El campo generado por el plano situado en $z = 2$ m es:

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 2 \\ -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 2 \end{cases}$$

Podemos ahora expresar el campo en los tres puntos sin dificultad teniendo cuidado en conservar los signos de las densidades de carga σ_1 y σ_2 a la hora del cálculo numérico:

- para $z < 0$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = -169491,5 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

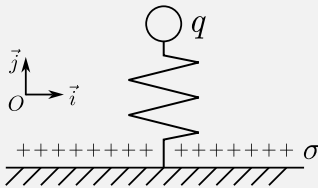
- para $0 < z < 2$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = 395480,2 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- para $z > 2$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = 169491,5 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

11. Consideramos un plano infinito cargado con una densidad de carga superficial $\sigma > 0$. Por encima del plano colocamos un objeto cargado con carga q positiva y masa m . El objeto está unido al plano mediante un muelle de constante elástica k . Calcular la elongación del muelle en función de las constantes del problema. Considere el efecto de la gravedad en este problema.



Solución

El plano produce un campo eléctrico perpendicular a él mismo, en este caso como la partícula está situada por encima del plano, el campo eléctrico en el punto donde está situada la partícula llevará sentido $\vec{j}$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{j}$$

Una vez en equilibrio, la carga está sometida a la fuerza generada por el campo eléctrico, $\vec{F}_e$, a la fuerza de la gravedad, $\vec{F}_g$, y a la fuerza recuperadora del muelle, $\vec{F}_m$, de tal modo que la fuerza neta es nula:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{F}_g = 0 \rightarrow qE - k\Delta x - mg = 0$$

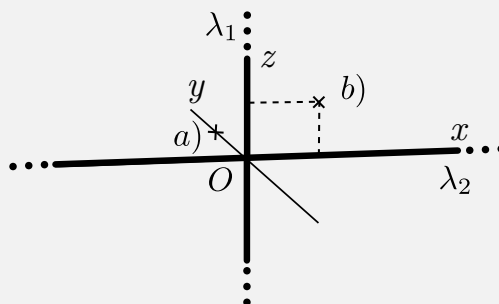
La elongación del muelle es entonces:

$$\Delta x = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 k} - \frac{mg}{k}$$

12. Un cable infinito con densidad de carga uniforme $\lambda_1 = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se encuentra situado a lo largo del eje z . Un segundo cable con densidad $\lambda_2 = -1 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se dispone perpendicularmente al primero a lo largo del eje x . Hallar el campo eléctrico en los puntos siguientes:

a) (0,1,0) m.

b) (1,0,1) m.



Observe el lector que en el esquema del problema el sistema de referencia se ha tomado de tal manera que el sentido positivo del eje y está orientado hacia dentro del papel.

Solución

a) En este problema debemos aplicar el principio de superposición calculando el campo generado por cada cable por separado.

El campo eléctrico generado por el cable 1 en el punto a) es:

$$\vec{E}_1^a = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^a} \vec{j}$$

con $d_1^a = 1$ m la distancia del punto a) al cable.

En el punto b) tenemos:

$$\vec{E}_1^b = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^b} \vec{i}$$

siendo $d_1^b = 1$ m la distancia del punto b) al cable.

Analizamos ahora el campo creado por el segundo cable dispuesto a lo largo del eje x :

$$\vec{E}_2^a = \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^a} \vec{j}$$

$$\vec{E}_2^b = \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^b} \vec{k}$$

con $d_2^a = 1 \text{ m}$ y $d_2^b = 1 \text{ m}$.

Terminamos el cálculo sumando las dos contribuciones en cada punto:

$$\vec{E}^a = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^a} \vec{j} + \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^a} \vec{j} = \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} - \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \right) \vec{j} = \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi} \right) \vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$\vec{E}^b = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^b} \vec{i} + \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^b} \vec{k} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \vec{i} - \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

13. Dos planos infinitos, cargados homogéneamente con densidades superficiales de carga $\sigma_1 = 4 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ y $\sigma_2 = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ están situados paralelamente entre sí y separados una distancia de 1 m. Calcular el campo eléctrico creado por esta distribución en un punto cualquiera del espacio.

Solución

Para proceder a la resolución del problema supondremos que ambos planos infinitos están situados de forma paralela al plano xy . De este modo, puesto que el campo eléctrico generado por un plano infinito lleva dirección perpendicular al plano que lo genera, podremos considerar que los campos llevan dirección según el eje z .

