

3 CONDENSADORES

3.1 Ecuaciones relevantes.

■ Condensador.

Un condensador es un dispositivo constituido por dos conductores, uno de ellos cargado con una carga Q y el otro con $-Q$ que sirve para acumular energía. Teniendo en cuenta que entre ambos conductores hay una diferencial de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$, podemos definir la capacidad del condensador como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (3.1)$$

En el S.I. la unidad de capacidad se denomina *Faradio* [F] y su definición es $1 \text{ F} = 1 \text{ C/1 V}$.

■ Capacidad condensador plano.

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (3.2)$$

siendo ε_0 la permeabilidad eléctrica del vacío, d la distancia entre dos placas planas y paralelas que forman el condensador y A la sección de dichas placas.

■ Capacidad condensador cilíndrico.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)} \quad (3.3)$$

donde L es la longitud del condensador y r_1 y r_2 los radios de los cilindros interno y externo respectivamente que forman el condensador.

■ Capacidad condensador esférico.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (3.4)$$

en este caso r_1 y r_2 son los radios de las esferas concéntricas, interna y externa respectivamente, que forman el condensador.

■ Energía almacenada en un condensador.

La energía almacenada en un condensador es igual al trabajo que hay que realizar para cargar dicho condensador.

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (3.5)$$

La energía almacenada en un condensador es la energía almacenada por el campo eléctrico que se genera en el interior del condensador. Esto nos permite definir la densidad de energía como:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0|E^2| \quad (3.6)$$

■ Dieléctricos.

Un material dieléctrico es un material no conductor. Si el espacio entre los dos conductores que forman un condensador se rellena (total o parcialmente) con un material dieléctrico, la polarización de sus moléculas permite una mayor acumulación de carga en el condensador y por lo tanto un aumento de su capacidad.

Se define la constante dieléctrica o permitividad eléctrica relativa como $\varepsilon_r = \kappa = \varepsilon/\varepsilon_0$ siendo ε la permitividad eléctrica del medio.

De este modo la capacidad de un condensador cuya capacidad inicial es C_0 se ve multiplicada por un factor ε_r cuando el espacio entre los conductores que forman dicho conductor se rellena completamente con un material dieléctrico de capacidad relativa ε_r .

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad (3.7)$$

■ Asociación de condensadores.

- **Condensadores en serie.** Sea un conjunto de condensadores de capacidades $C_1, C_2, \dots, C_n$ la capacidad equivalente, C_{eq} , de todos ellos cuando están conectados en serie es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (3.8)$$

- **Condensadores en paralelo.** Sea un conjunto de condensadores de capacidades $C_1, C_2, \dots, C_n$ la capacidad equivalente, C_{eq} , de todos ellos cuando están conectados en paralelo es:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (3.9)$$

3.2 Ejercicios

1. Un condensador plano de placas paralelas de área 1 cm^2 y separadas $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ está conectado a una diferencia de potencial de 5 V . Desconectamos el condensador de la fuente de alimentación y le conectamos en paralelo otro condensador idéntico al primero pero con un dieléctrico entre sus placas de permitividad relativa $\epsilon_r = 10$. Calcule:

- La carga inicial del primer condensador así como su capacidad.
- La carga en cada condensador una vez conectados.
- La nueva diferencia de potencial entre las placas.

Solución

a) Aplicamos la fórmula del condensador de placas paralelas para hallar la capacidad y la carga inicial:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 8,85 \text{ pF}$$

La carga acumulada en el condensador es:

$$Q = C \cdot \Delta V_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 = 4,425 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

b) Una vez que hemos desconectado el condensador de la fuente de alimentación, conectamos el segundo condensador al primero en paralelo tal y como nos dice el enunciado. Al estar desconectados de la fuente, la carga total acumulada en ambos condensadores deberá ser igual a la carga inicial acumulada en el primer condensador, y que hemos calculado en el apartado anterior. Es decir, la carga inicial se repartirá entre ambos condensadores de modo que se cumpla con el principio de conservación de la carga.

