

5 GENERACIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO

5.1 Ecuaciones Relevantes.

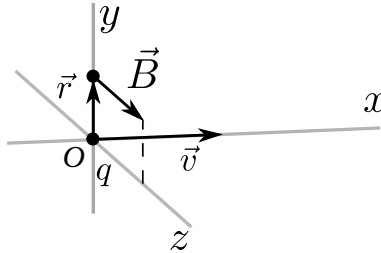
■ Campo magnético generado por una carga puntual en movimiento.

Cuando una partícula con carga q se mueve con una cierta velocidad $\vec{v}$ genera un campo magnético en el espacio que la rodea. Este campo magnético viene determinado por la siguiente ecuación:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (5.1)$$

Con $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ y $r = |\vec{r}|$, siendo $\vec{r}$ el vector que parte de la carga y finaliza en el punto donde se quiere determinar el campo magnético.

Las unidades del campo magnético en el Sistema Internacional es el *Tesla* [T], que viene definido como $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$



y la constante μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío que en unidades del Sistema Internacional tiene un valor de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$.

■ Ley de Biot y Savart.

Cuando en lugar de una única carga tenemos una corriente eléctrica I , deberemos aplicar la Ley de Biot y Savart cuya expresión para un elemento diferencial de corriente viene dada por:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (5.2)$$

Aplicando la ecuación (5.2) podemos obtener los campos generados por distintos conductores por los que circula una corriente I .

A continuación se presentan varios resultados sencillos de obtener mediante integración directa.

En ellos únicamente representamos el módulo de $\vec{B}$, y su sentido vendrá determinado por el producto $I d\vec{l} \times \vec{u}_r$. Como regla sencilla para obtener el

sentido del campo magnético aplicaremos la conocidad como regla de la mano derecha o regla del sacacorchos.

- **Campo magnético generado por una espira de radio R en su centro.**

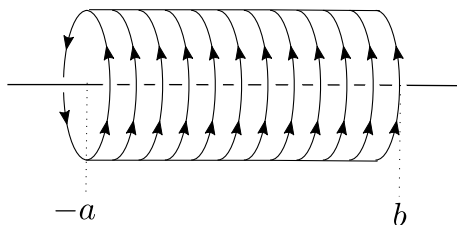
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (5.3)$$

- **Campo magnético generado por una espira de radio R en un punto de su eje longitudinal situado a una distancia x del centro de la espira.**

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (5.4)$$

Obsérvese que las expresiones (5.3) y (5.4) coinciden cuando consideramos la distancia $x = 0$.

- **Campo magnético generado por un solenoide finito en un punto de su eje.**



Si consideramos que respecto del punto del eje donde queremos calcular el campo magnético los extremos del solenoide están en los puntos $-a$ y b , el campo magnético lo podemos expresar como:

$$B = \frac{\mu_0}{2} I n \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \quad (5.5)$$

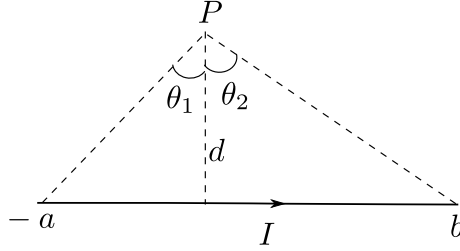
donde n es la densidad de espiras o número de espiras por unidad de longitud ($n = N/L$), L es la longitud del solenoide y N su número total de espiras.

- **Campo magnético generado por un solenoide infinito en su interior.**

$$B = \mu_0 n I \quad (5.6)$$

Podemos comprobar que las expresiones (5.5) y (5.6) coinciden cuando particularizamos la primera para el caso $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$.

- **Campo magnético generado por un conductor rectilíneo de longitud L en un punto situado a una distancia d .**



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (5.7)$$

■ **Campo magnético generado por un hilo rectilíneo infinito.**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (5.8)$$

donde d es la distancia del hilo al punto.

Podemos comprobar que las expresiones (5.7) y (5.8) coinciden cuando particularizamos la primera para el caso $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$, o cuando $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$.

■ **Campo magnético generado en el interior de un toroide de radios a y b .**

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (5.9)$$

donde N es el número de vueltas del solenoide y donde $a \leq r \leq b$.

En este caso el campo magnético generado en el interior del solenoide tiene sentido tangente a la circunferencia de centro el centro del toroide y radio r .

Fuera del toroide el campo magnético es nulo.