También deberemos suponer la posición relativa de ambos planos, en este caso consideraremos que el plano 1 está situado en $z = 0$ y el plano 2 en $z = 1 \text{ m}$. Si la posición relativa de los planos cambiase, la forma de proceder a la resolución sería análoga aunque cambiarían los resultados numéricos.

Una vez que tenemos planteado el problema, procederemos a su resolución. Para ello deberemos dividir el espacio en tres regiones:

- $z < 0$. En esta región tanto el campo generado por el plano 1 como el generado por el plano 2 llevan sentido $-\vec{k}$, por lo tanto el campo eléctrico total será:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = -\frac{4 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

$$\vec{E}_T = \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $0 < z < 1$ m. En la región entre ambos planos los campos generados por cada uno de ellos llevan sentidos opuestos. De este modo, el campo $\vec{E}_1$ tiene sentido $+\vec{k}$, mientras que $\vec{E}_2$ lleva sentido $-\vec{k}$.

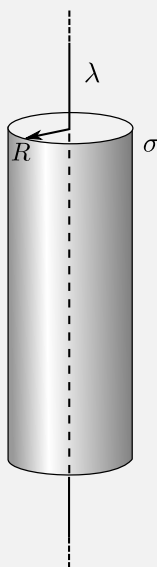
$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $z > 1$. En esta región tanto el campo generado por el plano 1 como el generado por el plano 2 llevan sentido $\vec{k}$, por lo tanto el campo eléctrico total será el mismo que en la zona $z < 0$, pero en sentido opuesto.

$$\vec{E}_T = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

14. Se sitúa un cable infinito a lo largo del eje z cargado con una densidad de carga $\lambda = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$. El cable coincide con el eje de un cilindro hueco infinito de radio $R = 10$ cm cargado con una densidad de carga $\sigma = 3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Hallar el campo eléctrico en los puntos A(0, 5) cm y B(0, 15) cm.



Solución

Si nos fijamos en los datos del problema, el punto A se encuentra en la región del espacio que hay entre el cable y el cilindro, por lo que para calcular el campo eléctrico en este punto únicamente deberemos tener en cuenta el campo generado por el cable (el campo generado por un cilindro hueco en su interior es nulo). Por el contrario, el punto B es un punto exterior al cilindro, y por lo tanto el campo eléctrico será el resultante de la suma de los campos generados por ambas distribuciones.

Comencemos calculando el campo en el punto A. Para ello aplicaremos el teorema de Gauss tomando como superficie gaussiana un cilindro de longitud L y radio $r = 0,05$ m cuyo eje coincida con el cable. Por simetría el campo eléctrico generado por el cable tiene dirección radial y por lo tanto el flujo eléctrico se produce únicamente a través de la superficie lateral de la superficie gaussiana ya que en sus bases el vector $\vec{E}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares y por lo tanto, su producto escalar es nulo. Teniendo esto en cuenta:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} = E 2\pi r L \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

Como la densidad de carga del cable es negativa, el campo tendrá dirección radial, pero sentido hacia el propio cable:

$$\vec{E}(A) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,05 \varepsilon_0} \vec{u}_r = -719344,38 \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Lo primero que vamos a hacer para obtener el campo en el punto B es calcular el campo generado por el cilindro (en el apartado anterior ya hemos obtenido la expresión general del campo generado por el cable) para un punto externo al propio cilindro. Una vez obtenida la expresión general, particularizaremos en el punto B.

Procederemos de forma similar al caso anterior, es decir, tomaremos como superficie gaussiana un cilindro de longitud L y radio $r > R$.

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R L}{\varepsilon_0} = E 2\pi r L \rightarrow E = \frac{\sigma R}{r \varepsilon_0}$$

En este caso la carga es positiva y por lo tanto el sentido del campo eléctrico es radial hacia afuera:

$$\vec{E}_{cilindro} = \frac{\sigma R}{r \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