Nuestros condensadores están conectados en paralelo y por lo tanto tendrán la misma diferencia de potencial. Por otro lado, la capacidad del segundo condensador es 10 veces superior a la capacidad del primero al tener un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 10$, por lo tanto, $C' = 10C$.

$$Q = Q_1 + Q_2 = C \cdot \Delta V_1 + C' \cdot \Delta V_1 = C(1 + 10)\Delta V_1 = C \cdot 11 \cdot \Delta V_1$$

Si despejamos ΔV_1 obtenemos

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{11 \cdot C} = \frac{C \cdot \Delta V_0}{11 \cdot C} = \frac{\Delta V_0}{11}$$

A partir de la diferencia de potencial podemos hallar la carga acumulada en cada condensador:

$$Q_1 = C \cdot \Delta V_1 = \frac{\varepsilon_0 S \Delta V_0}{11 \cdot d} = 4,02 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

$$Q_2 = C' \cdot \Delta V_1 = \frac{10 \varepsilon_0 S \Delta V_0}{11 \cdot d} = 40,2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

c) La nueva diferencia de potencial entre placas se ha calculado anteriormente:

$$\Delta V_1 = \frac{5}{11} \text{ V}$$

2. Un condensador plano, cuyas placas tienen una superficie A y se encuentran separadas por una distancia d , se carga mediante una tensión ΔV . A continuación se desconecta de la fuente de tensión y sin descargar el condensador se separan las placas hasta una distancia $3d$. Calcular:

- a) La nueva diferencia de potencial entre las placas.
- b) La nueva capacidad del condensador.
- c) La variación de energía acumulada en el condensador.

Solución

a) El condensador tiene inicialmente una capacidad C_0 que se puede expresar mediante la ecuación del condensador de placas paralelas:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

La carga acumulada una vez conectado a la diferencia de potencial es:

$$Q = C_0 \Delta V$$

Cuando se separan, la capacidad cambia pero la carga no se altera (se ha desconectado la fuente de tensión). La nueva capacidad es:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{3d} = \frac{C_0}{3}$$

y la nueva diferencia de potencial será:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C_1} = 3 \frac{Q}{C_0} = 3\Delta V$$

b) La nueva capacidad del condensador ha sido obtenida en el apartado anterior:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{3d} = \frac{C_0}{3}$$

c) La energía inicial acumulada en el condensador era:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2$$

Una vez desconectado y modificada la distancia entre sus placas, podemos relacionar la energía acumulada en el condensador con la acumulada inicialmente, teniendo en cuenta las relaciones que hemos obtenido anteriormente, de modo que:

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 \Delta V'^2 = \frac{1}{2} \frac{C_0}{3} (3\Delta V)^2 = 3U_0$$

La pregunta que nos viene a la cabeza es, ¿De dónde sale este exceso de energía? En realidad, el aumento de la distancia entre las placas es el responsable del aumento de energía acumulada y la variación de la distancia la hemos tenido que realizar nosotros desde el exterior, por lo tanto, el aumento de energía se produce porque desde el exterior le aportamos una energía al sistema al aumentar la separación entre las placas.

3. En la siguiente figura se muestra el esquema de un condensador de placas paralelas, entre las cuales se colocan dos dieléctricos diferentes. Se establece una diferencia de potencial entre ambas placas $V_b - V_a = 100$ V. Datos: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 2$, $d_1 = 0,1$ m, $d_2 = 0,15$ m.



Calcule:

- El campo eléctrico en cada dieléctrico.
- La capacidad y la carga del condensador si la superficie de las placas es $S = 10$ m².

Solución

a) Para calcular el campo eléctrico en cada zona, podemos aplicar la definición de diferencia de potencial entre placas sabiendo que el campo es uniforme en cada dieléctrico en primera aproximación (despreciamos los efectos de borde). Aplicando la definición obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = d_1 E_1 + d_2 E_2 = \\ &= V_b - V_a = 100 \text{ V}\end{aligned}$$

La segunda relación constitutiva necesaria es la dependencia lineal del campo entre placas sin dieléctrico (E_0) con los campos eléctricos en las regiones con dieléctrico (E_1 y E_2). Así, $E_1 = \varepsilon_{r1} E_0$ y $E_2 = \varepsilon_{r2} E_0$. Todo esto nos lleva a $E_1 = \varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2} E_2$.

