

2 POTENCIAL

2.1 Ecuaciones relevantes.

■ Diferencia de potencial.

La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y por lo tanto debe existir una función energía potencial U asociada a ella. La relación entre la energía potencial y la fuerza eléctrica viene dada por el hecho de que cuando la partícula sobre la que se aplica la fuerza conservativa $\vec{F}$ sufre un desplazamiento $d\vec{l}$ la partícula experimenta una variación de su energía potencial:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (2.1)$$

Si se considera que la fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre una carga q es $\vec{F} = q\vec{E}$, obtenemos que

$$dU = -q\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.2)$$

Aplicando la ecuación anterior a la carga testigo q_0 , obtenemos $dU = -q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$. La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina diferencia de potencial dV :

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.3)$$

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b , la variación de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$

y su unidad en el sistema internacional es el Voltio [V].

Aplicando la ecuación (2.4) al caso de cargas puntuales, se obtiene:

$$V(r) = K \frac{q}{r} + V_0 \quad (2.5)$$

donde V_0 es el valor de la función en un punto arbitrario que se toma como referencia. En el caso de la carga puntual se toma como punto de referencia el infinito para el cual $V_\infty = 0$. De este modo la ecuación (2.5) queda

$$V(r) = K \frac{q}{r} \quad (2.6)$$

Aplicando el principio de superposición, el potencial eléctrico para una distribución de cargas puntuales es:

$$V(r) = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} \quad (2.7)$$

■ Potencial debido a una distribución continua de carga.

En este caso, procederemos a integrar sobre todo el volumen del objeto el potencial generado por el diferencial de carga dq :

$$V(r) = \int_V K \frac{dq}{r} \quad (2.8)$$

Si la distribución de carga es infinita nos impide considerar que el potencial en el infinito es cero y deberemos asignar un valor arbitrario a un punto cualquiera del espacio.

■ Relación entre el campo eléctrico y el potencial.

$$\vec{E}(r) = -\text{grad } V(r) = -\vec{\nabla} V(r) \quad (2.9)$$

donde el operador $\vec{\nabla}$ toma diferentes expresiones dependiendo de sistema de coordenadas que utilicemos. En nuestro caso y por simplicidad utilizaremos coordenadas cartesianas, en cuyo caso:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (2.10)$$

■ Energía Potencial de distribuciones de cargas.

Sean dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia d la energía potencial asociada a la distribución formada por ambas cargas es

$$U = K \frac{q_1 q_2}{d} \quad (2.11)$$

Si tenemos una distribución de varias cargas puntuales la energía potencial total será:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (2.12)$$

donde V_i es el potencial eléctrico en el punto donde está situada la carga q_i generado por todas las cargas a excepción de la carga q_i .

■ Trabajo.

El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una partícula de carga q_0 se desplaza entre dos puntos $\vec{r}_a$ y $\vec{r}_b$, lo podemos calcular directamente aplicando su definición:

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} q_0 \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \quad (2.13)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta la relación (2.4), el trabajo lo podremos poner en función de la energía potencial:

$$W = -q_0 \Delta V = -\Delta U \quad (2.14)$$

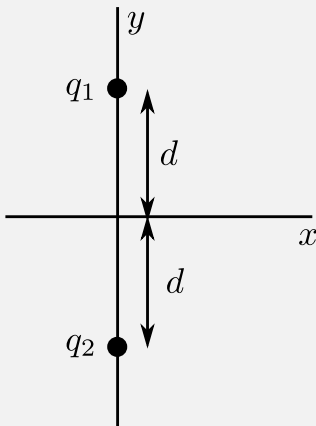
2.2 Ejercicios

1. El electrón-voltio es el trabajo necesario para mover a un electrón de un punto con potencial de 0 V a un punto con potencial de 1 V. Calcular el trabajo en Julios.

Solución

$$W = -q\Delta V = -(-1,6 \cdot 10^{-19})1V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

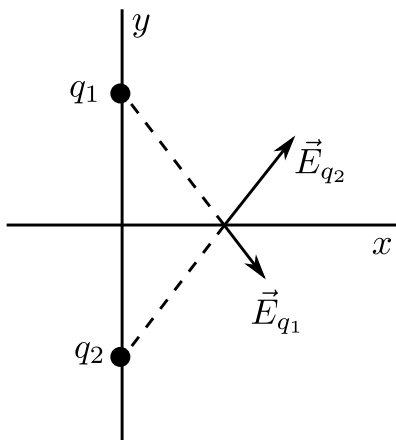
2. Se dispone de dos cargas q_1 y q_2 situadas sobre el eje y a una distancia d del eje x tal y como se muestra en la figura:



- Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje x .
- Consideramos ahora $q_1 = 1 \text{ nC}$ y $q_2 = 2 \text{ nC}$, $d = 10 \text{ cm}$, calcular el potencial en los puntos $(2, 0) \text{ cm}$ y $(0, 0) \text{ cm}$.
- Calcular el trabajo necesario para mover una carga de 1 nC del punto $(2, 0) \text{ cm}$ hasta el punto $(0, 0) \text{ cm}$.

Solución

- a) Para calcular el campo que se nos pide debemos superponer el campo generado por cada una de las cargas en un punto del eje x :



$$\vec{E}_{q_1} = K \frac{q_1}{d^2 + x^2} \vec{u}_1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

con el vector unitario: $\vec{u}_1 = \frac{x\vec{i} - d\vec{j}}{\sqrt{d^2 + x^2}}$ y

$$\vec{E}_{q_2} = K \frac{q_2}{d^2 + x^2} \vec{u}_2 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

con el vector unitario: $\vec{u}_2 = \frac{x\vec{i} + d\vec{j}}{\sqrt{d^2 + x^2}}$.

El campo generado en cualquier punto del eje es:

$$\vec{E} = \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} = K \frac{q_1 \vec{u}_1 + q_2 \vec{u}_2}{d^2 + x^2} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Podemos presentar el resultado con su descomposición en cada eje:

$$\vec{E} = K \frac{1}{(d^2 + x^2)^{3/2}} (x(q_1 + q_2)\vec{i} + d(q_2 - q_1)\vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) El cálculo del potencial en los puntos (2,0) cm y en (0,0) cm supone también aplicar el principio de superposición:

$$V(2,0) = K \frac{q_1}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} = K \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} = 264,7 \text{ V}$$

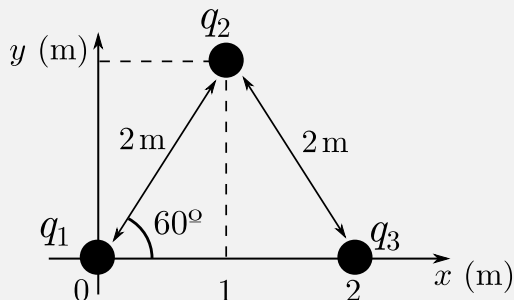
$$V(0,0) = K \frac{q_1}{\sqrt{d^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{d^2}} = K \frac{q_1 + q_2}{d} = 270 \text{ V}$$

c) Para calcular el trabajo necesario para desplazar una carga de 1 nC entre los puntos (2,0) cm y (0,0) cm podríamos aplicar directamente $W = \int_{(2,0)}^{(0,0)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ sería el diferencial de desplazamiento a lo largo de la trayectoria entre ambos puntos. Sin embargo, y aprovechando que el campo eléctrico es un campo conservativo, podemos aplicar $W_e = -\Delta U = -q\Delta V$, de este modo tenemos:

$$W_e = -q(V(0,0) - V(2,0)) = -1 \cdot 10^{-9}(270 - 264,7) = -5,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

El hecho de que el trabajo realizado por el campo eléctrico sea negativo nos indica que la partícula no realizará este movimiento de forma espontánea y que tendremos que ser nosotros, desde el exterior, los que aportemos esa energía. Por lo tanto, el trabajo necesario será el opuesto del trabajo realizado por el campo eléctrico: $W = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.

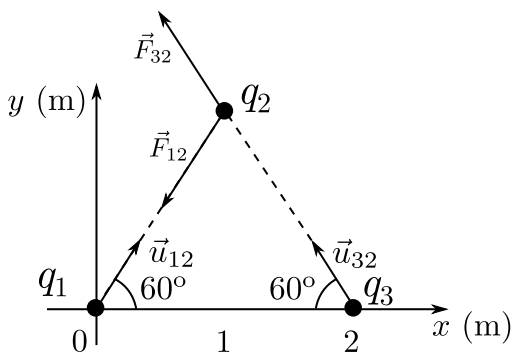
3. Se disponen 3 cargas de valor $q_1 = -1 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$ y $q_3 = 1 \mu\text{C}$ según la distribución que se muestra en la figura siguiente:



- Calcular la fuerza eléctrica que actúa sobre q_2 .
- La energía almacenada por el sistema de cargas.

Solución

a) Calculamos la fuerza sobre la carga q_2 mediante la Ley de Coulomb y aplicando el principio de superposición:



Los vectores unitarios de la figura anterior se descomponen usando el ángulo que forman con la horizontal:

$$\vec{u}_{12} = \cos(60^\circ)\vec{i} + \sin(60^\circ)\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{u}_{32} = -\cos(60^\circ)\vec{i} + \sin(60^\circ)\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12} + K \frac{q_3 q_2}{d^2} \vec{u}_{32} = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \left(\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) + K \frac{q_3 q_2}{d^2} \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{F}_2 = -4,5 \cdot 10^{-3} \vec{i} \text{ N}$$

b) La energía almacenada en el sistema de cargas se puede calcular usando los potenciales generados en el lugar donde está situada cada una de las cargas:

$$V_{q_1} = K \frac{q_2}{d} + K \frac{q_3}{d} = 13500 \text{ V}$$

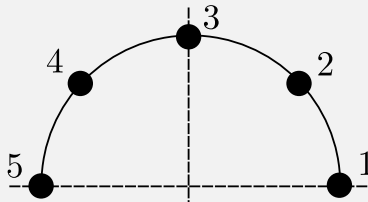
$$V_{q_2} = K \frac{q_1}{d} + K \frac{q_3}{d} = 0 \text{ V}$$

$$V_{q_3} = K \frac{q_1}{d} + K \frac{q_2}{d} = 4500 \text{ V}$$

Calculamos ahora la energía electrostática del sistema:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_{q_i} = \frac{1}{2} (q_1 V_{q_1} + q_2 V_{q_2} + q_3 V_{q_3}) = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

4. Cinco cargas negativas idénticas de valor $-10 \mu\text{C}$, están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio 2 m, de manera que dos de ellas están en los extremos del semicírculo.



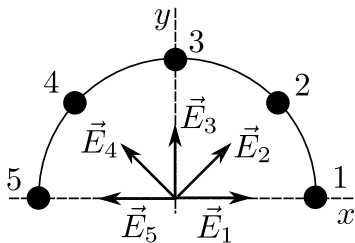
- a) Calcule el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en el centro del semicírculo.

A continuación, las cargas 2 y 4 (ver figura) cambian de signo y modifican su posición a lo largo del borde del semicírculo, de modo que el campo eléctrico en el centro del semicírculo pasa a ser nulo. Obtenga:

- b) La nueva posición de ambas partículas.
- c) El trabajo realizado por el campo eléctrico para traer un electrón desde el infinito hasta el centro del semicírculo.

Solución

a) El campo en el centro del semicírculo es la superposición de los campos generados por las 5 cargas. Es recomendable realizar un esquema del problema en el que se vean los campos eléctricos generados por las distintas cargas de modo que nos permita entender mejor el problema.