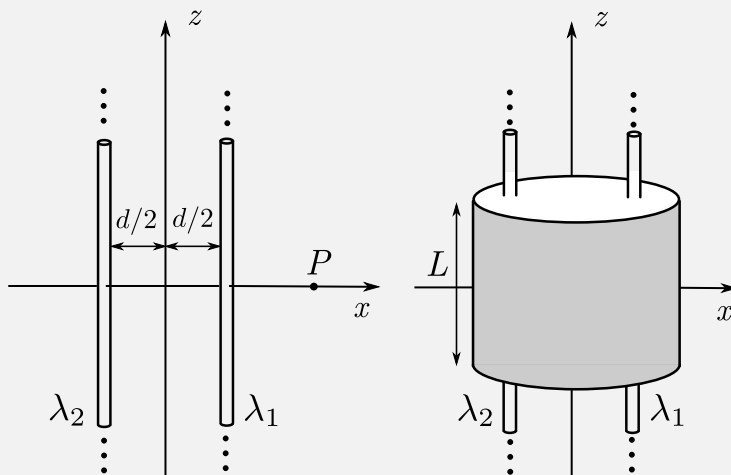
Finalmente procedemos a la suma vectorial de ambos campos en el punto B:

$$\vec{E}(B) = \vec{E}_{cable} + \vec{E}_{cilindro} = \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,15 \varepsilon_0} \vec{u}_r + \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1}{0,15 \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(B) = -13792,76 \vec{u}_r \cdot \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

15. Tenemos dos hilos muy largos, paralelos y separados por una distancia $d = 0,2 \text{ m}$ tal y como se indica en la figura. Los hilos son no-conductores y están cargados con densidades lineales uniformes $\lambda_1 = 1 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ y $\lambda_2 = -1 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Calcular la expresión del campo eléctrico en el punto $P(1, 0) \text{ m}$ indicado en la figura.
- Una caja cilíndrica con su eje coincidiendo con el eje z encierra parte de los cables cargados (ver figura). Cuál es el valor del flujo eléctrico sobre la superficie de la caja.



Solución

a) En la primera parte debemos aplicar el principio de superposición teniendo en cuenta el campo generado por cada uno de los cables infinitos:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) = \frac{\lambda_1}{2\pi r_1 \epsilon_0} \vec{i} + \frac{\lambda_2}{2\pi r_2 \epsilon_0} \vec{i} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 0,9 \epsilon_0} \vec{i} + \frac{-1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1,1 \epsilon_0} \vec{i}$$

$$\vec{E}(P) = 3633,05 \vec{i} \cdot \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) En esta segunda parte calculamos el flujo generado por el campo de los dos hilos. Para calcular este flujo sin tener que integrar el campo

usamos la ley de Gauss:

$$\phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_1 L + \lambda_2 L}{\varepsilon_0} = 0 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{m}^2$$

16. Un péndulo eléctrico está constituido por una esfera metálica de masa m y carga q positiva, colgada de un hilo muy fino de longitud l y masa despreciable. Se hace oscilar al péndulo en una región donde existe un campo eléctrico homogéneo, vertical y orientado de arriba hacia abajo. En este caso se observa que la esfera efectúa 100 oscilaciones en un tiempo t_1 , mientras que si invertimos el sentido del campo, el péndulo tarda un tiempo $t_2 > t_1$ en realizar otras 100 oscilaciones.

a) Calcule la intensidad del campo eléctrico.

b) Halle el valor de la constante g de la gravedad en este experimento.

Ayuda: Período del péndulo sometido a una aceleración vertical

$$a: T = 2\pi\sqrt{l/a}$$

Solución

a) Tenemos dos experimentos donde el período de oscilación del péndulo es distinto. En el caso del péndulo con el campo orientado hacia abajo, tenemos una aceleración vertical que es:

$$a = g + \frac{F}{m} = g + \frac{qE}{m}$$

por lo tanto, el tiempo t_1 se puede expresar en función de los datos del enunciado,

$$t_1 = 100T = 200\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}$$

En el segundo experimento, la fuerza eléctrica empuja hacia arriba el péndulo. Por lo tanto, la aceleración que este experimenta será:

$$a = g - \frac{F}{m} = g - \frac{qE}{m}$$

Como consecuencia, el tiempo t_2 vendrá dado por:

$$t_2 = 100T = 200\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{qE}{m}}}$$

Con ambas medidas del tiempo podemos hallar el campo y la constante g de la gravedad mediante la suma y la diferencia de los cuadrados de los inversos de ambos tiempos:

$$\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} = \frac{2}{(200\pi^2)l} \left(\frac{qE}{m} \right)$$

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} = \frac{2g}{(200\pi^2)l}$$

Despejando las dos ecuaciones anteriores tenemos los datos buscados y la respuesta del apartado b):

$$E = \frac{(200\pi)^2 lm}{2q} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right)$$

$$g = \frac{(200\pi)^2 l}{2} \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} \right)$$

17. Una carcasa metálica neutra de radio interior $r_i = 10$ cm y de radio exterior $r_e = 15$ cm, encierra una corteza esférica de radio $r_c = 5$ cm con una densidad de carga $\sigma_c = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Los centros de la carcasa y de la corteza coinciden en $O(0,0,0)$.

a) ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie interior y exterior de la carcasa metálica?

b) Hallar el campo eléctrico a lo largo del semi-eje $z \geq 0$.