Combinando las dos ecuaciones obtenemos los campos E_1 y E_2 :

$$\begin{aligned}d_1 E_1 + \frac{\varepsilon_{r2} E_1}{\varepsilon_{r1}} d_2 &= 100 \\ E_2 &= \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_1\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos:

$$E_1 = \frac{100\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}d_1 + d_2\varepsilon_{r2}} = 250 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{100\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}d_1 + d_2\varepsilon_{r2}} = 500 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) Para calcular la capacidad del condensador rigurosamente debemos usar la ley de Gauss aplicada en varios lugares del dieléctrico para saber cuánta carga tenemos acumulada en los planos conductores.

Sin embargo, en la situación de dieléctricos apilados como el caso presente, es posible considerar que el condensador está formado por dos condensadores independientes conectados en serie. Un condensador C_1 formado por el dieléctrico ε_{r1} y espesor d_1 y el otro con dieléctrico ε_{r2} y espesor d_2 . Las capacidades asociadas a cada uno de ellos son:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1} = \frac{\varepsilon_0S}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2} = \frac{2\varepsilon_0S}{d_2}$$

Al tener una conexión equivalente en serie, la capacidad total de la asociación se puede calcular usando la fórmula correspondiente:

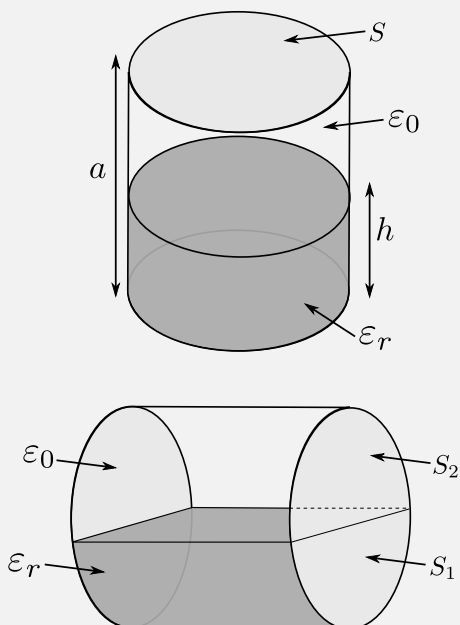
$$C_T = S \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}d_2 + \varepsilon_{r2}d_1} = \frac{2S\varepsilon_0}{2d_1 + d_2} = 5,05 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

4. Se construye un recipiente cilíndrico, con bases perfectamente conductoras y de sección S , separadas una distancia a , con paredes perfectamente aislantes y de espesor despreciable. El interior se llena hasta una altura h con un líquido dieléctrico y permitividad relativa ϵ_r (el resto se deja vacío). El recipiente se coloca en un principio con las bases dispuestas horizontalmente. En esta posición, se carga hasta que la diferencia de potencial entre las placas es ΔV_0 .

- a) Expresar la capacidad del cilindro en función de h , a y de las constantes dieléctricas.

Acto seguido se abre el circuito y, sin descargar las placas, el recipiente es girado 90° alrededor del eje horizontal.

- b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas, $\Delta V'$?



Solución

- a) El conjunto se puede considerar como un condensador de placas pa-

ralelas donde las tapas enfrentadas hacen el papel de planos paralelos. Usando esta aproximación, el condensador así formado consiste en un problema de condensador con un dieléctrico que llena parcialmente el hueco entre placas. Tenemos entonces dos dieléctricos apilados, uno de permitividad $\varepsilon_0\varepsilon_r$ y otro vacío de permitividad ε_0 . El conjunto así formado es equivalente a dos condensadores C_0 y C_1 conectados en serie: el condensador C_0 con aire entre sus placas y el condensador C_1 que contiene al dieléctrico. Los valores de las capacidades de estos condensadores son:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{(a - h)}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h}$$

Por lo tanto, la capacidad total del sistema será:

$$C_T = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r (a - h)}$$

Es útil hallar la carga del condensador para la segunda parte del problema:

$$Q = C_T \cdot \Delta V_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r (a - h)} \Delta V_0$$

b) A continuación, tumbamos el recipiente y el dieléctrico pasa a ocupar la parte inferior del volumen del depósito. Al haber desconectado el sistema de la fuente de alimentación, la carga acumulada en las placas se conservará, aunque la capacidad del condensador se verá modificada. Ahora tenemos un condensador equivalente a dos condensadores conectados en paralelo. Nos queda por determinar cuál es el volumen de cada una de las partes en la que el dieléctrico original se ha quedado dividido en la nueva posición.