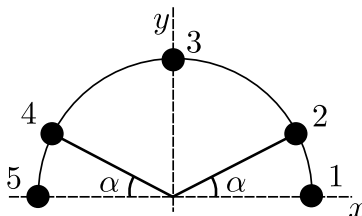
Una vez que tenemos el esquema del problema, procedemos a realizar la suma vectorial de los campos eléctricos. Para ello nos aprovecharemos del esquema realizado y al conocer el sentido de cada campo podremos trabajar con el módulo de la carga.

$$\vec{E}(0,0) = K \frac{|q_1|}{R^2} \vec{i} - K \frac{|q_5|}{R^2} \vec{i} + K \frac{|q_2|}{R^2} \vec{u}_2 + K \frac{|q_4|}{R^2} \vec{u}_4 + K \frac{|q_3|}{R^2} \vec{j}$$

con los vectores unitarios: $\vec{u}_2 = \cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j}$ y $\vec{u}_4 = -\cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j}$. Con $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q = -10 \mu\text{C}$, la resultante es:

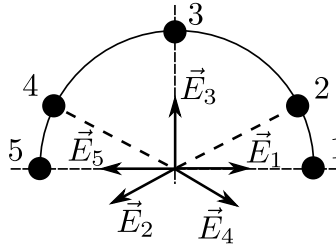
$$\vec{E}(0,0) = K \frac{|q|}{R^2} (1 + \sqrt{2}) \vec{j} = 54319,8 \vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) Para encontrar la nueva distribución de cargas conviene dibujar una distribución ficticia tal que la suma hipotética de los campos en el centro del semicírculo sea cero.



Podemos ver inmediatamente que el campo resultante de las cargas 1 y 5 es nulo. Otra hipótesis razonable de cara al cálculo es asumir que la distribución se mantiene simétrica con respecto al eje y marcado en

la figura, esto nos indica que las componentes según el eje x de las cargas 2 y 4 también se anulan, dejando únicamente una componente según el eje y . Finalmente, la suma de estas componentes más el campo generado por la partícula 3 debe ser nula en el punto que se nos pide.



Siendo $q' = 10 \mu\text{C}$ la carga de 2 y 4, las componentes según el eje y de campo de las dos cargas son:

$$\vec{E}_2^y = -\frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{E}_4^y = -\frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha \vec{j}$$

El campo de la carga 3 en el centro del círculo es:

$$\vec{E}_3 = \frac{K|q|}{R^2} \vec{j}$$

El problema consiste ahora en calcular el ángulo α para obtener un campo nulo en el centro:

$$-2 \frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha + \frac{K|q|}{R^2} = 0$$

$$2 \sin \alpha = 1$$

la solución siendo: $\alpha = \pi/6$ rad.

c) Para resolver este apartado lo primero que debemos hacer es calcular el potencial en el centro del semicírculo:

$$V(0,0) = 3 \frac{Kq}{R} + 2 \frac{Kq'}{R} = \frac{Kq}{R} = -45000 \text{ V}$$

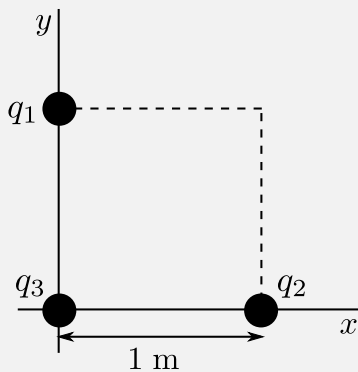
El trabajo realizado por el campo eléctrico para traer el electrón desde el infinito hasta este punto vendrá dado por:

$$W_e = -\Delta U = -e \cdot \Delta V = -e(V(0,0) - V_\infty) = -e(V(0,0) - 0) = -e \frac{Kq}{R}$$

$$W_e = -7,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

5. En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado se sitúan cargas de $10 \mu\text{C}$ cada una (ver figura). Calcule:

- El campo eléctrico en el cuarto vértice y la fuerza que experimentará un electrón cuando lo situemos en dicho vértice.
- El trabajo que realizará el campo eléctrico para llevar el electrón desde este vértice hasta el centro del cuadrado en presencia de las otras tres. ¿Será espontáneo el movimiento?



Solución

a) Para calcular el campo eléctrico aplicamos el principio de superposición calculando primero el campo debido a cada carga en el cuarto vértice del cuadrado:

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2} \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

siendo $q_1 = q_2 = q_3 = 10 \mu\text{C}$, $r_1 = r_2$ y $r_3 = \sqrt{2}r_1$.

El campo total se obtiene mediante la suma vectorial de los campos anteriores:

$$\vec{E}_T(1,1) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_T(1,1) = 121819\vec{i} + 121819\vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

La fuerza que se ejerce sobre un electrón en este punto es

$$\vec{F} = e\vec{E}_T = e \frac{Kq_1}{r_1^2} \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{j} \right) = -1,95 \cdot 10^{-14}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ N}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico para desplazar el electrón desde el cuarto vértice hasta el centro del cuadrado, necesitamos calcular los potenciales eléctricos en estos puntos. Para simplificar la notación consideraremos $q_1 = q_2 = q_3 = q$, $r_1 = r_2 = d = 1 \text{ m}$

$$V(1,1) = 2K\frac{q}{d} + K\frac{q}{d\sqrt{2}} = 243639,61 \text{ V}$$

Calcular el potencial eléctrico en el centro del cuadrado es aún más sencillo, puesto que la distancia entre las cargas y el centro es la misma para todas ellas $d' = \sqrt{2}/2\text{m}$. De este modo,

$$V(0,5;0,5) = 3K\frac{q}{d'} = 3K\frac{2q}{\sqrt{2}} = 381837,66 \text{ V}$$

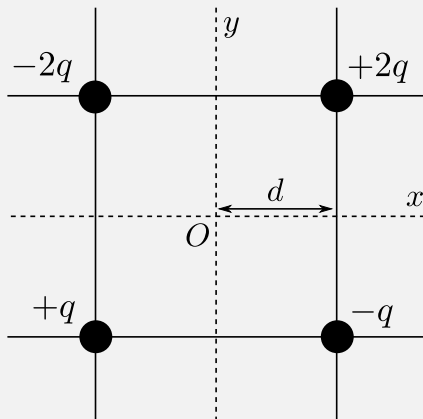
Teniendo en cuenta que $W = -\Delta U = -e\Delta V$, obtenemos:

$$W = -e(V(0,5;0,5) - V(1;1)) = -e \left(3K\frac{2q}{\sqrt{2}} - 2K\frac{q}{d} - K\frac{q}{d\sqrt{2}} \right)$$

$$W = 2,21 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Como el trabajo realizado por el campo eléctrico tiene signo positivo nos indica que el movimiento del electrón habrá sido espontáneo.

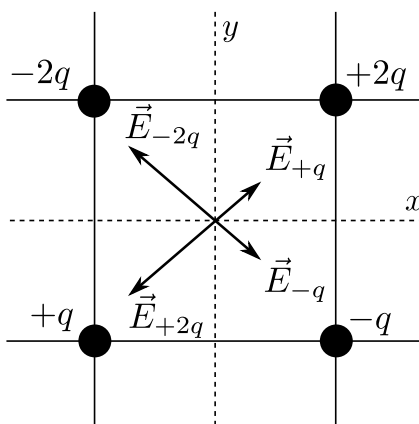
6. Dada la configuración espacial de cargas que se presenta en la siguiente figura. Razone las siguientes afirmaciones:



- a) El campo eléctrico en el punto $(0,0)$ es nulo.
- b) El potencial eléctrico en el punto $(0,0)$ es nulo.
- c) Si introducimos un electrón en el punto $(0,0)$ la fuerza que actuará sobre él llevará sentido $-\vec{i}$

Solución

Para resolver las cuestiones a) y c) lo más sencillo es hacer un dibujo esquemático del problema en el que representemos el campo eléctrico generado por cada carga. Dado que la distancia de las cargas al origen es la misma para todas, los campos generados serán directamente proporcionales al valor de las cargas. De este modo $|E_{\pm 2q}| = 2|E_{\pm q}|$



a) **Falsa.** Si hacemos la suma vectorial de todos los campos eléctricos de la figura se observa que el campo resultante lleva dirección $-\vec{i}$.

b) **Verdadera.** Para calcular el potencial en el origen de coordenadas debemos hacer la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas.

$$V_T = \sum V_i = K \frac{2q}{d\sqrt{2}} + K \frac{-2q}{d\sqrt{2}} + K \frac{q}{d\sqrt{2}} + K \frac{-q}{d\sqrt{2}} = 0$$

c) **Falsa.** Si como hemos dicho en el apartado a) el campo eléctrico lleva sentido $-\vec{i}$, la fuerza eléctrica que actuará sobre un electrón llevará sentido $\vec{i}$, puesto que la carga del electrón es negativa.

7. Una partícula con carga $q = 1 \mu\text{C}$, masa $m = 1 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$ y con velocidad $\vec{v}_0 = 10^4 \vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ entra en $x = 0$ en una zona con campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -10 \vec{i} \text{ V}\cdot\text{m}$. ¿En qué punto del eje x la partícula se detendrá y dará la vuelta?

Solución

Una forma de resolver este problema es aplicando conceptos energéticos. De este modo, si aplicamos el teorema de la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas obtenemos:

$$W_e = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Al ser un campo uniforme podemos calcular el trabajo:

$$W_e = \vec{l} \cdot q \vec{E} = (x_f - x_i) \vec{i} \cdot q \vec{E} = -x_f q E$$

Siendo $\vec{l} = (x_f - x_i)\vec{i}$ la longitud del trayecto realizado en el campo eléctrico. Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$x_f = \frac{mv_0^2}{2Eq} = 0,5 \text{ m}$$

Como el enunciado nos dice que consideremos $x_i = 0$, la partícula se parará en el punto $x_f = 0,5 \text{ m}$.

Otra forma de resolver este problema utilizando conceptos energéticos sería aplicar el teorema de conservación de la energía, ya que sabemos que el campo electrostático es conservativo:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = E_f = 0 + qV_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V_f - V_0) = q\Delta V$$

En este caso la relación entre ΔV y $\vec{E}$ es muy sencilla:

$$\Delta V = - \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_{x_i}^{x_f} -10\vec{i} \cdot d\vec{x} = 10(x_f - x_i)$$

Sustituyendo su expresión en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q\Delta V = q10(x_f - x_i)$$

que nos lleva a la solución obtenida anteriormente.

Finalmente, también podríamos haber aplicado conceptos de cinemática. Al entrar en la región donde hay campo eléctrico este genera sobre la partícula una aceleración que la frena:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = -\frac{qE}{m}\vec{i}$$

Teniendo en cuenta esta aceleración, podemos calcular el tiempo que tardará la partícula en detenerse:

$$\vec{v}_f = 0 = \vec{v}_0 + \vec{a}t_f \rightarrow 0 = v_0 - \frac{qE}{m}t_f \rightarrow t_f = \frac{mv_0}{qE}$$

Con este tiempo y la ecuación del movimiento uniformemente acelerado podemos calcular el espacio recorrido por la partícula hasta detenerse:

$$x_f = v_0t_f - \frac{1}{2}at_f^2 = \frac{mv_0^2}{qE} - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{mv_0}{qE} \right)^2 = \frac{mv_0^2}{2qE}$$

Volviendo a obtener la misma solución.