Solución

a) Para calcular la densidad de carga en las superficies interior y exterior de la carcasa, lo primero que deberemos tener en cuenta es que al ser una carcasa conductora, una vez que se alcance el equilibrio electrostático, el campo eléctrico en su interior deberá ser 0.

Esto implica que si tomamos una superficie gaussiana de radio r tal que $r_i \leq r \leq r_e$ la carga encerrada por dicha superficie gaussiana deberá ser nula. Es decir, en la superficie interna ($r = r_i$) debe producirse una acumulación de carga negativa que anule la carga que tiene la corteza esférica, de modo que la carga total sea 0.

$$Q_{r_c} + Q_{r_i} = 0 \rightarrow Q_{r_c} = -Q_{r_i} \rightarrow \sigma_c 4\pi r_c^2 = -\sigma_i 4\pi r_i^2$$

$$\sigma_i = -\sigma_c \frac{r_c^2}{r_i^2} = -2,5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

Para calcular la densidad de carga en la superficie externa, r_e , simplemente tendremos que tener en cuenta que inicialmente la carcasa no tenía carga y por lo tanto lo que se produce es una redistribución de las cargas libres que hay en el material.

Como consecuencia de esta redistribución, en la superficie externa r_e se acumulará una carga que anulará la que se ha acumulado en la superficie interna, r_i , o lo que es lo mismo una carga igual a la que aporta la corteza esférica. De este modo:

$$Q_{r_c} = Q_{r_e} \rightarrow \sigma_c 4\pi r_c^2 = \sigma_i 4\pi r_e^2$$

$$\sigma_i = \sigma_c \frac{r_c^2}{r_e^2} = \frac{10}{9} \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) Para calcular el campo eléctrico a lo largo del semi-eje $z \geq 0$, deberemos aplicar la Ley de Gauss en las 4 regiones en las que la distribución de carga divide al semieje. Para todos estos casos la superficie gaussiana que debemos tomar es una superficie esférica de centro en el origen de coordenadas y radio la distancia desde el punto en el que queremos calcular el campo hasta el origen.

- $z < 5 \text{ cm}$. En este caso la carga encerrada por la superficie gaussiana es nula, pues toda la carga está en la superficie de corteza esférica, por lo tanto:

$$\vec{E}_{z < 5 \text{ cm}} = 0 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $5 \text{ cm} \leq z < 10 \text{ cm}$. Ahora al aplicar la Ley de Gauss obtenemos que la carga encerrada en el interior de la superficie gaussiana es la carga que hay en la corteza esférica de radio $r_c = 5 \text{ cm}$ y densidad $\sigma_c = 10 \mu\text{C m}^{-2}$, es decir, $q_{int} = 4\pi r_c^2 \sigma_c = 0,1\pi \mu\text{C}$, por lo tanto:

$$\vec{E}_{5 \text{ cm} \leq z < 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}$. Este caso es extremadamente sencillo, ya que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático tiene que ser 0. Hay que recordar que esta condición ya la hemos aplicado en el apartado a) para calcular la densidad de carga en la superficie interior de la carcasa.

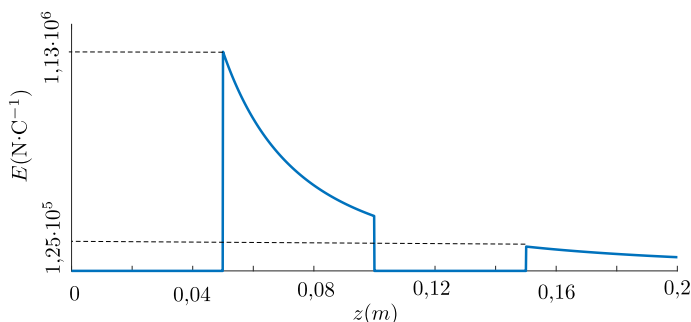
$$\vec{E}_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}} = 0 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $z > 15 \text{ cm}$. Finalmente para puntos externos a la carcasa, la carga contenida en la superficie gaussiana será únicamente la que aporta

la corteza esférica, puesto que el enunciado nos dice que la carcasa no posee carga. Al introducir la corteza esférica se produce una redistribución de las cargas en la carcasa, pero la carga total tiene que permanecer constante y en este caso la carga inicial era nula. Teniendo en cuenta todo esto:

$$\vec{E}_{z>15\text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

Finalmente podemos representar gráficamente la evolución del módulo del campo eléctrico en función de z .