Cuando el cilindro está de pie, el volumen de dieléctrico es $V = S \cdot h$. Tumbado, el dieléctrico ocupa un volumen $V = S_1 \cdot a$ con S_1 la superficie de tapa en contacto con el dieléctrico. Relacionando las dos ecuaciones anteriores obtenemos: $S_1 = S(h/a)$. La superficie de las bases que no está en contacto con el dieléctrico será $S_2 = S - S_1 = S(1 - h/a)$. Una vez obtenidas las dos superficies S_1 y S_2 , se pueden hallar las capacidades de ambas partes, siendo condensadores de placas paralelas de superficie S_1 y S_2 :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S_1}{a}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_2}{a}$$

Podemos ahora calcular la capacidad total:

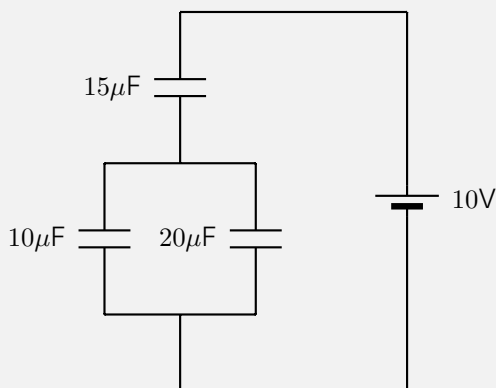
$$C'_T = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{a} \left(\varepsilon_r \frac{h}{a} + 1 - \frac{h}{a} \right)$$

La nueva diferencia de potencial entre los planos se puede hallar recordando que la carga se conserva al girar el cilindro:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C'_T} = \frac{C_T}{C'_T} \Delta V_0 = \frac{a^2 \varepsilon_r}{(h + \varepsilon_r(a - h))(a - h + \varepsilon_r h)} \Delta V_0$$

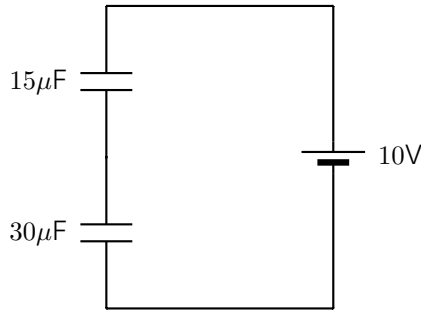
5. A partir del circuito que se muestra en la figura, calcule:

- La capacidad equivalente de la asociación de condensadores.
- La diferencia de potencial en cada condensador.
- La carga de cada condensador.



Solución

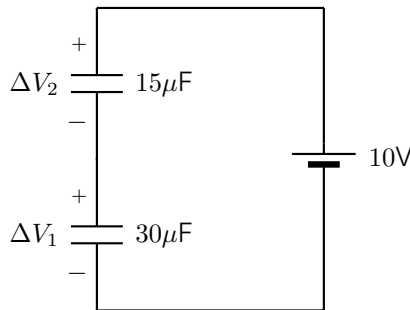
a) Para resolver este tipo de problemas, comenzaremos simplificando el circuito mediante el cálculo de los condensadores equivalentes de las distintas asociaciones que vayamos detectando. En este problema, se puede observar que los condensadores de $20\mu\text{F}$ y $10\mu\text{F}$ están conectados en paralelo y, por lo tanto, su asociación nos da un condensador equivalente de $20\mu\text{F} + 10\mu\text{F} = 30\mu\text{F}$, con lo que el circuito original se transforma en el siguiente:



En este nuevo circuito aparece una asociación en serie entre el condensador de $15\mu\text{F}$ y $30\mu\text{F}$. En este caso, el resultado de asociar estos dos elementos es:

$$\frac{1}{1/15 \cdot 10^{-6} + 1/30 \cdot 10^{-6}} = 10 \mu\text{F}$$

b) Para hallar la diferencia de potencial en cada condensador vamos primero a razonar sobre el circuito reducido siguiente:



En este circuito tenemos dos condensadores que llevan la misma carga Q al estar en serie. Podemos hallar la carga de cada uno con una simple ecuación si nos fijamos en que la suma de las diferencias de potencial de los condensadores debe ser igual a la de la fuente de alimentación, 10 V:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{30 \cdot 10^{-6}} + \frac{Q}{15 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ V}$$

El cálculo nos lleva a una carga de $Q = 100\mu\text{C}$.