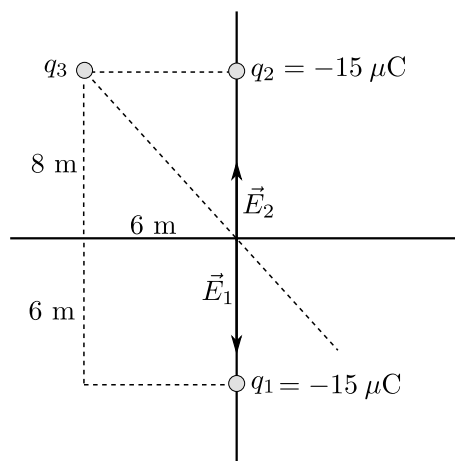
8. Tenemos tres cargas puntuales $q_1 = -15 \mu\text{C}$, $q_2 = -15 \mu\text{C}$ y q_3 de valor desconocido, situadas respectivamente en los puntos $(0, -6)$, $(0, 8)$ y $(-6, 8)$, estando las coordenadas en metros. Sabiendo que el potencial eléctrico en el origen de coordenadas es nulo, calcule:

- El valor de q_3 y el campo eléctrico en el origen.
- El trabajo realizado por el campo eléctrico para llevar una carga de 1 nC desde el origen de coordenadas hasta el punto $(-6, 0)$.

Solución

En este tipo de problemas la realización de un esquema en el que situemos las cargas en sus posiciones y dibujemos el campo eléctrico que genera cada una de las cargas en los puntos que se nos indique el enunciado, nos facilitará tanto la solución como la comprensión del problema.

En este caso hemos dibujado los campos generados por las cargas q_1 y q_2 en el origen de coordenadas y la recta sobre la que se situará el campo generado por q_3 (de momento no conocemos su signo y por lo tanto no podemos saber su sentido).



a) Puesto que el potencial en el origen es nulo, podemos obtener el valor

de la carga q_3 , sin más que exigir esta condición:

$$V(0,0) = 0 = V_1 + V_2 + V_3 = K \frac{q_1}{6} + K \frac{q_2}{8} + K \frac{q_3}{10}$$

$$V(0,0) = 0 = K \left(\frac{-15 \cdot 10^{-6}}{6} + \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{8} + \frac{q_3}{10} \right)$$

$$q_3 = \frac{175}{4} \cdot 10^{-6} = 43,75 \mu\text{C}$$

Una vez que tenemos el valor de q_3 , podemos completar el esquema dibujando el campo eléctrico generado por esta carga ($\vec{E}_3$).

Para calcular el campo eléctrico total deberemos realizar la suma vectorial de los tres campos. Mediante el esquema podemos deducir que el vector unitario de $\vec{E}_3$ es $\vec{u}_3 = (0,6\vec{i} - 0,8\vec{j})$, simplemente aplicando la definición de vector unitario o haciendo uso de sus cosenos directores. Por lo tanto, el campo que se nos pide será:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= K \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{6^2} \vec{j} + K \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{8^2} (-\vec{j}) \\ &+ K \frac{43,75 \cdot 10^{-6}}{10^2} (0,6\vec{i}, -0,8\vec{j}) = \end{aligned}$$

$$\vec{E}_T = 2362,5\vec{i} - 4790,625\vec{j} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

b) Para esta segunda pregunta necesitamos el valor del potencial en el punto $(-6, 0)$:

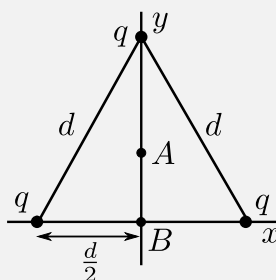
$$V(-6,0) = K \frac{q_1}{\sqrt{6^2 + 6^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{6^2 + 8^2}} + K \frac{q_3}{8} = 19808,8 \text{ V}$$

Si ahora aplicamos la ecuación (2.14) obtenemos el trabajo que se nos pide:

$$W_e = -q\Delta V = -q(V(-6,0) - V(0,0)) = -1 \cdot 10^{-9}(19808,8 - 0)$$

$$W_e = 1,98 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

9. Se disponen 3 cargas puntuales situadas en el plano xy tal y como se indica en la figura siguiente. Calcule el potencial en el centro del triángulo equilátero formado por las tres cargas (punto A), y en el punto medio de la base del triángulo (punto B).



Solución

- a) El potencial en el centro del triángulo se calcula fácilmente si observamos que el centro es equidistante a las cargas. Por lo tanto, si definimos d_1 como la distancia del centro a las cargas, obtenemos:

$$V(A) = 3K \frac{q}{d_1} = 3K \frac{q}{d\sqrt{3}/3} = \frac{9}{\sqrt{3}} K \frac{q}{d}$$

En el punto B el cálculo del potencial es también inmediato, solo necesitamos calcular la altura h del triángulo:

$$V(B) = 2K \frac{q}{d/2} + K \frac{q}{h} = 4K \frac{q}{d} + K \frac{q}{d\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) K \frac{q}{d}$$

10. Se dispone un plano infinito situado en el plano (O, x, y) con una densidad de carga de superficie σ uniforme. Se desplaza una partícula desde el punto $(0,0,-1)$ m hasta el punto $(0,0,1)$ m (puede eventualmente atravesar el plano). ¿Cuál es la energía total necesaria en el proceso?

Solución

En este problema tenemos una simetría del campo eléctrico con respecto al plano. Los campos eléctricos a un lado y otro del plano, tienen el mismo módulo pero sentidos opuestos. Una consecuencia de este hecho, es que si realizamos un trabajo para acercar la partícula hasta el

plano desde el punto $(0,0,-1)$, tendremos el trabajo opuesto al mover la partícula desde el plano hasta el punto $(0,0,1)$. Sumando las dos partes obtenemos un trabajo globalmente nulo al mover la partícula de un punto al otro por este juego de simetría.

11. Una carga puntual de valor $q = 1 \mu\text{C}$ se encuentra en el centro de una corteza cargada de radio $R = 10 \text{ cm}$ y de carga total $Q = 3 \mu\text{C}$. A continuación, dicha carga se desplaza 1 cm con respecto al centro.

- a) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la carga?
- b) ¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio $R_2 = 15 \text{ cm}$ concéntrica con la carcasa antes y después del desplazamiento?

Solución

a) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico lo más sencillo es aplicar $W = -q\Delta V$.

Sin embargo, en este caso, el campo en el interior de la corteza es nulo (simplemente hay que aplicar la Ley de Gauss tomando una superficie gaussiana esférica de centro el centro de la esfera y comprobar que $q_{\text{int}} = 0$).

Si el campo eléctrico es nulo eso implica $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow V = \text{cte} \rightarrow W = 0 \text{ J}$.

b) El flujo eléctrico a través de una superficie es independiente de dónde estén situadas las cargas internas, solo depende de la suma algebraica de dichas cargas, por lo tanto:

$$\phi_e = \frac{(Q + q)}{\epsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\epsilon_0} = 451977,4 \text{ V}\cdot\text{m}$$

12. Disponemos de una partícula de carga $q = 1 \mu\text{C}$ y masa $m = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ a 1 m de un plano infinito cargado con una densidad de carga uniforme $\sigma = -10 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. Si en el instante $t = 0$, se deja a la partícula, inicialmente en reposo, evolucionar libremente despreciando los efectos de la gravedad, responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿A qué distancia del plano la partícula habrá adquirido una energía cinética de 100 mJ?
- b) ¿Cuál es la velocidad en este punto concreto?

Solución

a) El campo eléctrico generado por el plano es uniforme, perpendicular al plano y su módulo viene dado por la expresión:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

En este caso, como la carga de la partícula es positiva y la densidad de carga del plano es negativa, el campo eléctrico ejercerá una fuerza de atracción sobre la partícula, independientemente de si la partícula se encuentra por encima o por debajo del plano.

Como la única fuerza que está actuando es la fuerza eléctrica, la energía adquirida por la partícula se corresponderá con el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante la distancia d , y puesto que la fuerza es constante en todo el espacio y perpendicular al plano podemos escribir:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d = 100 \text{ mJ}$$

Despejando la distancia, obtenemos

$$d = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{F} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{q E} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6} |\sigma| / (2\varepsilon_0)} = 0,177 \text{ m}$$

Como lo que nos piden es la distancia al plano y puesto que la partícula estaba inicialmente a 1 metro del plano y se ha acercado, el resultado final será:

$$d_f = 1 - 0,177 = 0,823 \text{ m}$$

b) La velocidad en este instante vendrá dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6}}} = 447,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

13. Un plano infinito vertical yz , está cargado con una densidad superficial de carga σ positiva. A un metro del plano, en la zona $x > 0$, tenemos un objeto de masa m con una carga q positiva. En un instante dado soltamos el objeto sin velocidad inicial:

- Calcular las fuerzas que actúan sobre el objeto y el módulo de cada una de ellas.
- Determinar el tipo de movimiento del objeto y calcular su aceleración si la tuviera.

Datos: $\sigma = 8\varepsilon_0 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $m = 0,3 \text{ kg}$, $q = 1 \text{ C}$, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Solución

a) El plano infinito genera un campo eléctrico uniforme en la zona donde se encuentra el objeto, por lo tanto la fuerza que experimentará dicho objeto debida a este campo será:

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} = 4\vec{i} \text{ N}$$

Por otro lado, el objeto tiene una masa m , por lo que la fuerza gravitatoria vendrá dada por:

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j} = -3\vec{j} \text{ N}$$

b) Al ser fuerzas constantes, tenemos una aceleración constante:

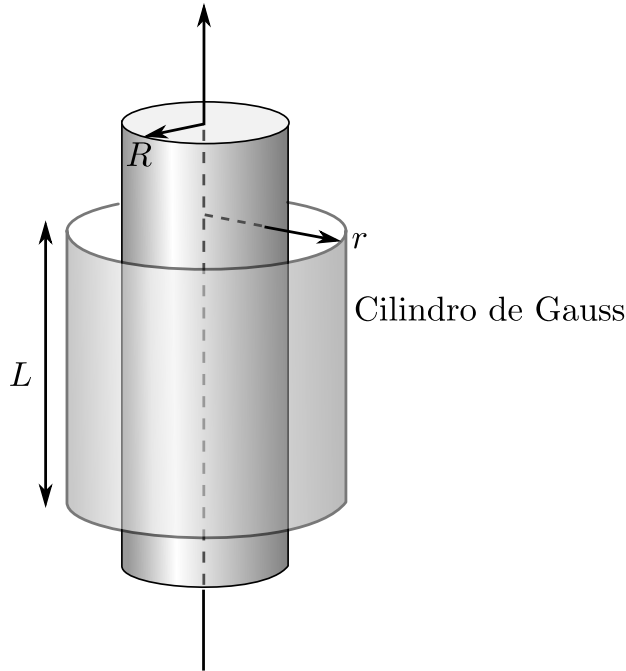
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_E}{m} + \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{40}{3}\vec{i} - 10\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

y por lo tanto el objeto describirá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

14. Dado un cilindro macizo, infinito y conductor de radio R y con densidad de carga $+\sigma$ distribuida uniformemente en la superficie. Calcule el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio si consideramos $V(2R) = 0$.

Solución

En este problema se asume la expresión del campo eléctrico $\vec{E}(r) = \sigma R/\varepsilon_0 r \vec{u}_r$ para $r > R$ y $\vec{E}(r) = 0$ para $r \leq R$. Esta fórmula se ha obtenido en el ejercicio 9 del capítulo 1.



Para calcular el potencial eléctrico deberemos tener en cuenta las dos regiones en las que queda dividido el espacio.