18. Una carga puntual q se encuentra en el centro de una carcasa esférica **no conductora** de radio interior r_i y radio exterior r_e . La carcasa tiene una densidad de carga volumétrica $\rho \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ homogénea repartida en todo su interior. Hallar el campo eléctrico para todas las distancias r relativas a la carga interior.

Solución

Es conveniente dividir el problema en tres regiones dependiendo de la distancia r al centro de la carcasa esférica:

- $0 < r \leq r_i$. En esta zona solo tenemos el campo generado por la carga puntual q :

$$\vec{E}_1(r) = K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

- $r_i \leq r \leq r_e$. En esta región tenemos la superposición del campo generado por la carga puntual y la densidad de carga de la carcasa homogénea hasta el radio r . Dada la simetría esférica, el campo debido a la parte de la carcasa, $\vec{E}_c(r)$, se puede hallar aplicando la ley

de Gauss a una esfera de radio r centrada en el centro de la carcasa. De este modo

$$\vec{E}_c(r) \cdot \vec{S} = E_c(r) S = E_c(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_i^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E_c(r) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_i^3)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho(r^3 - r_i^3)}{3r^2 \varepsilon_0}$$

Teniendo en cuenta que la dirección del campo es radial y que $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, la expresión del campo eléctrico generado por la parte de la corteza incluida en la región de estudio la podremos escribir como:

$$\vec{E}_c(r) = K \frac{\rho 4\pi(r^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r$$

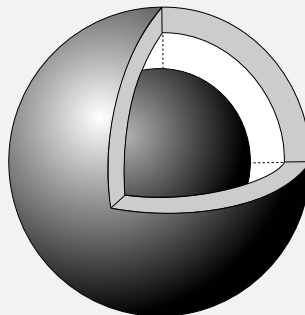
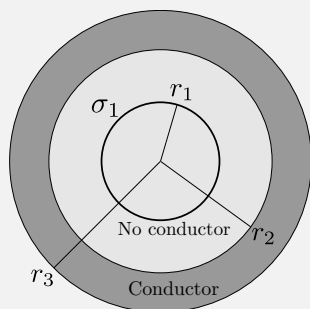
Finalmente, el campo total será la suma de ambos campos:

$$\vec{E}_2(r) = K \frac{\rho 4\pi(r^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r + K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $r > r_e$. Tenemos la suma de los dos campos, el generado por toda la carcasa y el generado por la carga puntual. Para calcular el campo generado por toda la carcasa, volveremos a aplicar el teorema de Gauss que nos llevará a una expresión similar a la obtenida en el apartado anterior para $\vec{E}_c(r)$ siendo esta vez la carga total de la carcasa $Q_{int} = \rho 4/3\pi(r_e^3 - r_i^3)$:

$$\vec{E}_2(r) = K \frac{\rho 4\pi(r_e^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r + K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

19. Consideramos una corteza esférica (no conductora) de radio r_1 con una densidad de carga σ_1 repartida en su superficie. A su alrededor colocamos una carcasa esférica conductora de radio interior r_2 y de radio exterior r_3 , de modo que el centro de la carcasa coincide con el centro de la corteza esférica. El conductor tiene una carga neutra.



- Calcular la densidad de carga en la superficie interna y externa de la carcasa conductora.
- Calcular el campo eléctrico en función de la distancia al centro del dispositivo.