■ **Ley de Gauss para el magnetismo.**

De forma similar a como se definió en el capítulo 1 el flujo eléctrico ϕ_e , podemos definir el flujo magnético como una cantidad relacionada con el número de líneas de campo que atraviesan una superficie. Sin embargo a diferencia de las líneas de campo eléctrico, las líneas de campo magnético son líneas cerradas. Esto nos lleva a afirmar que el flujo magnético a través de la superficie que delimita un volumen cerrado siempre es cero.

$$\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dA = \oint_S B_n dA = 0 \quad (5.10)$$

En el Sistema Internacional la unidad del flujo magnético es el Weber [Wb] y su valor es $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

■ Ley de Ampère.

La Ley de Ampère se utiliza para calcular el campo eléctrico generado por distribuciones continuas de carga bajo unas determinadas condiciones de simetría.

En este caso, la Ley de Ampère nos permitirá calcular el campo magnético generado por corrientes continuas con un alto grado de simetría tales como el conductor rectilíneo infinito, el toroide y el solenoide infinito.

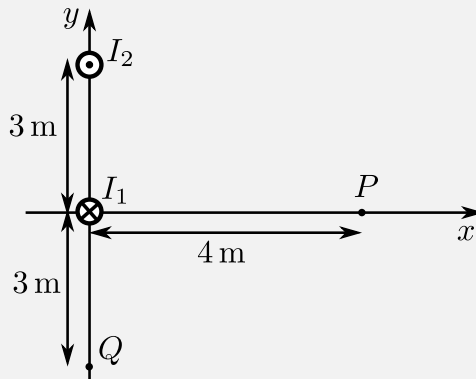
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_t dl = \mu_0 I_C \quad (5.11)$$

I_C representa la suma algebraica de las intensidades de corriente que atraviesan la superficie delimitada por la curva C . El sentido positivo para el camino de integración viene dado por la dirección de la corriente I_C de acuerdo con la regla de la mano derecha.

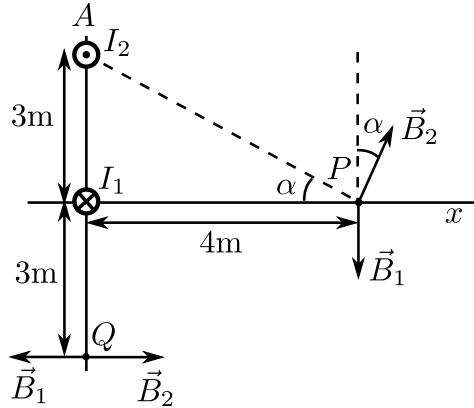
5.2 Ejercicios

1. Dos hilos conductores paralelos están situados según la dirección del eje z . El primero de ellos pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$ y por él circula una intensidad $I_1 = 3,2$ A. El segundo pasa por el punto $(0,3)$ m y por él circula una intensidad $I_2 = 5$ A. Los sentidos de ambas corrientes vienen indicados en la figura.

- a) Dibuje el campo generado por cada uno de los hilos en los puntos P y Q que se indican en la figura.
- b) Determine el valor del campo magnético total en los puntos P y Q.

**Solución**

- a) Para proceder al dibujo de los campos magnéticos generados por cada hilo, deberemos tener en cuenta la ley de Biot y Savart, según la cual el campo magnético generado por un elemento de corriente es perpendicular al plano generado por el hilo y el vector que va desde el hilo hasta el punto donde queremos calcular el campo. Teniendo en cuenta esto,



- b) Procedamos a calcular el valor de los campos en los puntos P y Q . Para ello, una vez que sabemos el sentido de cada uno de los campos, calcularemos su módulo mediante la ecuación (5.8) y los sumaremos vectorialmente.

Punto Q

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi 3}(-\vec{i}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 6}\vec{i} = -0,47 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

Punto P

En este caso lo primero que debemos hacer es la descomposición del campo $\vec{B}_2$ en sus componentes x e y , para lo cual haremos uso de las razones trigonométricas del ángulo α que hemos indicado en la figura.

$$B_{2,x} = B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{5}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{2,y} = B_2 \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Finalmente procedemos a sumar los campos, teniendo en cuenta que el campo $\vec{B}_1$ únicamente tiene componente y :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi 4}(-\vec{j}) = -\frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \vec{j}$$