Otra forma de haber obtenido el valor de la carga acumulada en estos condensadores habría sido observar que están conectados en serie y, por lo tanto, podemos calcular su capacidad equivalente sin más que

aplicar la ecuación correspondiente, obteniendo $C_{total} = 10\mu\text{F}$ y de aquí, deducir la carga acumulada en el condensador $Q = 100\mu\text{C}$.

En este caso debemos tener en cuenta que la carga que se acumula en dos condensadores conectados en serie es siempre la misma que se acumula en el condensador equivalente. La carga "no se reparte" entre ambos condensadores como en el caso de condensadores en paralelo.

Volviendo al esquema original, los dos condensadores que están conectados en paralelo tienen la misma diferencia de potencial $\Delta V_1 = Q/(30 \cdot 10^{-6})$ y suman una carga $Q = 100\mu\text{C}$. Las diferencias de potencial son entonces:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{30 \cdot 10^{-6}} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{15 \cdot 10^{-6}} = \frac{20}{3} \text{ V}$$

Tenemos ahora todas las diferencias de potencial del circuito.

c) Finalmente calculamos la carga de cada condensador:

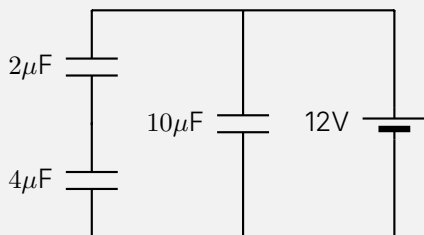
$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V_1 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{3} \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_1 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{200}{3} \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot \Delta V_2 = 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{20}{3} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

6. A partir de la figura siguiente, calcule:

- La capacidad equivalente de la asociación de condensadores.
- La diferencia de potencial en cada condensador.
- La carga de cada condensador.



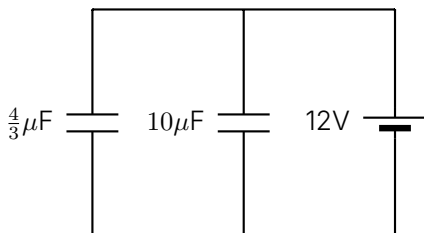
Solución

a) Para calcular la capacidad equivalente del circuito asociamos primero los dos condensadores en serie de capacidad $2\mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$:

$$C_e = \frac{1}{1/2 \cdot 10^{-6} + 1/4 \cdot 10^{-6}} = \frac{4}{3} \mu\text{F}$$

El circuito equivalente resultante tiene ahora dos condensadores en paralelo cuya capacidad equivalente será:

$$C_T = 10 \cdot 10^{-6} + \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} = \frac{34}{3} \mu\text{F}$$



b) La diferencia de potencial del condensador de $10 \mu\text{F}$ tiene una diferencia de 12 V al estar conectado al generador.

Para calcular la diferencia de potencial de los dos condensadores conectados en serie debemos considerar que ambos condensadores tienen la misma carga Q y la suma de las dos diferencias de potencial debe ser 12 V , por lo tanto tenemos la ecuación siguiente:

$$\Delta V_{2\mu\text{F}} + \Delta V_{4\mu\text{F}} = \frac{Q}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{Q}{4 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ V}$$

De esta ecuación obtenemos el valor de $Q = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$.

c) Otra forma de calcular la carga Q sería aplicando la capacidad equivalente de ambos condensadores y que hemos calculado anteriormente:

$$Q = C_e \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} 12 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

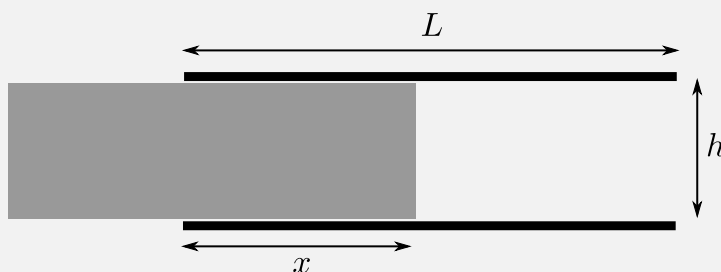
Finalmente, una vez calculada la carga acumulada en cada condensador hallamos la diferencia de potencial de cada uno de los condensadores:

$$\Delta V_{4\mu\text{F}} = \frac{Q}{4 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ V}$$

$$\Delta V_{2\mu F} = \frac{Q}{2 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ V}$$