Solución

a) Para resolver este problema aplicamos la ley de Gauss a la carcasa conductora. Consideramos una superficie de Gauss esférica de radio $r_g \in]r_2, r_3[$ y con su centro coincidiendo con el de las otras dos carcasas. El campo eléctrico en la carcasa es nulo dado que se trata de un material metálico en equilibrio electrostático, por lo tanto el flujo también es nulo y la suma de las cargas en el interior de la superficie gaussiana también debe serlo:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

La carga repartida sobre la cara interior de la carcasa esférica debe anular la carga de la corteza, es decir:

$$\sigma_1 4\pi r_1^2 = -\sigma_2 4\pi r_2^2$$

siendo σ_2 la densidad de carga de la superficie interior de la carcasa metálica. Se obtiene:

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma_1 r_1^2}{r_2^2}$$

Para calcular la densidad de carga en la superficie externa de la carcasa deberemos tener en cuenta que la carcasa metálica es neutra, y por lo tanto la suma de las cargas acumuladas en las superficies externa e interna deben anularse:

$$\sigma_2 4\pi r_2^2 = -\sigma_3 4\pi r_3^2$$

A su vez podemos expresar la densidad de carga de la superficie externa de la carcasa, σ_3 con la densidad de carga de la corteza esférica del enunciado, σ_1 :

$$\sigma_3 = -\frac{\sigma_2 r_2^2}{r_3^2} = \frac{\sigma_1 r_1^2}{r_3^2}$$

b) Para el cálculo del campo, debemos dividir el espacio en distintas zonas:

- $0 < r < r_1$. Basta con aplicar el teorema de Gauss a una esfera centrada en el origen con un radio inferior a r_1 . Al tener toda la carga distribuida a lo largo de la superficie de la esfera, la carga encerrada por la superficie gaussiana será 0 y por lo tanto el campo eléctrico nulo, $\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r$.
- $r_1 < r < r_2$. Dada la simetría esférica del problema, el campo es equivalente al de una carga puntual con carga $Q = \sigma_1 4\pi r_1^2$:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{r^2} \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- $r_2 < r < r_3$. El campo eléctrico es nulo al ser un material conductor en equilibrio electrostático.
- $r_3 < r$. De nuevo encontramos el campo de una carga puntual situada en el origen de coordenadas:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{r^2} \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

20. Tenemos un cilindro macizo de base S y altura h. Depositamos en su interior una carga $Q = 2 \mu\text{C}$.

- a) Calcular el flujo del campo sobre las paredes del cilindro. Añadimos un campo externo uniforme $\vec{E} = 10\vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ paralelo al eje axial del cilindro.
- b) Calcule de nuevo el flujo sobre las paredes del cilindro.

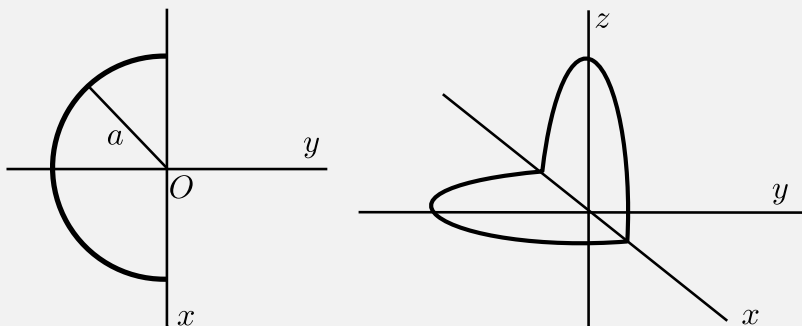
Solución

a) La primera pregunta es una aplicación directa de la ley de Gauss:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} \text{ V}\cdot\text{m}$$

b) El campo adicional no modifica el flujo total del campo sobre las paredes. Aunque puede cambiar el valor del campo en todos los puntos del cilindro, no va a haber modificación del flujo. Este flujo depende de las cargas en el interior de la superficie y la presencia del campo eléctrico adicional no modifica el valor total de la carga, dependiendo del material, podrá modificar su distribución, pero nunca su valor.

21. Disponemos de dos semiaros con densidad de carga λ repartida uniformemente. Uno de los semiaros se encuentra en el semiplano xy para $y < 0$ y con su centro en el origen. El otro semiarco se encuentra en el semiplano xz con $z > 0$ y su centro también coincide con el origen. Ambos semiaros tienen radio a . Calcular el campo eléctrico producido por los semiaros en el origen.

**Solución**

El campo eléctrico se obtiene sumando vectorialmente los campos eléctricos generados por cada uno de los semiaros. Procedemos a calcular el campo eléctrico que genera el semiarco situado en el plano xy . Una vez calculado este campo, el generado por el semiarco situado en el plano xz será automático.