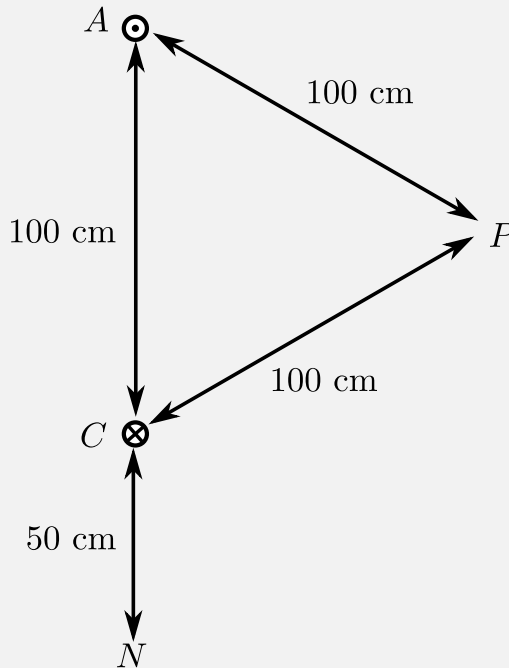
El campo total que obtendremos será:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_1 + B_{2,x}\vec{i} + B_{2,y}\vec{j}$$

$$\vec{B}_T = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \vec{i} + \left(\frac{8}{5} \cdot 10^{-7} - \frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \right) \vec{j} = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

2. Dos hilos rectilíneos, paralelos y horizontales están separados 100 cm. Por el punto A pasa una corriente $I_A = 3$ A dirigida hacia fuera del plano de la figura. Determine:

- La intensidad y el sentido de la corriente en el conductor C si el campo magnético en el punto N es nulo.
- El campo magnético en el punto P .



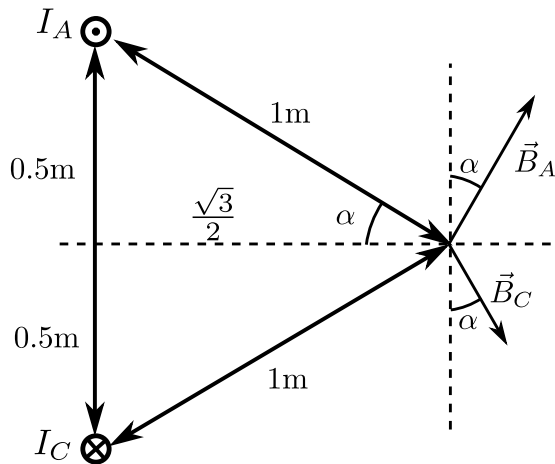
Solución

- Como queremos que el campo magnético en el punto N sea nulo, la corriente que pasa por el punto C deberá generar un campo magnético que anule el generado por la corriente I_A . Aplicando la regla de la mano derecha, el campo magnético generado por I_A tiene sentido hacia la derecha, por lo tanto, el campo generado por I_C deberá ir hacia la izquierda. I_C deberá apuntar hacia dentro del papel. Para determinar su intensidad deberemos igualar los módulos de los campos generados por ambas corrientes aplicando la

ecuación del campo de un hilo infinito (5.8).

$$B_A = B_C \rightarrow \frac{\mu_0 I_A}{2\pi d_A} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi d_C} \rightarrow \frac{\mu_0 3}{2\pi 1,5} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi 0,5} \rightarrow I_C = 1 \text{ A}$$

- b) Una vez que hemos obtenido la corriente I_C y su sentido, para calcular el campo magnético en el punto P lo primero que debemos hacer es un dibujo de los campos generados por ambas corrientes, pues esto nos facilitará la descomposición de los campos y su posterior suma.



Una vez dibujados los campos magnéticos, los descompondremos en sus componentes x e y . Para calcular sus módulos aplicaremos la ecuación (5.8).

$$B_{A,x} = B_A \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{3}{1} \frac{0,5}{1} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{A,y} = B_A \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{3}{1} \frac{\sqrt{3}/2}{1} = 3\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{C,x} = B_C \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{1} \frac{0,5}{1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{C,y} = -B_C \cos \alpha = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{1} \frac{\sqrt{3}/2}{1} = -\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Sumando las componentes x e y , obtendremos el valor total del campo en P.

$$\vec{B}_P = (4 \cdot 10^{-7} \vec{i} + 2\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \vec{j}) \text{ T}$$

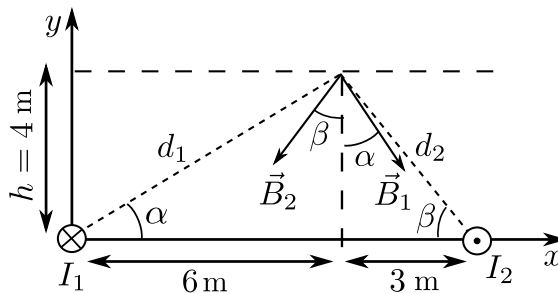
3. Dos corrientes indefinidas, I_1 e I_2 , dirigidas según el eje z cortan el plano xy por los puntos $(0, 0)$ m y $(9, 0)$ m respectivamente. La corriente I_1 lleva sentido negativo y tiene un valor de 2 amperios. Sabiendo que el campo magnético generado por ambas corrientes en el punto $(6, 4)$ m solo tiene componente según el eje y , calcule el valor y sentido de la corriente I_2 .