7. Un condensador de placas cuadradas y paralelas contiene un dieléctrico de constante relativa $\varepsilon_r = 10$ insertado parcialmente tal y como se indica en la siguiente figura. Si los lados de las placas miden $L = 1 \text{ m}$ y la separación entre las placas es $h = 1 \text{ cm}$, calcule:

- La capacidad del condensador.
- La energía almacenada en el condensador en función de x suponiendo una diferencia de potencial constante ΔV entre placas.
- Suponiendo la carga almacenada como constante, si movemos el dieléctrico hacia la derecha una distancia dx , ¿cuánto vale la variación dU de energía del condensador?
- Deducir la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico.



Solución

a) El condensador puede separarse en dos zonas, una rellena con el dieléctrico y otra, la zona vacía entre las placas. En ambas regiones el campo eléctrico es aproximadamente constante y pueden tratarse por separado (despreciamos el campo cerca de la interfaz entre las dos zonas). De este modo los dos condensadores generados tienen una capacidad:

$$C_{\text{dieléctrico}}(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x L}{h}$$

$$C_{\text{vacío}}(x) = \frac{\varepsilon_0 (L - x) L}{h}$$

Queda por definir la capacidad del condensador en su conjunto. Para ello, podemos observar que la carga total de las placas es la suma de

las cargas de ambas placas:

$$Q_T = Q_{\text{vacío}} + Q_{\text{dieléctrico}}$$

Dado que los condensadores tienen la misma diferencia de potencial al estar las placas en equilibrio electrostático tenemos:

$$\begin{aligned} C_T(x) &= \frac{Q_T}{\Delta V} = \frac{Q_{\text{vacío}} + Q_{\text{dieléctrico}}}{\Delta V} = \frac{Q_{\text{vacío}}}{\Delta V} + \frac{Q_{\text{dieléctrico}}}{\Delta V} = \\ &= C_{\text{vacío}} + C_{\text{dieléctrico}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x L}{h} + \frac{\varepsilon_0 (L - x) L}{h} \end{aligned}$$

Es decir, la capacidad de este tipo de estructuras es similar a tener dos condensadores conectados en paralelo.

b) La energía del condensador depende directamente de la capacidad y de la diferencia de potencial:

$$U(x) = \frac{1}{2} C_T(x) \Delta V^2$$

c) Si movemos el dieléctrico un dx hacia la derecha, la energía del condensador varía en:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\partial C_T(x)}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\varepsilon_0 L (\varepsilon_r - 1)}{h} dx$$

d) Para este apartado conviene recordar la definición de trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento elemental $d\vec{x}$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

El objetivo es relacionar la fuerza F con la variación de energía del condensador. La variación de trabajo es menos la variación de energía potencial $dW = -dU$ y la fuerza se despeja como:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\varepsilon_0 \cdot L (\varepsilon_r - 1)}{h}$$

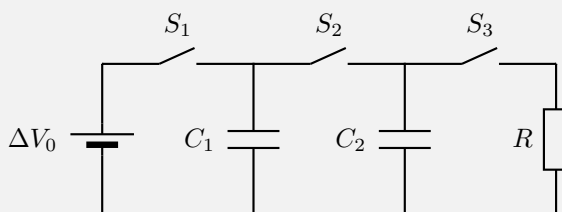
La fuerza que aparece sobre el dieléctrico es constante y tiende a tirar del dieléctrico hacia dentro del condensador.

8. Consideremos el circuito de la figura adjunta. Comenzamos cargando el condensador C_1 con el interruptor S_1 cerrado. A continuación abrimos S_1 y cerramos S_2 cargando así el condensador C_2 . S_3 permanece abierto durante todo el proceso. Datos: $\Delta V_0 = 20 \text{ V}$, $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$.