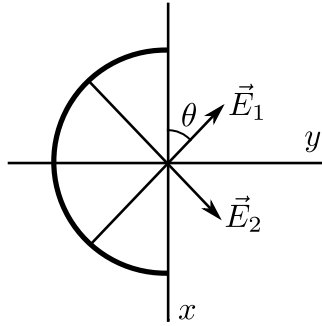
El campo generado por un elemento diferencial de longitud del semiarco

($dl = ad\theta$) es:

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{a^2}\vec{u} = \frac{K\lambda dl}{a^2}\vec{u} = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2}\vec{u}$$

Una vez conocido $d\vec{E}$, deberemos integrar a todo el semiarco.

Para resolver esta integral, lo primero que hacemos es descomponer el campo eléctrico en sus componentes x e y . Si nos fijamos en el siguiente dibujo, observamos que la única componente del campo que no se anula es la componente y mientras que la componente x se anula por simetría (todo elemento diferencial del semiarco, dl_1 , tiene otro simétrico, dl_2 , que genera un campo cuya componente x anula la contribución del primero). Procediendo de forma análoga para el semiarco en el plano xz obtendremos que el campo eléctrico generado únicamente tiene componente z .



Procedamos a calcular analíticamente el valor de las componentes. Aunque anteriormente ya hemos indicado que la componente x de nuestro campo se anula por simetría, a continuación también haremos el desarrollo matemático para comprobar que nuestra intuición coincide con las matemáticas. La componente según el eje y del campo se escribe como:

$$dE_y = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2} \sin \theta$$

Integrando para todos los elementos obtenemos el campo:

$$E_y = \int_0^\pi \frac{\sin \theta K\lambda ad\theta}{a^2} = \frac{K\lambda}{a} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2K\lambda}{a}$$

La componente según el eje x del campo se escribe como:

$$dE_x = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2} \cos \theta$$

Integrando para todos los elementos obtenemos el campo:

$$E_x = \int_0^\pi \frac{\cos\theta K \lambda a d\theta}{a^2} = \frac{K\lambda}{a} [\sin\theta]_0^\pi = 0$$

Por lo tanto el campo generado por este semiarco en el origen es:

$$\vec{E}_{xy} = \frac{2K\lambda}{a} \vec{j}$$

Procediendo de forma análoga, el campo generado por el otro semiarco tendrá la misma magnitud pero con una orientación diferente:

$$\vec{E}_{xz} = -\frac{2K\lambda}{a} \vec{k}$$

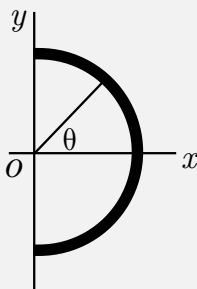
El campo total es la suma de ambos:

$$\vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = \frac{2K\lambda}{a} \vec{j} - \frac{2K\lambda}{a} \vec{k}$$

22. Disponemos de un semiarco de radio a con densidad lineal de carga λ **no uniforme**:

$$\lambda(\theta) = 1 \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) \text{ C}\cdot\text{m}^{-1}$$

Calcular el campo eléctrico en el origen.



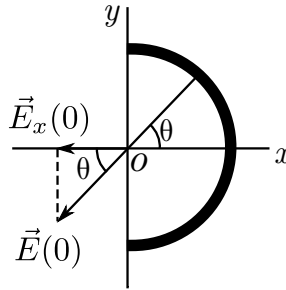
Ayuda: fíjense que la distribución de carga es simétrica con respecto al eje x .

Solución

El campo eléctrico se puede calcular fácilmente con la observación de la simetría con respecto al eje x de la distribución de carga. Esto significa que la componente y del campo va a desaparecer dado que los campos

debidos a elementos de longitud simétricos respecto del eje x tendrán la suma de sus componentes y nula. Con esto en mente, nos podemos centrar en la componente x del campo eléctrico:

$$\vec{E}_x(0) = - \int_0^{\pi/2} \frac{Ka\lambda(\theta)}{a^2} \cos(\theta) d\theta \vec{i}$$



Es la resultante de la proyección sobre el eje x del campo generado de cada trozo de aro sumados a lo largo del aro. Notando que la distribución es simétrica con respecto al eje y podemos integrar para la mitad de los ángulos θ y multiplicamos por dos el resultado. Resolvemos:

$$\vec{E}_x(0) = -2 \int_0^{\pi/2} \frac{K \cdot 10^{-6}}{a} \cos^3(\theta) d\theta \vec{u}_x = -K \cdot 10^{-6} \frac{4}{3a} \vec{i}$$

siendo la integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \frac{2}{3} \vec{i}$$