Solución

Para afrontar este problema lo primero que debemos hacer es un dibujo en el que se representen ambas corrientes así como los campos magnéticos que generan.

Para la corriente I_1 , dado que nos dan su sentido, el campo es sencillo de dibujar sin más que aplicar la regla de la mano derecha. Sin embargo, para determinar el sentido de la corriente I_2 , deberemos utilizar el hecho de que el campo magnético total en el punto $(6, 4)$ m solo tiene componente y y, por lo tanto, el campo magnético que genera la corriente I_2 debe tener una componente según el eje x que se oponga a la del campo magnético generado por la corriente I_1 . Con todo esto, deducimos que el sentido de la corriente I_2 debe ir en el sentido positivo del eje z o lo que es lo mismo hacia fuera del papel.

Una vez que tenemos el sentido de ambas corrientes, podemos dibujar los campos magnéticos que generan, obteniendo la siguiente figura. En esta figura se han marcado los ángulos necesarios para proceder a la descomposición de ambos campos.



Tal y como se ha comentado antes, las componentes x de ambos campos deben anularse. En este caso, el sentido de la corriente I_2 ya se ha tomado de modo que la componente del campo que genera anula la componente x del generado por I_1 , por lo tanto, lo único que tenemos

que hacer es igualar el módulo de ambas componentes. Para proceder a la descomposición de los campos magnéticos haremos uso de los ángulos y distancias que se han señalado en la figura anterior. De este modo:

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d_1} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d_1} \frac{h}{d_1}$$

$$B_{2x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{d_2} \sin \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{d_2} \frac{h}{d_2}$$

Si finalmente igualamos ambas componentes,

$$\frac{I_1}{d_1^2} = \frac{I_2}{d_2^2} \rightarrow \frac{2}{6^2 + 4^2} = \frac{I_2}{3^2 + 4^2} \rightarrow I_2 = 0,96 \text{ A}$$

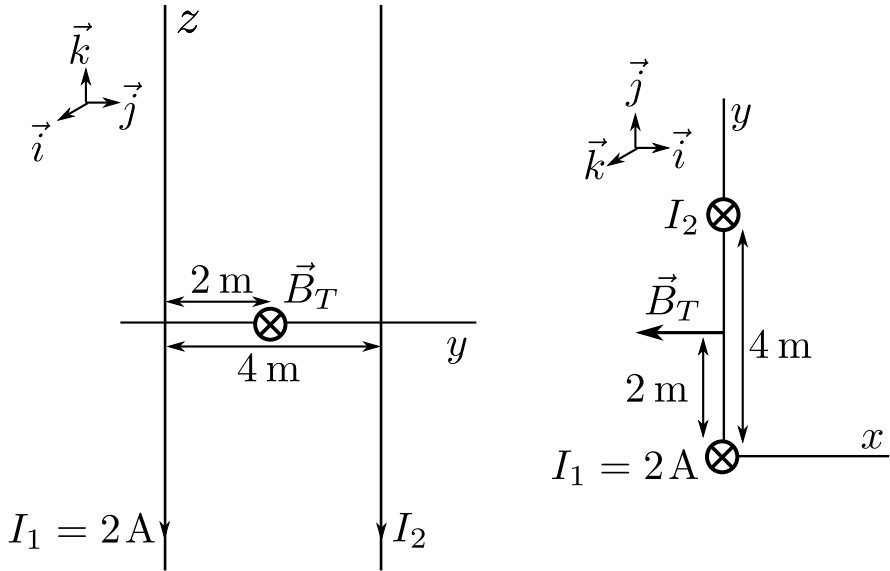
4. Se tienen dos cables rectilíneos paralelos indefinidos. El primero de ellos situado sobre el eje z es recorrido por una intensidad $I_1 = 2 \text{ A}$ en el sentido negativo del eje. El segundo hilo pasa por el punto $(0, 4, 0) \text{ m}$.

a) Calcule la intensidad que circula por este segundo hilo conductor (módulo y sentido) sabiendo que el campo magnético en el punto $(0, 2, 0) \text{ m}$ es $\vec{B}_T = -0,3\mu\text{T } \vec{i}$

b) ¿En qué punto(s) del eje y el campo magnético será nulo?

Solución

Antes de ponernos a resolver el problema es conveniente realizar un dibujo en el que se pueda apreciar de forma clara la posición de los hilos y que nos permita determinar la dirección y sentido de los campos magnéticos que estos van a generar. Cuando se hagan este tipo de dibujos es fundamental tener en cuenta que el sistema de referencia debe cumplir $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. A continuación, presentamos dos posibles esquemas válidos para la resolución del problema.