- para $r > R$ el potencial se puede hallar usando directamente la definición de diferencia de potencial $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ y considerando la expresión del campo eléctrico generado por un hilo infinito visto en el capítulo anterior.

$$V(r) - V(2R) = - \int_{2R}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = - \int_{2R}^r \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} dr = \left[-\frac{\sigma R \ln r}{\varepsilon_0} \right]_{2R}^r$$

$$V(r) - V(2R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{r}$$

Es decir tenemos:

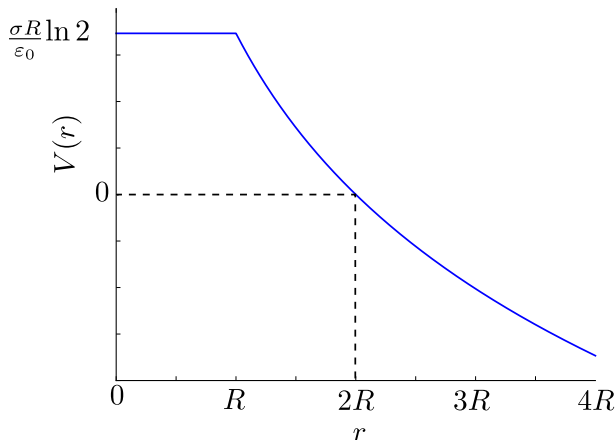
$$V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{r} \text{ para } r > R$$

- para $r \leq R$ deberemos aplicar el hecho de que el campo eléctrico en el interior del cilindro es nulo, puesto que el enunciado nos dice que el cilindro es conductor, lo que implica que el potencial en esta región toma un valor constante para cualquier punto. Para calcular este valor constante aplicaremos la continuidad de la función potencial en

la superficie de separación del cilindro. Con todo ello obtenemos

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln 2 \text{ para } r \leq R$$

Si representamos gráficamente la función potencial obtenemos:



15. Hallar el campo eléctrico asociado a las siguientes funciones potencial eléctrico:

- $V_1(x, y, z) = x^2y + yz$.
- $V_2(x, y, z) = x^2yz + yze^{-x}$.

Solución

Para hallar el campo eléctrico asociado a la función potencial eléctrico deberemos calcular menos el gradiente de la correspondiente función potencial.

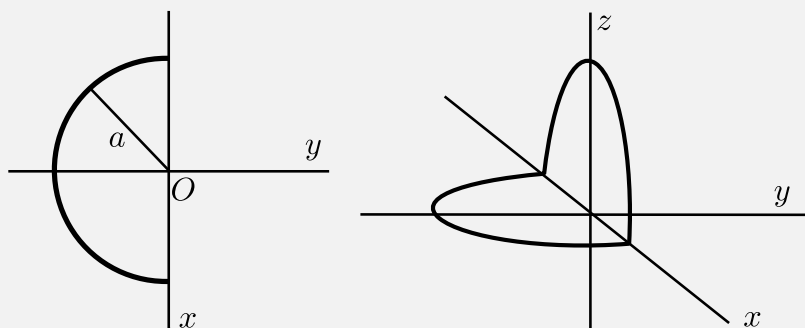
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{z}\right)$$

De este modo obtenemos:

$$\vec{E}_1 = -\left(2xy\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + y\vec{z}\right)$$

$$\vec{E}_2 = -(2xyz - yze^{-x})\vec{i} - (x^2z + ze^{-x})\vec{j} - (x^2z + ye^{-x})\vec{k}$$

16. Disponemos de dos semiaros con densidad de carga λ repartida uniformemente. Uno de los semiaros se encuentra en el semiplano xy para $y < 0$ y con su centro en el origen. El otro semiaro se encuentra en el semiplano xz con $z > 0$ y su centro también coincide con el origen. Ambos semiaros tienen radio a . Calcule el potencial producido por los semiaros en el origen.



Solución

Para resolver el problema debemos tratar los dos semiaros por separado. Primero consideramos el semiaro situado en el plano xy . Para encontrar el potencial en el origen de coordenadas consideramos un pequeño trozo del aro de longitud $ad\theta$ siendo $d\theta$ el diferencial de ángulo. Este elemento contiene una carga $dq = \lambda ad\theta$. El potencial en el origen se puede calcular integrando todas las contribuciones $dV = Kdq/a$:

$$V_1 = \int_0^\pi \frac{Kdq}{a} = \int_0^\pi \frac{K\lambda ad\theta}{a} = K\pi\lambda$$

La contribución del otro semiaro es idéntica siendo el potencial total:

$$V_1 + V_2 = 2K\pi\lambda$$

17. Una esfera conductora de radio $R = 1$ m se encuentra cargada con una densidad superficial de carga $\sigma = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{4\pi} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. Disponemos de una carga puntual $q = 1$ C que podemos desplazar a nuestro antojo. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico en los siguientes desplazamientos:

- Movemos la carga de $r = 0$ cm a $r = 3$ cm dentro de la esfera, siendo r la distancia al centro de la esfera.
- Alejamos la carga de $r = 1$ m hasta una distancia de $r = 2$ m, siendo r la distancia al centro de la esfera.
- Damos una vuelta completa a la esfera con la carga.

Solución

a) En el interior de un conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo, por lo tanto el trabajo de mover la carga es nulo al no haber fuerza electrostática sobre la carga puntual.

b) En esta segunda situación el campo eléctrico lo genera la esfera cargada, por lo tanto, tenemos un potencial eléctrico similar al potencial generado por una carga puntual situada en el centro de la esfera y de valor $Q = 4\pi R^2 \sigma = 1 \cdot 10^{-6}$ C. El potencial eléctrico es entonces: $V(r) = KQ/r$ V.

El trabajo realizado por el campo eléctrico para alejar la carga a un metro de la esfera es:

$$\Delta W = -q\Delta V = -q(V(2) - V(1)) = -q \left(\frac{KQ}{2} - \frac{KQ}{1} \right) = 4500 \text{ J}$$

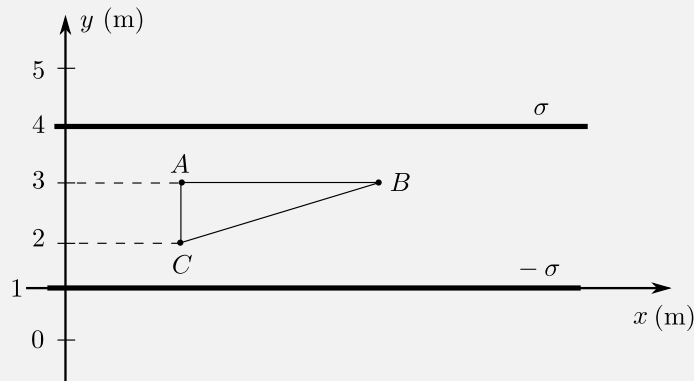
Conviene aquí hacer un comentario acerca de la distribución de carga sobre la esfera conductora. Hemos asumido que las cargas de la esfera no se mueven al acercar una carga q . Sin embargo, al acercar la carga q hacia la superficie conductora, las cargas de la esfera experimentarán una fuerza que aumentará conforme nos acerquemos a ellas, lo que generará una redistribución de las cargas sobre la superficie. Esto implica que el potencial alrededor se verá modificado y por tanto el valor del trabajo también. El cálculo anterior es una aproximación.

c) Si mantenemos la distancia al centro constante, podemos ver que el potencial es idéntico en cualquier punto de este recorrido. Como tal, el trabajo realizado sobre la carga es nulo al ser la diferencia de potencial nula.

Otra forma de justificar este resultado sería teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica es conservativa, por lo tanto si salimos de un punto y volvemos al mismo la diferencia de potencial es nula y también el trabajo del campo.

18. Se disponen dos planos infinitos paralelos de densidades σ y $-\sigma$ tal y como se muestra en la figura adjunta. Tenemos una carga negativa $q = -1 \mu\text{C}$ que podemos desplazar.

- ¿Cuál es el valor y dirección del campo entre las placas?
- Calcular el trabajo del campo eléctrico para mover q de A a C.
- Calcular el trabajo del campo eléctrico para mover q de A a B a C.
- Deducir la diferencia de potencial entre A y C.



Solución

a) Tenemos entre placas para $x \in [1, 4]$ la superposición de dos campos generados por planos indefinidos:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga de A a C, calcularemos la integral siguiente:

$$W = \int_A^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^C (q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = \int_3^2 \left(-q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}\right) \cdot (\vec{j}dy) = -\left[\frac{q\sigma}{\varepsilon_0}y\right]_3^2 = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} \text{ J}$$

c) Ahora queremos calcular el trabajo que necesitamos para mover la partícula siguiendo el trayecto $A \rightarrow B \rightarrow C$. Durante el tramo de A a B, el campo eléctrico es perpendicular al trayecto, por lo tanto, la contribución al trabajo es cero al ser el producto escalar nulo. El trabajo total es:

$$W = \int_A^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = 0 + \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$$

La integral correspondiente al último tramo $B \rightarrow C$ se resuelve sabiendo que $\vec{F}_e = -q\sigma/\varepsilon_0 \vec{j}$ y que el vector $d\vec{l}$ se puede expresar como $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. Se calcula el producto escalar $\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q\sigma/\varepsilon_0 \vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = -q\sigma/\varepsilon_0 dy$. Integraremos únicamente a lo largo del eje y entre las coordenadas 3 y 2:

$$W = \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_3^2 -\frac{q\sigma}{\varepsilon_0} dy = -\left[\frac{q\sigma}{\varepsilon_0} y\right]_3^2 = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} \text{ J}$$

d) La diferencia de potencial entre A y C se calcula aplicando la definición de diferencia de potencial:

$$\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_3^2 \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \vec{j} \cdot (\vec{j} dy) = \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} y\right]_3^2$$

$$\Delta V = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \text{ V}$$

También se podría calcular haciendo uso de la relación entre trabajo y energía potencial, de este modo:

$$W = -q\Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{W}{-q} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \text{ V}$$

19. Dos esferas de masas m_1 y m_2 están cargadas con q_1 y q_2 respectivamente. Inicialmente las esferas se encuentran en reposo a una distancia de d_i cuando, debido a la fuerza eléctrica se ponen en movimiento. Hallar las velocidades de las esferas cuando se encuentran a una distancia d_f .

Solución

Al no considerarse fuerzas de rozamiento en el problema podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. En un estado

inicial tenemos un balance de energía cinética E_c^i y potencial electrostática U_p^i :

$$E_c^i = 0$$

$$U_p^i = K \frac{q_1 q_2}{d_i}$$

Al final del proceso tenemos las siguientes energías:

$$E_c^f = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

$$U_p^f = K \frac{q_1 q_2}{d_f}$$

Tenemos la conservación de la energía mecánica que permite establecer una relación entre las velocidades finales $v_{1,f}$ y $v_{2,f}$:

$$E_c^i + U_p^i = E_c^f + U_p^f$$

Sustituimos las expresiones de las energías y operando llegamos a la siguiente expresión:

$$K q_1 q_2 \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

La otra ecuación necesaria involucra la conservación del momento lineal del sistema $\vec{p} = cte$.