- a) Calcular la carga inicial de C_1 y la carga final de cada condensador.

A continuación cerramos el interruptor S_3 conectando los dos condensadores a la resistencia R .

- b) ¿Cuánta energía se ha disipado en la resistencia al quedarse los condensadores totalmente descargados?

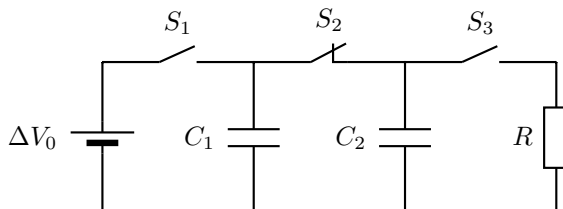


Solución

- a) Inicialmente, la carga acumulada en el condensador C_1 será:

$$Q_i = C_1 \cdot \Delta V_0 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

A continuación, se abre el interruptor S_1 y se cierra el S_2 , de modo que la batería deja de actuar y los condensadores C_1 y C_2 se conectan en paralelo.



Ahora, la carga que inicialmente estaba acumulada en el condensador C_1 y que hemos denominado Q_i pasará a repartirse entre ambos condensadores sabiendo que tienen la misma diferencia de potencial, por lo tanto:

$$\Delta V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

si además aplicamos la ecuación de conservación de la carga:

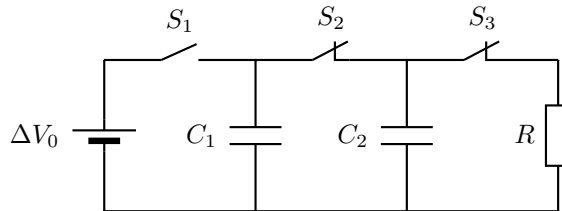
$$Q_i = Q_1 + Q_2 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver:

$$Q_1 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{(1 + C_2/C_1)} = 90 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{(1 + C_1/C_2)} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b) Finalmente, una vez conectados los condensadores a la resistencia, un proceso de descarga tiene lugar.



Durante este proceso, toda la energía almacenada por los condensadores se disipará en la resistencia mediante una corriente eléctrica. Por tanto, en base al principio de conservación de la energía, basta con calcular la energía inicial almacenada por los dos condensadores:

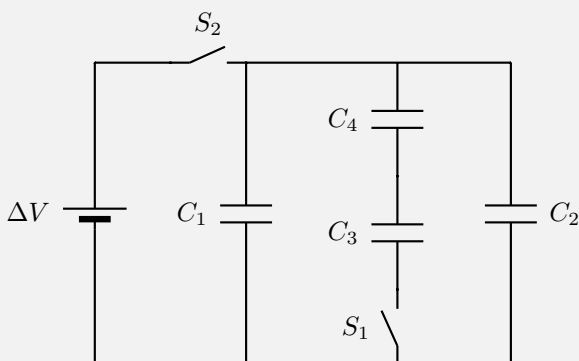
$$U_i = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

9. Se tiene el circuito que se muestra en la figura siguiente. La capacidad de los condensadores es respectivamente $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$ y $C_4 = 2 \mu\text{F}$ y la batería tiene una f.e.m de 12 V. Inicialmente el interruptor S_1 está abierto y el S_2 cerrado y todos los condensadores están descargados.

- a) Calcular la carga en cada condensador y la energía acumulada en el condensador C_1 .

A continuación se abre el interruptor S_2 y se cierra el S_1 .

- b) Calcule la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador y la carga que acumula cada condensador.



Solución

a) Con el interruptor S_1 abierto y S_2 cerrado tenemos los dos condensadores C_1 y C_2 conectados en paralelo a la fuente de tensión ΔV . En este caso los dos condensadores tienen una carga:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 48 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 24 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Nos proporciona una carga total $Q_T = 72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Para calcular la energía acumulada aplicaremos la ecuación correspondiente a cada uno de los condensadores, de este modo:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V^2 = \frac{1}{2} 4 \mu\text{F} 12^2 = 288 \mu\text{J}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V^2 = \frac{1}{2} 2 \mu F 12^2 = 144 \mu J$$

b) En la segunda parte se desconecta la fuente de tensión (se abre S_2) y se conectan otros dos condensadores (se cierra S_1). Vamos a tener una transferencia de carga entre los condensadores hasta que la diferencia de potencial en los extremos de C_1 , C_2 y la asociación C_3 con C_4 sea la misma.