- a) Puesto que el campo magnético total en el punto (0, 2, 0) m lleva sentido $-\vec{i}$ y como la corriente I_1 situada sobre el eje z genera un campo según $\vec{i}$, esto nos lleva a deducir que la corriente I_2 , situada en el punto (0, 4, 0) m, deberá llevar sentido $-\vec{k}$ para que de este modo el campo que genere lleve sentido $-\vec{i}$.

Calculemos el valor de la intensidad de corriente que circula por el segundo conductor. Para ello aplicaremos la ecuación (5.8) a cada una de las corrientes y haremos su suma vectorial. De este modo,

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow -0,3 \cdot 10^{-6} \vec{i} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \vec{i} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2} (-\vec{i})$$

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2} = 0,3 \cdot 10^{-6} + \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \rightarrow I_2 = 5 \text{ A}$$

- b) Fijándonos en el esquema de la izquierda, observamos que a la izquierda del hilo 1 ambos campos apuntan hacia el interior del papel, mientras que a la derecha del hilo 2 ambos campos apuntan hacia fuera. Por lo tanto, el único punto del eje y en el que el campo magnético es nulo debe estar situado entre ambos hilos.

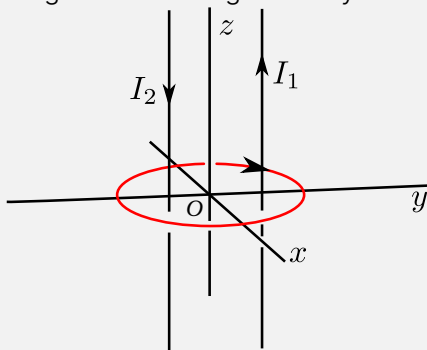
Para calcular la posición exacta, deberemos igualar los módulos de los campos generados por ambas corrientes. Si consideramos que la distancia desde el punto hasta el hilo 1 es d , la distancia desde el punto hasta el hilo 2 será $(4 - d)$. De este modo,

$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (4 - d)} \rightarrow d = \frac{8}{7} \text{ m}$$

El punto del eje y donde el campo magnético es nulo es $(0, \frac{8}{7}, 0)$ m.

5. Consideramos un trayecto orientado siguiendo un círculo de radio 10 cm centrado en el origen en el plano Oxy . La orientación del trayecto sigue el sentido horario del círculo. Tenemos un cable con corriente $I_1 = 2$ A que cruza el círculo en el sentido de los z crecientes y otro cable con corriente $I_2 = 5$ A que cruza el círculo en el sentido de los z decrecientes.

Aplicando la Ley de Ampère, calcular la circulación del campo magnético a lo largo del trayecto descrito.



Solución

Si aplicamos la Ley de Ampère al trayecto marcado, se puede obtener el resultado sin realizar la integración del campo. Sin embargo, hay que tener cuidado con la suma de las corrientes dado que la orientación del trayecto y el sentido de las corrientes influyen en el resultado.

Fijándonos en el trayecto y usando la regla de la mano derecha, podemos ver que la corriente I_2 contribuye a una suma positiva a la integral: si colocamos el pulgar en el sentido de I_2 , podemos observar que cerrando la mano el sentido descrito coincide con la orientación del trayecto. Al contrario que la corriente I_1 que restará a la integral.

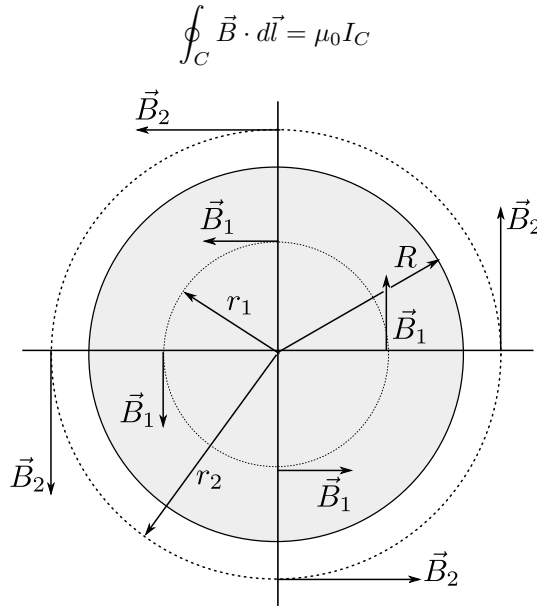
Por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_2 - I_1) = 4\pi(5 - 2) = 3,77 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m}$$

6. Obtenga la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito de radio R por el que circula una corriente I uniformemente distribuida por la sección del hilo.