$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f}$$

Siendo las velocidades iniciales $v_{1,i}$ y $v_{2,i}$ nulas, la ecuación correspondiente a la conservación del momento lineal proyectando sobre el eje del movimiento es:

$$0 = m_1 v_{1,f} - m_2 v_{2,f}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones siguientes:

$$K q_1 q_2 \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

$$m_1 v_{1,f} - m_2 v_{2,f} = 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos da como solución:

$$v_{1,f} = -\alpha \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha}}$$

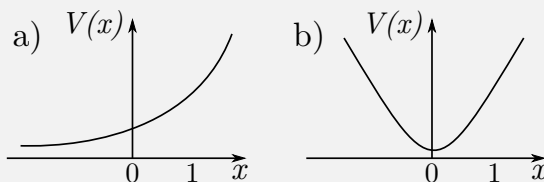
$$v_{2,f} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha}}$$

siendo

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\beta = \frac{2Kq_1q_2}{m_1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right)$$

20. Representamos la función potencial $V(x)$ en función de x para dos casos diferentes. Describa en ambos casos el efecto del potencial sobre una carga puntual $q > 0$ libre inicialmente situada en $x = 1\text{m}$ para los dos casos.



Solución

Para resolver este problema lo más sencillo es recordar que el campo eléctrico siempre se dirige de potenciales altos a potenciales bajos, con esto en mente, analizaremos los dos potenciales que nos proponen.

a) En este caso el campo eléctrico irá dirigido según el vector $-\vec{i}$, como la carga q es positiva, la fuerza que actuará sobre ella también irá dirigida según $-\vec{i}$ y por lo tanto la partícula acabará en $x = -\infty$.

b) En este caso observamos que aparece un mínimo de potencial en el centro, lo que nos divide el espacio en dos regiones diferentes. En $x > 0$ el campo eléctrico se dirige de derecha a izquierda ($-\vec{i}$) mientras que para $x < 0$ se dirige de izquierda a derecha ($+\vec{i}$). Por lo tanto, la partícula que inicialmente hemos depositado en $x = 1\text{ m}$ experimentará una fuerza hacia la izquierda que hará que su velocidad aumente. Este efecto durará hasta el momento en el que la partícula pase a la región $x < 0$, en ese momento el campo eléctrico cambiará de sentido, y por lo tanto la fuerza. Esto hará que la partícula se vaya frenando hasta detenerse. Una vez que se detenga, al estar situada en la región $x < 0$, la fuerza hará que vuelva hacia la derecha, aumentando su velocidad hasta que pase a la región $x > 0$, donde nuevamente el campo eléctrico cambiará de sentido y hará que la partícula se vuelva a frenar. Por lo tanto, en este

caso la partícula realizará un movimiento de vaivén en torno al mínimo de la función potencial.

Observe el alumno que en todo momento hemos despreciado el efecto radiativo que se produce cuando una carga se desplaza y que hace que la energía de la partícula disminuya en el tiempo. Este efecto está muy alejado de los conocimientos de un alumno de cursos básicos de física, por lo que no entramos en profundidad en este problema conceptual y simplemente hacemos una descripción generalista.

21. Una esfera metálica aislada de radio 10 cm se carga a un potencial de 1000 V. Se toca la esfera con otra, también aislada de 2 cm de diámetro que a continuación se descarga. Se repite la operación 5 veces.

- a) La carga de la primera esfera antes de ser tocada.
- b) La carga de dicha esfera después de la quinta operación una vez que el sistema alcanza el equilibrio electrostático.

Solución

a) La primera esfera antes de ser tocada por la segunda tiene un potencial de $V = 1000 \text{ V}$, por tanto:

$$V = K \frac{q}{r_1} = 1000 \text{ V}$$

Despejamos q con un radio $r_1 = 10 \text{ cm}$:

$$q = \frac{V r_1}{K} = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

b) Al tocar la segunda esfera, la carga inicialmente localizada sobre la primera se reparte entre los dos conductores. Llamaremos q_1 la carga de la esfera de radio $r_1 = 10 \text{ cm}$ y q_2 a la carga de la esfera de radio $r_2 = 2 \text{ cm}$. Después del contacto, tendremos la relación:

$$q = q_1 + q_2$$

Además, por el hecho de estar en contacto, ambos conductores pasarán a tener el mismo potencial (si no lo estuviesen, habría una diferencia de potencial entre ambos conductores y por lo tanto un campo eléctrico que haría que las cargas no estuviesen en equilibrio electrostático)

$$V = K \frac{q_1}{r_1} = K \frac{q_2}{r_2}$$

La carga q_1 después de la primera iteración es:

$$q_1 = q - q_2 = q - \frac{q_1 r_2}{r_1}$$

Factorizamos q_1 :

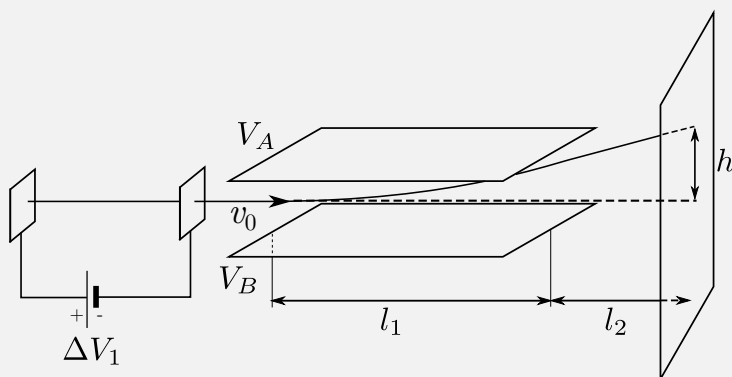
$$q_1 = \frac{q}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = q \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

En cada iteración se retira siempre la misma proporción de carga de la esfera 1 de modo que al cabo de cinco iteraciones la carga remanente en la esfera será:

$$q_1(5) = q \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)^5 = 4,46 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

22. Se dispone de un aparato para desviar iones mediante campos eléctricos. En una primera sección los iones, inicialmente en reposo, son acelerados mediante un campo eléctrico horizontal generado entre dos electrodos con una diferencia de potencial ΔV_1 entre ellos. A continuación, las partículas entran con una velocidad v_0 en una región en la que existe un campo eléctrico vertical creado por dos placas paralelas mediante una diferencia de potencial ($V_B - V_A$) entre ellas. Al salir de la zona de campo vertical, las partículas chocan contra un panel vertical. (ver figura adjunta)

El problema consiste en determinar las diferencias de potencial adecuadas para tener una desviación vertical en la pantalla de altura h . Supondremos para todo el problema que los iones que queremos desviar tienen carga q positiva y masa m , además despreciaremos el efecto de la gravedad. Calcule:



- a) La velocidad v_0 al entrar entre las placas horizontales en función de la diferencia de potencial ΔV_1 .
- b) El campo eléctrico entre las placas horizontales en función de la diferencia de potencial $\Delta V_2 = V_B - V_A$ si las placas están separadas una distancia d_1 .
- c) Sabiendo que la longitud de las placas es l_1 , calcular en función de ΔV_2 , v_0 y los parámetros del problema el ángulo α que forma la trayectoria de salida de las partículas con la horizontal.
- d) La desviación vertical h en la pantalla en función de los parámetros del problema. Demostrar que la distancia h no depende ni de la masa ni de la carga de la partícula.
- e) Si suponemos una diferencia de potencial $\Delta V_1 = 100$ V, calcule la diferencia de potencial ΔV_2 necesaria para obtener una deflexión h de 10 cm.

Datos: $l_1 = 0,5$ m, $l_2 = 1$ m, $d_1 = 10$ cm

Nota: Normalmente, debido a que las partículas cargadas tienen masas muy pequeñas, en este tipo de problemas se desprecia el efecto de la gravedad en el movimiento de la partícula.

Solución

a) Puesto que la única fuerza que está actuando es la fuerza eléctrica y sabemos que es conservativa, podemos aplicar el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad v_0 . El trabajo realizado por el campo eléctrico se transforma en energía cinética, es decir, la partícula se acelera y va ganando energía cinética a costa de perder energía potencial electrostática.

$$\Delta E_m = \Delta U_p + \Delta E_c = q\Delta V_1 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

En este caso la diferencia de potencial ΔV_1 debe ser negativa ya que la carga es positiva, es decir, la partícula se mueve de forma espontánea hacia las regiones de potencial bajo y por lo tanto $\Delta V_1 < 0$

$$-q\Delta V_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

lo cual nos proporciona:

$$v_0 = \sqrt{\frac{-2q\Delta V_1}{m}}$$

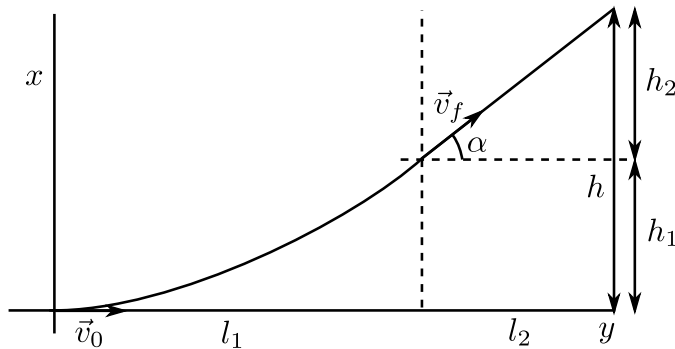
b) El campo generado por los dos planos paralelos se halla a partir de la diferencia de potencial $\Delta V_2 = V_B - V_A$:

$$E = \frac{\Delta V_2}{d_1}$$

La orientación del campo depende de qué placa tenga el mayor potencial pues el campo eléctrico siempre va de potencial mayor a menor.

c) Para obtener el ángulo de salida tenemos que calcular la trayectoria de la partícula en la zona en la que se dispone del campo eléctrico vertical uniforme (l_1).

La velocidad inicial v_0 de la partícula es perpendicular al campo eléctrico existente en esta segunda región y la aceleración de la partícula es vertical, por lo que estamos en un caso de tiro parabólico con aceleración constante. Si descomponemos la trayectoria según los ejes x e y , tenemos un movimiento rectilíneo uniforme en el eje x y rectilíneo uniformemente acelerado según el eje y .



En la figura observamos que en este caso la desviación de la partícula es hacia arriba ($a > 0$), es decir, que el campo eléctrico en esa región también apunta hacia arriba, o lo que es lo mismo $\Delta V_2 = (V_B - V_A) > 0$. Las ecuaciones del movimiento nos quedan:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

A la salida de la región donde hay campo, el vector velocidad vendrá dado por:

$$\vec{v}_f = v_0 \vec{i} + at_f \vec{j}$$

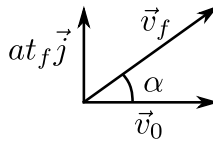
con una aceleración

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{q\Delta V_2}{md_1}$$

El tiempo t_f de recorrido se puede hallar mediante la velocidad horizontal v_0 , pues tal y como hemos dicho antes, en el eje x la partícula describe un movimiento rectilíneo uniforme.

$$t_f = \frac{l_1}{v_0}$$

Para calcular el ángulo que forma el vector velocidad de salida v_f con la horizontal podemos ayudarnos del siguiente gráfico:



El ángulo se puede obtener aplicando trigonometría al triángulo formado por el vector velocidad y sus componentes $v_x = v_0$ y $v_y = a t_f$:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a t_f}{v_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a l_1 / v_0}{v_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{q\Delta V_2 l_1}{md_1 v_0^2} \right)$$

d) Una vez que la partícula ha salido del campo eléctrico, sigue un movimiento rectilíneo uniforme hasta la pantalla vertical donde acaba impactando. La altura h se obtiene sumando las alturas h_1 y h_2 que se indican en el gráfico anterior. La altura h_1 es la altura final de la partícula cuando sale de la región delimitada por las placas horizontales, es decir, $h_1 = y(t_f)$. La altura h_2 se obtiene con el triángulo rectángulo de lado l_2 y altura h_2 , de donde deducimos $h_2 = l_2 \tan \alpha$. De este modo:

$$h = l_2 \tan \alpha + y(t_f) = l_2 \frac{q\Delta V_2 l_1}{md_1 v_0^2} + \frac{q\Delta V_2 l_1^2}{2md_1 v_0^2} = \frac{q\Delta V_2 l_1}{2md_1 v_0^2} (2l_2 + l_1)$$

Si sustituimos la velocidad inicial v_0 obtenemos:

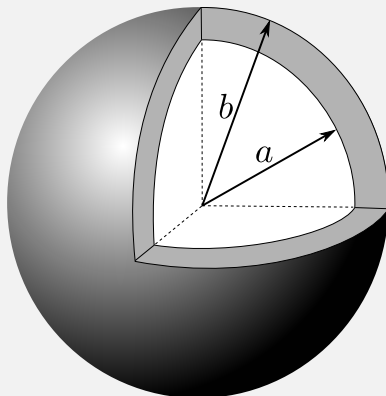
$$h = \frac{\Delta V_2 l_1}{4\Delta V_1 d_1} (2l_2 + l_1)$$

Con esta fórmula hemos demostrado que la altura h no depende de la carga ni de la masa de la partícula.

e) Calculamos ΔV_2 para obtener una deflexión de 10 cm

$$\Delta V_2 = \frac{4\Delta V_1 d_1}{l_1(2l_2 + l_1)} = 3,2 \text{ V}$$

23. Un cascarón esférico tiene radio interno a y radio externo b . Si la región $a \leq r \leq b$ tiene una densidad de carga eléctrica $\rho \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ uniformemente distribuida. Determine el campo eléctrico y el potencial para cualquier punto del espacio.