Llamamos de momento C_{eq} al resultado de la asociación de C_3 y C_4 en serie:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_3 + 1/C_4} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Los tres condensadores C_1 , C_2 y C_{eq} están en paralelo y tienen la misma diferencia de potencial $\Delta V'$:

$$\Delta V' = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}}$$

La otra ecuación necesaria, relaciona la carga de cada condensador con la carga inicialmente almacenada. Por conservación de la carga, la carga inicial se ha repartido entre los tres elementos al cabo del proceso de equilibrio:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_{eq}$$

Si sustituimos en esta ecuación la carga de cada condensador en función del voltaje:

$$Q_T = C_1 \cdot \Delta V' + C_2 \cdot \Delta V' + C_{eq} \cdot \Delta V' = \Delta V' \cdot (C_1 + C_2 + C_{eq}) = 72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

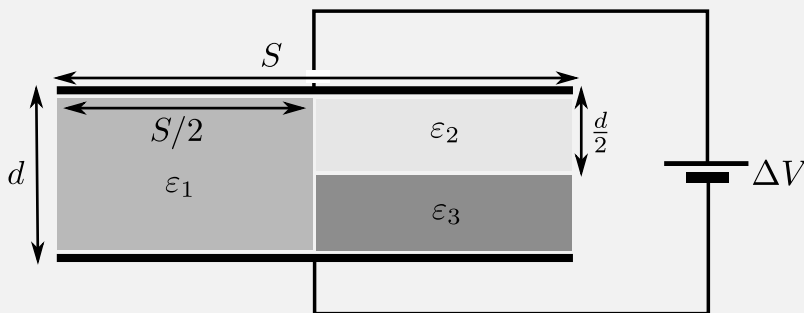
Despejando, obtenemos una diferencia de potencial $\Delta V' = 10,29 \text{ V}$. A partir de este dato podemos hallar la diferencia de potencial y la carga de cada condensador:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V' = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 41,14 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V' = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 20,58 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_{eq} = Q_3 = Q_4 = C_{eq} \cdot \Delta V' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 10,29 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

10. Se tiene un condensador plano de capacidad $C_0 = 10 \text{ pF}$ y de sección $S = 5 \text{ cm}^2$ y separación $d = 1 \text{ cm}$. Se carga mediante una batería de fuerza electromotriz $V = 12 \text{ V}$. A continuación se desconecta y se rellena con tres materiales dieléctricos de permitividades relativas: $\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 4$ y $\varepsilon_{r3} = 6$, tal y como se indica en la figura. Calcule la nueva diferencia de potencial entre las placas del condensador.



Solución

Para calcular la diferencia de potencial una vez relleno el condensador con los dieléctricos necesitamos primero calcular la capacidad del condensador modificado.

Podemos tratar de forma independiente la parte izquierda y la derecha del condensador. La razón por la que se pueden separar es porque el campo eléctrico es perpendicular a las placas en prácticamente todo el volumen. De algún modo no hay interferencia entre la parte derecha y la parte izquierda. La capacidad será entonces la suma de la capacidad de la mitad izquierda y de la mitad derecha.

Si nos fijamos en la parte izquierda, tenemos un condensador plano de superficie $S/2$ y separación entre placas d . El volumen está relleno de un dieléctrico de permitividad relativa ε_{r1} , con lo que la capacidad pasa a ser:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}{2d}$$

La mitad derecha está compuesta de dos capas de espesor $d/2$ con dieléctricos distintos. Nos limitaremos a decir aquí que equivale a poner dos condensadores en serie, cada uno con una superficie $S/2$ y de separación entre placas $d/2$. Cada uno tendrá una capacidad distinta en

función del dieléctrico, así:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}{d}$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S}{d}$$

La asociación en serie de estos dos condensadores nos da la capacidad total de la parte derecha del condensador:

$$C_d = \frac{1}{1/C_2 + 1/C_3} = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{d(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})}$$

Para terminar podemos calcular la capacidad total como:

$$C_T = C_1 + C_d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d} + \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{d(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right)$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right) = 1,50 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$