Solución

Para resolver este problema aplicaremos la ley de Ampère (5.11) en dos regiones distintas, una dentro del hilo ($r < R$) y otra fuera ($r > R$). Para facilitar la comprensión del problema es útil realizar una visión frontal del hilo y tomar como superficies para aplicar Ampère dos secciones circulares centradas en el eje del hilo de radios $r_1 < R$ y $r_2 > R$. En este caso supondremos que la corriente apunta hacia nosotros, por lo tanto el campo que se genera en las circunferencias que limitan ambas superficies son tangentes a ellas tal y como se muestra en la figura adjunta.



■ $r > R$

Este caso es sencillo ya que la corriente que atraviesa la superficie de radio r_2 es toda la corriente total que transporta el hilo conductor, es decir $I_C = I$ y por lo tanto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_2 2\pi r_2 = \mu_0 I_C \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

De este modo si generalizamos a cualquier punto externo al hilo obtenemos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

■ $r < R$

Ahora la corriente que atraviesa la superficie limitada por la circunferencia de radio r_1 no es la corriente total, I , sino que es solo una proporción de esta la que nos interesa. Esta corriente I_C la podemos determinar en función de las secciones del hilo y de la superficie de radio r_1 , de este modo:

$$I_C = \frac{I}{\pi R^2} \pi r_1^2 = \frac{I r_1^2}{R^2}$$

Una vez determinada I_C aplicamos la ley de Ampère

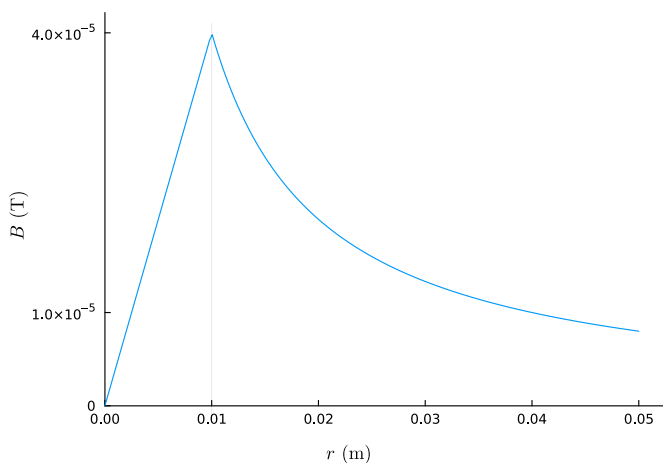
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 2\pi r_1 = \mu_0 I_C = \mu_0 \frac{I r_1^2}{R^2}$$

De este modo si generalizamos a cualquier punto interno al hilo obtenemos:

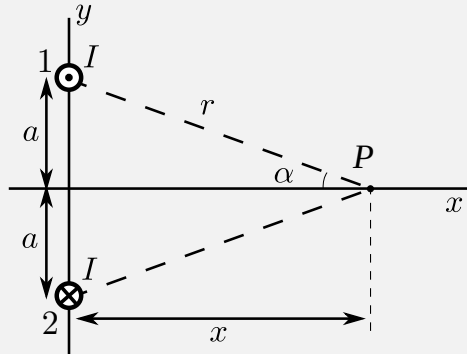
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Resumiendo, el campo magnético en el interior del hilo va aumentando su módulo de forma lineal conforme nos alejamos del eje central, mientras que una vez fuera del hilo el módulo del campo decrece como $1/r$.

A modo de ejemplo, si suponemos que por un hilo de 1 cm de radio circula una corriente de 1 amperio, la gráfica que obtenemos es la siguiente. En esta gráfica se pueden apreciar claramente las dos regiones: en el interior del hilo la intensidad del campo magnético crece de forma lineal con la distancia al centro del hilo, mientras que una vez fuera el campo decrece como $\frac{1}{r}$.



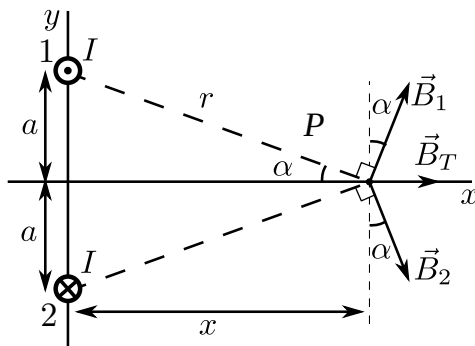
7. La figura muestra dos secciones frontales de conductores paralelos, muy largos y perpendiculares al plano xy . Cada uno de ellos transporta una corriente I , pero en sentidos contrarios, tal y como se muestra en la siguiente figura.