Solución

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto vamos a aprovechar la simetría esférica del problema y aplicar el teorema de Gauss. En este caso el campo eléctrico es radial y tiene valor constante $E(r)$ para cualquier punto situado a una distancia r fija.

Los tres casos importantes son:

- $r < a$ La esfera de Gauss no contiene carga ($q_{int} = 0$), por tanto:

$$\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r$$

- $a < r \leq b$ La esfera de Gauss contiene una carga interior que depende del volumen del cascarón que abarca dicha superficie:

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)\rho$$

De este modo la Ley de Gauss nos queda de la siguiente manera,

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

Usando la simetría esférica del campo eléctrico podemos hallar el resultado de la integral:

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(r)$$

Combinando ambos resultados y obtenemos:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- $r > b$ La esfera de Gauss contiene toda la carga:

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0}$$

Usando de nuevo la simetría del campo eléctrico podemos hallar:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

En este problema podemos usar el convenio del valor de potencial eléctrico nulo en el infinito: $V(\infty) = 0$ V. Para el potencial eléctrico en cualquier punto debemos proceder al revés, primero calcularemos el potencial para las partes externas para posteriormente calcularlo para las regiones internas. Procediendo de este modo aseguraremos la continuidad del potencial.

De nuevo dividimos el espacio en varias partes:

- $r > b$ El potencial es equivalente al potencial generado por una partícula puntual con una carga equivalente a la total del casquete esférico: De este modo si la carga total del casquete es:

$$Q_t = \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3}$$

el potencial eléctrico vendrá dado por:

$$V(r) = K \frac{Q_t}{r} = K \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3r} = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r}$$

- $a < r \leq b$ El potencial puede hallarse usando la definición de diferencia de potencial entre las distancias b y r al centro de la esfera y considerando la expresión del campo eléctrico que hemos obtenido en el apartado anterior para esta región. Para realizar esta integral vamos a hacer uso de una nueva variable r' que nos permite definir

$d\vec{l} = dr\vec{r}$. Esta nueva variable la usamos porque la variable r ya se ha definido como la distancia al centro del casquete.

$$V(r) - V(b) = - \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^r \frac{\rho(r'^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r'^2} dr' =$$

$$- \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r'^2}{2} + \frac{a^3}{r'} \right]_b^r = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) \right]$$

Despejamos el potencial $V(r)$:

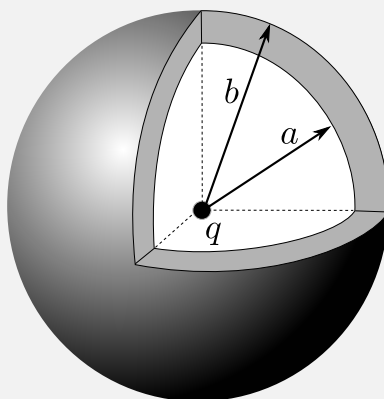
$$V(r) = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^3}{b} \right) + V(b) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} \right)$$

Donde el valor de $V(b)$ lo podemos obtener particularizando la expresión de $V(r)$ obtenida en la zona exterior al cascarón para el caso $r = b$.

- $r \leq a$ Tenemos que tener en cuenta que en esta región el campo eléctrico es nulo y por lo tanto el valor del potencial es constante en toda esta zona. Para calcular su valor simplemente debemos particularizar la expresión obtenida anteriormente para el caso $r = a$:

$$V(r) = V(a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{a} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (b^2 - a^2)$$

24. Tenemos una corteza esférica conductora de radio interno $a = 20$ cm y radio externo $b = 30$ cm cargada con una carga Q . En el centro de la corteza se sitúa una segunda carga q . Una vez alcanzado el equilibrio electrostático y sabiendo que el campo eléctrico en $r = 10$ cm vale $\vec{E}(r) = -2,7 \cdot 10^6 \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ y el potencial para $r = 40$ cm es $V(r) = -22500 \text{ V}$ (para obtener este valor se ha considerado que $V(\infty) = 0 \text{ V}$) calcule:
- Los valores de las cargas Q y q .
 - El potencial eléctrico en $r = 15$ cm.
 - El trabajo realizado por el campo eléctrico para pasar una carga $q_0 = -1 \text{ nC}$ desde $r = 25$ cm hasta $r = 40$ cm. ¿Es espontáneo el movimiento?.



Solución

a) El campo eléctrico en el interior del cascarón (para $r < a$) se debe únicamente a la carga puntual situada en el centro de la corteza. Por tanto:

$$\vec{E}(r) = \frac{Kq}{r^2} \vec{u}_r = -2,7 \cdot 10^6 \vec{u}_r \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Despejamos la carga eléctrica q :

$$q = \frac{-2,7 \cdot 10^6 \cdot (0,1)^2}{9 \cdot 10^9} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

El dato del potencial eléctrico nos permite hallar la carga de la corteza metálica, ya que dada la simetría del problema podemos considerar que

ese potencial es similar al que se generaría considerando ambas cargas como puntuales y situadas en el centro de la corteza esférica. De este modo, para todos los puntos externos a la corteza esférica ($r \geq b$) tendremos:

$$V(r) = \frac{K(Q + q)}{r}$$

Considerando el valor numérico que nos proporciona el enunciado y despejando la carga Q obtenemos:

$$Q = \frac{-22500 \cdot 0,4}{9 \cdot 10^9} - q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b) Para calcular el potencial en el interior del cascarón necesitamos primero calcular el potencial para $r = a$ y después calcular la diferencia de potencial provocada por la carga puntual en el interior. Sabiendo que en el conductor el potencial es uniforme en todo el interior tenemos $V(a) = V(b)$ y podemos deducir:

$$V(b) = V(a) = \frac{K(Q + q)}{b} = -30000 \text{ V}$$

La diferencia de potencial entre un punto a una distancia r y el radio a se debe únicamente al campo eléctrico generado por la carga puntual:

$$V(r) - V(a) = \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a}$$

Despejando $V(r)$, tenemos :

$$V(r) = V(a) + \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a} = -30000 + \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a}$$

Sustituimos para $r = 15 \text{ cm}$:

$$V(0,15) = -30000 - 180000 + 135000 = -75000 \text{ V}$$

c) Para calcular el trabajo de una partícula cargada desde $r = 25 \text{ cm}$ hasta $r = 40 \text{ cm}$ debemos calcular la diferencia de potencial entre ambos puntos. El potencial en el interior del conductor es constante y será el mismo que tome en la superficie externa $r = 30 \text{ cm}$. Únicamente necesitamos calcular la diferencia de potencial entre los radios $r = 30 \text{ cm}$ y $r = 40 \text{ cm}$:

$$V(0,4) - V(0,3) = \frac{K(Q + q)}{0,4} - \frac{K(Q + q)}{0,3} = 7500 \text{ V}$$

El trabajo buscado es por tanto:

$$W = -q_0(V(0,4) - V(0,3)) = 1 \cdot 10^{-9} \cdot 7500 = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Como el trabajo es positivo, el movimiento de la carga será espontáneo.

25. Un plano infinito se extiende sobre el plano xy y se deposita sobre este una densidad de carga $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Se sitúa otro plano cargado paralelo y 2 m por encima del primero con una densidad de carga $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Aplicando la definición de diferencial de potencial eléctrico, calcule la diferencia de potencial entre los puntos A(0,0,3) m y B(0,0,5) m.

Solución

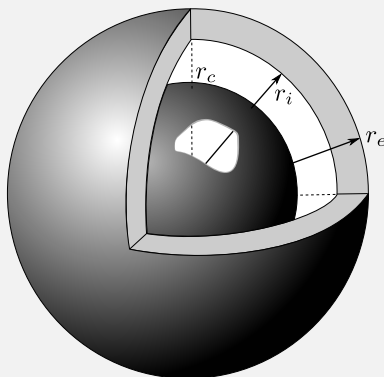
El cálculo de la diferencia de potencial entre dos puntos de coordenadas $z_A = 3 \text{ m}$ y $z_B = 5 \text{ m}$ se obtiene integrando directamente el campo. Para ello primero debemos calcular el campo eléctrico que hay en la región que se nos pide, en este caso, y como el campo está siendo generado por dos planos infinitos de densidades σ_1 y σ_2

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

Una vez obtenido el campo eléctrico, aplicamos la propia definición de diferencia de potencial entre dos puntos:

$$\begin{aligned} \Delta V = V(A) - V(B) &= - \int_{z_A}^{z_B} \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} z \right]_{z_A}^{z_B} = \\ &= - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} (z_B - z_A) = -338983 \text{ V} \end{aligned}$$

26. Una carcasa metálica neutra de radio interior $r_i = 10$ cm y de radio exterior $r_e = 15$ cm encierra una corteza esférica de radio $r_c = 5$ cm con una densidad de carga uniforme $\sigma_c = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Los centros de la carcasa y de la corteza coinciden en $O(0,0,0)$. Calcule el potencial a lo largo del semi-eje $z \geq 0$.



Solución

Para calcular el potencial para cualquier punto del eje z deberemos considerar las tres regiones en las que la carcasa divide el espacio. Comenzaremos estudiando el problema en la región externa a la carcasa puesto que vamos a considerar como referencia del potencial su valor en el infinito, el cual consideraremos nulo. $V(z \rightarrow \infty) = 0$ V.

- $z \geq 15$ cm. Para puntos externos a la carcasa, el potencial sería similar al generado por una carga puntual de valor la carga total del sistema, situada en el origen de coordenadas. Calculamos la carga total de la esfera $q = 4\pi r_c^2 \sigma = 0,1\pi \mu\text{C}$, con lo que obtenemos:

$$V_{r \geq 15 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} \text{ V}$$

- $10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}$. En esta región el campo eléctrico es nulo, por lo tanto el potencial deberá permanecer constante a lo largo de toda esta zona. Para calcular su valor numérico simplemente debemos exigir la continuidad del potencial, es decir, en esta región del espacio el potencial eléctrico toma el mismo valor que en el límite exterior de la

carcasa $z = 15$ cm:

$$V_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,15} \text{ V}$$

- $5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}$. Para calcular el potencial eléctrico en esta región podemos o bien aplicar su definición $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ e integrar entre un punto genérico de la región, r , y el borde interior del casquete esférico, o bien resolver la integral indefinida del campo y exigir la continuidad del potencial, de modo que obtengamos la constante de integración.

En este caso, y por cambiar el procedimiento seguido en otros ejercicios anteriores, aplicaremos el segundo método. Así, y teniendo en cuenta que el campo eléctrico es el generado por la corteza esférica cuya carga total hemos calculado anteriormente, la integración indefinida que tenemos es:

$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = - \int \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} + C \text{ V}$$

$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} + C \text{ V}$$

Para calcular el valor de la constante de integración, C , deberemos volver a aplicar la continuidad de la función potencial en la superficie de separación de ambas regiones, $V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}}(10 \text{ cm}) = V_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}}(10 \text{ cm})$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,1} + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,15}$$

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,1\pi \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{0,15} - \frac{1}{0,1} \right) = -\frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

Una vez calculada la constante de integración C , la expresión del potencial en esta región queda:

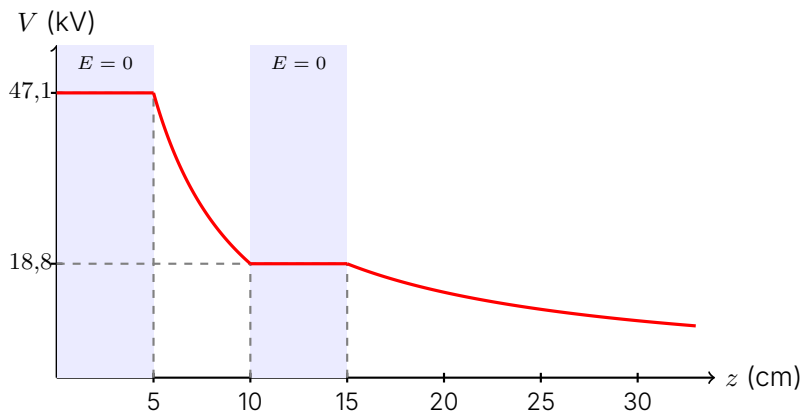
$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} - \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

- $z < 5 \text{ cm}$. Finalmente, en la última región el campo eléctrico vuelve a ser nulo y, por lo tanto, el potencial volverá a ser constante; en este caso, su valor será el mismo que toma la función potencial en la superficie externa de la esfera $z = 5 \text{ cm}$

$$V_{z \leq 5 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,05} - \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

$$V_{z \leq 5 \text{ cm}} = \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{50}{3} \right) \text{ V}$$

Como resumen podemos representar gráficamente el potencial de modo que podamos ver cómo evoluciona en función de z .

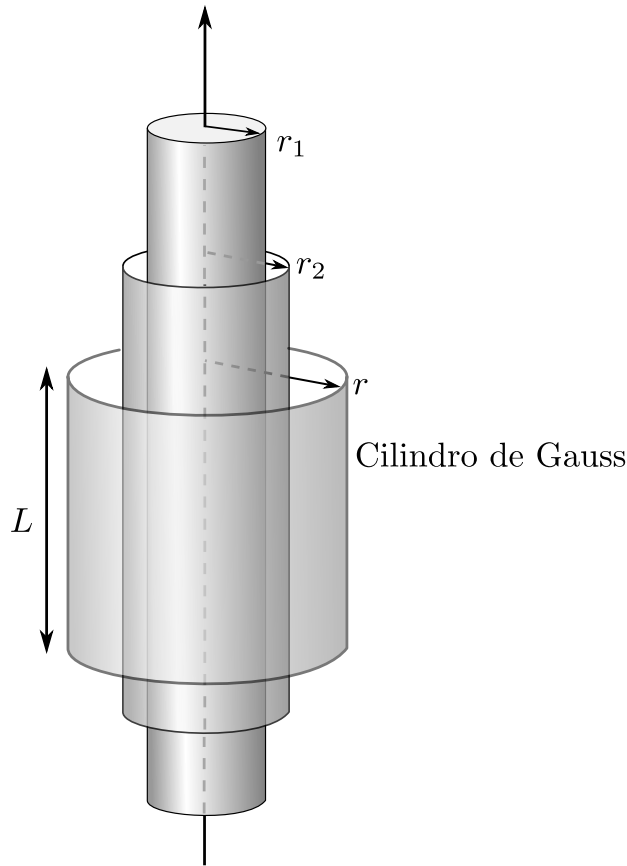


27. Consideramos dos cilindros coaxiales huecos muy largos y de radios r_1 y r_2 siendo $r_2 > r_1$. Los cilindros tienen una densidad superficial de carga uniforme σ_1 y σ_2 ambas positivas. Hallar:

- El campo eléctrico en función de la distancia al eje para todo el espacio.
- La diferencia de potencial entre los dos cilindros en función de la densidad de carga.

Solución

a) Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio deberemos dividir el problema en tres regiones. En cada una de estas regiones aplicaremos la Ley de Gauss para lo cual consideraremos como superficie gaussiana cilindros de radio arbitrario r y longitud L coaxiales con los cilindros cargados.



Tal y como se ha comentado en ejercicios anteriores, el campo eléctrico generado por un cilindro infinito es perpendicular a la superficie lateral del mismo, por lo tanto, el flujo eléctrico únicamente se produce a través de la superficie lateral de la superficie gaussiana. De modo que a la hora de aplicar la ley de Gauss, la ecuación que nos quedará es:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E S_{lateral} = E 2\pi r L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Procedamos a calcular el campo eléctrico en las diferentes regiones.

- $r < r_1$. En esta región la carga encerrada es nula y por lo tanto:

$$\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- $r_1 < r < r_2$. En la región entre los cilindros cargados la única carga interna es la que aporta el cilindro de radio r_1 .

$$\phi_e = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 2\pi r_1 L}{\varepsilon_0} = E 2\pi r L$$

Puesto que las cargas son positivas el sentido del campo eléctrico será positivo según la dirección radial, es decir:

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

- $r > r_2$ En la región externa el campo eléctrico total será la suma de los campos generados por ambos cilindros. En este caso los dos cilindros tienen carga positiva y procediendo de forma similar al caso anterior obtenemos que el campo total será:

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 r_2}{r \varepsilon_0} \right) \vec{u}_r$$

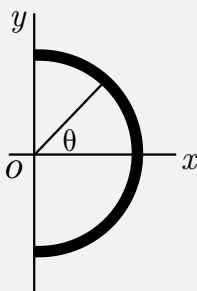
b) Para calcular la diferencia de potencial entre ambos cilindros simplemente debemos aplicar la definición de diferencia de potencial e integrar. En el caso que nos piden, el campo eléctrico que hay entre ambos cilindros únicamente es el campo generado por el cilindro de radio r_1 , por lo tanto,

$$\Delta V = V(r_2) - V(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = - \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

28. Disponemos de un semicirculo de radio a con densidad lineal de carga λ **no uniforme**:

$$\lambda(\theta) = 1 \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

Calcule el potencial producido por el semicirculo en el origen O .



Solución

Para calcular el potencial en el origen es preciso plantear una integral que va a sumar los efectos de todas las partes del aro. Un elemento de

longitud $dl = ad\theta$ del aro llevará una carga dq que dependerá del ángulo: $dq = \lambda(\theta)ad\theta$. Integramos a lo largo del aro para obtener el potencial:

$$V(0) = \int \frac{Kdq}{r} = \int_0^\pi \frac{Ka\lambda(\theta)}{a} d\theta$$

La distancia al origen de cada elemento de longitud $ad\theta$ es constante y podemos sustituir la expresión de la densidad de carga en la integral:

$$V(0) = \int_0^\pi K \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) d\theta = K \cdot 10^{-6} \frac{\pi}{2} + C \text{ V}$$

siendo C una constante de integración que dependerá de dónde tomemos el origen para la función potencial. Si consideramos que $V(\infty) = 0$, entonces $C = 0 \text{ V}$.

29. En una región del espacio el campo eléctrico viene expresado por:

$$\vec{E}(x, y, z) = 10\vec{i} + 4y\vec{j} + \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Calcular el trabajo necesario para mover una carga $Q = 0,1 \mu\text{C}$ inicialmente situada en el punto $P_0(0, 2, 0)$ m una distancia $\Delta l = 1 \text{ mm}$ según las siguientes direcciones:

- a) $\vec{i}$.
- b) $\vec{i} + \vec{j}$.
- c) $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Solución

Para calcular el trabajo que nos piden aplicaremos la definición de trabajo realizado por una fuerza:

$$W = \int_{P_0}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_0}^{P_f} Q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ahora, nos queda por determinar el trayecto de la partícula desde el punto inicial P_0 hasta el punto final P_f para cada uno de los casos propuestos.

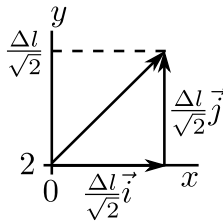
a) Primero evaluamos el elemento de trabajo dW antes de integrar:

$$dW = Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q\vec{E} \cdot dx\vec{i} = Q10dx$$

La integración es inmediata al ser la dirección a lo largo del eje x entre 0 y Δl :

$$W = Q10\Delta l = 1 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) Este segundo apartado requiere un poco más de cuidado puesto que la dirección del desplazamiento ya no sigue uno de los ejes. El punto de salida es $P_0(0, 2, 0)$ y el punto de llegada será $P_f = P_0 + \vec{r}$, siendo $\vec{r} = \Delta l \cdot \vec{u} = \Delta l(\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ el vector desplazamiento. Haciendo esta suma, obtenemos que el punto final es $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0)$.



Para calcular la integral del trabajo haremos uso del hecho de que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, y por lo tanto su integral no depende del camino seguido. En este caso integraremos primero siguiendo el eje x y luego el eje y (el lector puede comprobar que invirtiendo el orden de integración el resultado es el mismo).

Como únicamente la componente E_y del campo varía en función del punto del espacio en el que nos encontremos (en este caso solo depende de la coordenada y), podemos separar el cálculo en dos integrales independientes: una siguiendo el eje x de 0 a $\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}$ y otra siguiendo el eje y de $y = 2$ a $y = 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}$ según el eje y .

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} Q\vec{E}(x, 2, 0) \cdot \vec{i} dx + \int_2^{2+\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} Q\vec{E}(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, y, 0) \cdot \vec{j} dy = \\ &= Q \cdot [10x]_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} + Q [2y^2]_2^{2+\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} = Q\Delta l \left[\frac{10}{\sqrt{2}} + \Delta l + \frac{8}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned}$$

$$W = 1,273 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

c) Este último apartado involucra de nuevo descomponer el trayecto, esta vez en tres tramos. Por la naturaleza del campo vamos a poder integrar primero según los ejes x y z antes de integrar la componente y .

Para calcular las coordenadas del punto de llegada, primero normalizaremos el vector desplazamiento,

$$\vec{u} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{|\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

A continuación al punto inicial le sumaremos el vector unitario anterior multiplicado por el módulo del desplazamiento Δl , $P_f = P_0 + \vec{u}\Delta l$, con lo que obtenemos que el punto de llegada es $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}})$.

Tenemos ahora tres integrales, una para cada eje de coordenadas:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}(x, 2, 0) \cdot \vec{i} dx + \int_2^{2-\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, y, 0\right) \cdot \vec{j} dy \\ &\quad + \int_0^{2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, z\right) \cdot \vec{k} dz = \\ &= 10\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}Q + Q\left[4\frac{y^2}{2}\right]_2^{2-\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} + 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}Q = Q\Delta l\left[\frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{\Delta l}{3}\right] \\ W &= 1,63 \cdot 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

Otra forma de afrontar este problema es aplicar la relación:

$$W_e = -\Delta U = -Q\Delta V.$$

Para ello, lo primero que debemos hacer es obtener la función $V(x, y, z)$. Puesto que el enunciado nos da la expresión del campo eléctrico podemos aplicar $\vec{E} = -\vec{grad}(V(x, y, z))$. Para obtener V podemos proceder por integración de los polinomios verificando que se obtiene siempre la igualdad anterior. Esto nos lleva a obtener la expresión:

$$V(x, y, z) = -10x - 2y^2 - z + C$$

donde C es una constante que depende del sistema de referencia que tomemos a la hora de definir el potencial electrostático. En nuestro caso y como lo que vamos a calcular es ΔV no tiene importancia y podremos considerar que $C = 0$. Procedamos al cálculo del trabajo en cada uno de los casos propuestos:

a) Al movernos Δl según la dirección $\vec{i}$, pasamos del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f = (\Delta l, 2, 0)$, con lo que el trabajo realizado por el campo vendrá dado por:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q\Delta V = -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q(V(\Delta l, 2, 0) - V(0, 2, 0)) = \\ &= -Q((-10\Delta l - 2 \cdot 2^2 - 0) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)) = Q10\Delta l \end{aligned}$$

$$W_e = 1 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) Ahora nos movemos Δl según la dirección $(\vec{i} + \vec{j})$, pasando del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0)$. En este caso el trabajo realizado por el campo será:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q\left(V\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0\right) - V(0, 2, 0)\right) = \\ &= -Q\left(\left(-10\frac{\Delta l}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \left(2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}\right)^2 - 0\right) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)\right) \\ W_e &= 1,273 \cdot 10^{-9} \text{ J} \end{aligned}$$

c) Finalmente, nos movemos Δl según la dirección $(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$, pasando del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}})$. El trabajo realizado por el campo será:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q\left(V\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right) - V(0, 2, 0)\right) = \\ &= -Q\left(\left(-10\frac{\Delta l}{\sqrt{6}} - 2 \cdot \left(2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)\right) \\ W_e &= 1,63 \cdot 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

30. En una región del espacio el campo eléctrico viene expresado como:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= (y^2 - 2xyz^3)\vec{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\vec{j} + \\ &+ (6z^3 - 3x^2yz^2)\vec{k} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \end{aligned}$$

Calcule el trabajo necesario para mover una carga $Q = 1\mu\text{C}$ inicialmente situada en el punto $P_0(2, -1, 2)$ m hasta el punto $P_f(-1, 3, -2)$ m.

Solución

Este problema es el numéricamente más complejo de los que haremos de este estilo y por eso, a modo de resumen, lo resolveremos por dos métodos diferentes ofreciendo otras posibilidades.

Método 1 En este primer método que proponemos utilizaremos la relación que existe entre campo eléctrico y energía potencial.

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}} V(x, y, z)$$

Esto nos permite obtener la función energía potencial $V(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \rightarrow V(x, y, z) = -xy^2 + x^2yz^3 + K_1(y, z)$$

$$E_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \rightarrow V(x, y, z) = -3y - xy^2 + x^2yz^3 + K_2(x, z)$$

$$E_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \rightarrow V(x, y, z) = -\frac{3}{2}z^4 + x^2yz^3 + K_3(x, y)$$

donde $K_1(y, z)$, $K_2(x, z)$ y $K_3(x, y)$ son funciones que contienen a los elementos que no aparecen en la expresión obtenida en cada una de las integrales pero sí en alguna de las otras.

Por ejemplo, el término $-3y$ únicamente aparece en la segunda expresión pero cumple los requisitos para poder estar contenido tanto en $K_1(y, z)$ como en $K_3(x, y)$. Si esto no ocurriese nos indicaría que o bien nos hemos equivocado en los cálculos o que el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$ que nos proporcionan no es conservativo y por lo tanto no podemos calcular la función potencial correspondiente.

Aclarado este punto, obtendremos la función potencial sin más que poner los diferentes términos que hemos obtenido en las integrales anteriores.

$$V(x, y, z) = -xy^2 + x^2yz^3 - 3y - \frac{3}{2}z^4 + C$$

donde C es una constante numérica de integración que dependerá del punto que tomemos como referencia para la función potencial. En este tipo de problemas, no es importante su valor ya que lo que nos interesa calcular es la variación de potencial entre dos puntos y por lo tanto el término C nos aparecerá en ambas expresiones, por ello consideraremos $C = 0$.

Es aconsejable que una vez obtenida la función $V(x, y, z)$ se realice el camino inverso y se compruebe que al hacer su gradiente se obtiene el campo eléctrico que nos propone el enunciado.

Finalmente, con la función potencial $V(x, y, z)$ podemos calcular la energía potencial de la partícula en los puntos entre los que se va a desplazar la partícula.

$$U_0 = U(2, -1, 2) = QV(2, -1, 2) = -55 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$U_f = U(-1, 3, -2) = QV(-1, 3, -2) = -48 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Si ahora aplicamos la relación entre trabajo y energía potencial, $W = -\Delta U$

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Método 2

En este segundo método vamos a aplicar directamente la definición de trabajo realizado por una fuerza $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Además, tendremos en cuenta que el campo eléctrico $\vec{E}$ es conservativo, por lo que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica asociada es independiente del camino que sigamos. Con el objetivo de realizar un ejercicio completo proponemos dos caminos distintos y comprobaremos que el trabajo realizado en ambos casos es el mismo y es el mismo al obtenido según el método anterior.

Camino 1

En este camino que proponemos, el trayecto desde el punto $P_0(2, -1, 2)$ m, hasta el punto $P_f(-1, 3, -2)$ m, lo dividiremos en tres tramos. En el primer tramo nos desplazaremos únicamente por el eje x pasando de $P_0(2, -1, 2)$ m al punto $P_1(-1, -1, 2)$ m, a continuación, nos desplazaremos por el eje y y pasaremos de $P_1(-1, -1, 2)$ m hasta el punto $P_2(-1, 3, 2)$ m. Finalmente, nos moveremos por el eje z y pasaremos de $P_2(-1, 3, 2)$ m hasta el punto final $P_f(-1, 3, -2)$ m. La ventaja de utilizar este tipo de caminos es que al desplazarnos por un eje, por ejemplo el x los valores de las variables y y z permanecen constantes y sus diferenciales respectivos son nulos ($dy = dz = 0$).

Recapitulando la trayectoria que proponemos en este primer trayecto sería:

$$P_0(2, -1, 2) \xrightarrow[y=-1, z=2]{dy=dz=0} P_1(-1, -1, 2) \xrightarrow[x=-1, z=2]{dx=dz=0} P_2(-1, 3, 2)$$

$$P_2(-1, 3, 2) \xrightarrow[x=-1, y=3]{dx=dy=0} P_f(-1, 3, -2)$$

Procedamos al cálculo del trabajo realizado por la fuerza en cada uno de los tramos indicados

$$\begin{aligned} W_1 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_x dx = \\ &= Q \int_2^{-1} E_x(x, -1, 2) dx = Q \int_2^{-1} (y^2 - 2xyz^3) dx = \\ &= Q \int_2^{-1} ((-1)^2 - 2x(-1)2^3) dx = -27 \cdot 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_y dy = \\
&Q \int_{-1}^3 E_y(-1, y, 2) dy = Q \int_{-1}^2 (3 + 2xy - x^2 z^3) dx = \\
&Q \int_{-1}^2 (3 + 2(-1)y - (-1)^2 2^3) dx = -28 \cdot 10^{-6} \text{ J}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_z dz = \\
&Q \int_2^{-2} E_z(-1, 2, z) dz = Q \int_2^{-2} (6z^3 - 3x^2 y z^2) dx = \\
&Q \int_2^{-2} (6z^3 - 3(-1)^2 3z^2) dx = 48 \cdot 10^{-6} \text{ J}
\end{aligned}$$

Ahora únicamente nos queda sumar los trabajos en cada uno de los tramos y obtenemos el trabajo total

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = -27 \cdot 10^{-6} - 28 \cdot 10^{-6} + 48 \cdot 10^{-6} = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Este procedimiento lo podemos repetir pero cambiando el orden de los ejes por los que nos desplazamos, así otra opción sería:

$$\begin{aligned}
P_0(2, -1, 2) &\xrightarrow[x=2, z=2]{dx=dz=0} P_1(2, 3, 2) \xrightarrow[x=2, y=3]{dx=dy=0} P_2(2, 3, -2) \\
P_2(2, 3, -2) &\xrightarrow[y=3, z=-2]{dy=dz=0} P_f(-1, 3, -2)
\end{aligned}$$

O cualquiera de las otras que al lector se le ocurran (en este caso, al ser un desplazamiento de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, tenemos 6 posibles caminos).

Para cada trayectoria los trabajos pueden ser distintos, pero la suma de los trabajos siempre será la misma.

Camino 2

Tal y como hemos comentado y demostrado, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es independiente de la trayectoria seguida por la partícula desplazada. Por eso, y puesto que las trayectorias propuestas en el apartado parecen un poco "artificiales", proponemos a continuación una segunda trayectoria que parecería en un principio algo más natural: esta trayectoria es la línea recta que une ambos puntos P_0 y P_f .

Para calcular el trabajo a través de la trayectoria propuesta debemos parametrizar la recta. Para ello, calculamos el vector que une ambos

puntos al que denominaremos $\vec{v}$:

$$\vec{v} = (-3, 4, -4)$$

Con este vector ya podemos proceder a parametrizar el tramo de la recta que une ambos puntos en función de un parámetro t :

$$\vec{r} = P_0 + t\vec{v} = (2, 1, 2) + t(-3, 4, -4) \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

Esto nos permite expresar las coordenadas x , y y z en función de t , así como sus diferenciales

$$x = 2 - 3t \rightarrow dx = -3dt$$

$$y = -1 + 4t \rightarrow dy = 4dt$$

$$z = 2 - 4t \rightarrow dz = -4dt$$

Procedamos a calcular el trabajo realizado por la fuerza eléctrica al desplazar la carga Q por la recta que une ambos puntos, para lo cual en la expresión del trabajo sustituiremos las coordenadas x , y y z y sus correspondientes diferenciales por sus expresiones en función del parámetro t

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int (\vec{E}_x dx + \vec{E}_y dy + \vec{E}_z dz) = \\ &= Q \int \vec{E}_x dx + Q \int \vec{E}_y dy + Q \int \vec{E}_z dz = \\ &= Q \int_0^1 ((-1 + 4t)^2 - 2(2 - 3t)(-1 + 4t)(2 - 4t)^3) (-3)dt + \\ &+ Q \int_0^1 (3 + 2(2 - 3t)(-1 + 4t) - (2 - 3t)^2(2 - 4t)^3) 4dt + \\ &+ Q \int_0^1 (6(2 - 4t)^3 - 3(2 - 3t)^2(-1 + 4t)(2 - 4t)^2) (-4)dt = \\ &= 1\mu C \left(\frac{-11}{5} + \frac{-8}{5} + \frac{-16}{5} \right) = 1\mu C \left(\frac{-35}{5} \right) = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$