- Dibujar el campo magnético creado por cada uno de los conductores, así como el campo magnético resultante en el punto P.
- Hallar la expresión del módulo de B para cualquier punto del eje x , en función de la coordenada x .
- ¿Para qué valor de x B es máximo?
- Construir una gráfica que represente B en función de x .

Solución

- Aplicando la regla de la mano derecha, podemos dibujar los campos magnéticos generados por los cables 1 y 2, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ respectivamente, obteniendo la siguiente figura:



- b) Para calcular el campo magnético resultante, primero calcularemos el módulo de cada uno de los campos para posteriormente descomponerlos en sus componentes x e y y proceder a su suma. Para calcular el módulo de ambos campos magnéticos aplicaremos la fórmula de campo magnético generado por un hilo infinito:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde la distancia r se deduce directamente aplicando el teorema de Pitágoras $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. En este caso, tanto la distancia entre los conductores y el punto P como la intensidad que circula por los hilos es la misma, y por lo tanto los módulos de ambos campos serán iguales $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = B$, y su valor vendrá dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Al descomponer ambos campos en sus componentes según los ejes x e y obtendremos:

$$B_{1x} = B_{2x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}} \sin \alpha$$

$$B_{1y} = -B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}} \cos \alpha$$

Observe que las componentes según el eje y tienen igual módulo pero sentidos opuestos, lo que implica que ambas componentes se anulan mutuamente, con lo que el campo magnético total será únicamente la suma de las componentes x de ambos campos. Si además expresamos $\sin \alpha$ en función de los parámetros geométricos del problema nos queda:

$$B_T = B_{1x} + B_{2x} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{x^2 + a^2}} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi \sqrt{x^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

Dándole carácter vectorial al campo magnético resultante obtenemos:

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \vec{i}$$

- c) Para calcular el valor de x para el cual el campo magnético es máximo simplemente deberemos calcular el máximo de la función obtenida anteriormente:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \right) = -\frac{\mu_0 I a 2x}{\pi(x^2 + a^2)^2} = 0$$

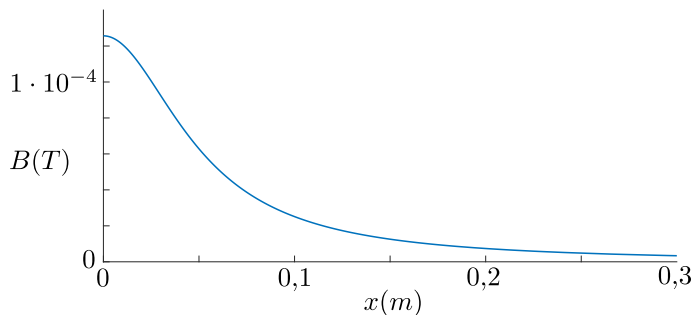
La única solución de la ecuación anterior nos lleva a obtener que el punto $x = 0$ es un punto extremal. Para saber si es máximo o mínimo debemos volver a derivar y estudiar el signo de esta derivada en dicho punto

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \right) = -\frac{2\mu_0 I a(a^2 - 3x^2)}{\pi(a^2 + x^2)^3}$$

Al sustituir $x = 0$, la expresión tiene signo negativo y por lo tanto obtenemos que el punto $x = 0$ es el punto del eje x para el cual el campo magnético alcanza su valor máximo.

A este resultado podríamos haber llegado de una forma intuitiva simplemente razonando que el módulo del campo magnético es inversamente proporcional a la distancia y el punto que se encuentra a una distancia mínima de ambos cables en este caso es el punto $x = 0$, por lo tanto si la distancia es mínima, el campo será máximo. Esto es posible hacerlo porque la distribución de los hilos es simétrica y las corrientes que circulan por ellos son iguales, en caso de no ser así deberemos proceder como se ha mostrado anteriormente.

- d) Para construir una gráfica del valor del campo magnético a lo largo del eje x deberemos hacer uso de algún programa de representación gráfica (Excel, Matlab, Mathematica, etc.). En nuestro caso presentamos la gráfica obtenida para los valores $I=5$ A, $a=5$ cm



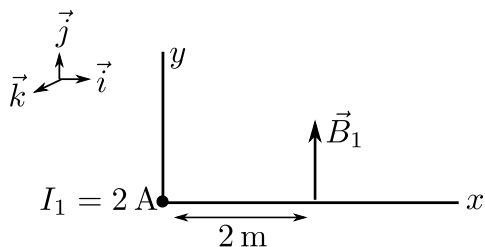
8. Sea un hilo infinito situado sobre el eje z por el que circula una corriente $I_1 = 2 \text{ A}$ en el sentido positivo de dicho eje. Calcule:

- El campo magnético que genera la corriente en el punto $(2, 0, 0) \text{ m}$.
- El punto del plano xy por el que debe pasar un segundo hilo, paralelo al anterior, por el que circula una corriente $I_2 = 3 \text{ A}$ para que el campo magnético total en el punto $(2, 0, 0) \text{ m}$ sea nulo. Considere que la corriente en este segundo hilo también lleva el sentido positivo del eje z .
- Repita los apartados anteriores para el punto $(3, 4, 0) \text{ m}$. ¿Y si la corriente en el segundo hilo llevase sentido opuesto?

Solución

- En este tipo de problemas siempre es útil realizar un esquema en el que se representen las corrientes y los campos magnéticos que estas generen teniendo cuidado de representar correctamente los sistemas de referencia.

En este ejercicio, el esquema sería el siguiente:



Para obtener el módulo del campo magnético que se nos pide aplicaremos (5.8) y su sentido vendrá dado por (5.2) o la regla de la mano derecha, de este modo obtenemos:

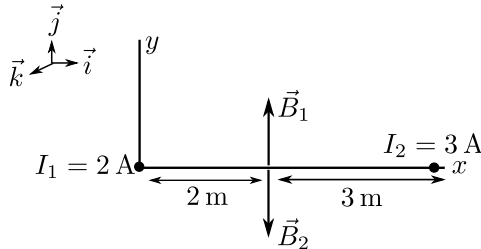
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \rightarrow \vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ T}$$

- b) Lo primero que hacemos es calcular la distancia d_2 que debe haber entre el punto (2, 0, 0) y el punto de intersección entre el plano xy y el segundo hilo. Para ello aplicamos (5.8) y exigimos que el módulo del campo generado por el segundo hilo sea igual al obtenido en el apartado anterior.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_2} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \rightarrow d_2 = 3 \text{ m}$$

Una vez obtenida esta distancia deducimos el punto de intersección que se nos pide. Para ello nos basaremos en (5.2) y en el hecho de que el campo magnético que genera la segunda corriente debe llevar sentido $-\vec{j}$. De este modo, el punto de corte deberá situarse en el eje x a la derecha del punto (2, 0, 0) y por lo tanto el punto que dista a 3 m del anterior será (5, 0, 0) m.

El esquema que representa este problema lo podemos ver en la figura siguiente:



- c) Para resolver el problema en el nuevo punto que se nos propone procederemos de modo similar. Primero calculamos el campo magnético generado por la corriente I_1 en el punto (3, 4, 0), donde $d_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 5} = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Para calcular el vector unitario en la dirección del campo debemos aplicar (5.2) donde el vector unitario de la corriente es $\vec{k}$ y $\vec{u}_r = (0,6,0,8,0)$ es el vector unitario que apunta desde el origen de coordenadas (punto del plano por el que pasa el hilo infinito 1)

al punto donde queremos calcular el campo magnético. Para calcular este vector unitario debemos utilizar los cosenos directores del vector. Con todo ello, obtenemos que el campo magnético en el punto (3, 4) m es:

$$\vec{B}_1 = 0,8 \cdot 10^{-7} (-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j}) \text{ T}$$

Por lo tanto, el campo magnético que genera el hilo 2 deberá ser:

$$\vec{B}_2 = 0,8 \cdot 10^{-7} (0,8\vec{i} - 0,6\vec{j}) \text{ T}$$

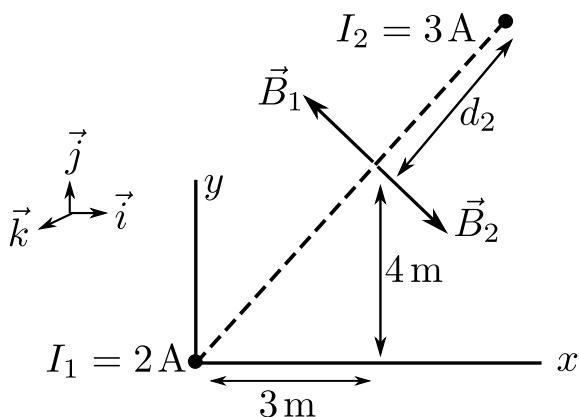
Para que la corriente I_2 genere un campo de intensidad $0,8 \text{ T}$ debe situarse a una distancia d_2 que obtenemos aplicando la ecuación (5.8)

$$B_2 = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ T} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2} \rightarrow d_2 = 7,5 \text{ m}$$

Finalmente, para calcular el punto del plano xy por el que debe pasar el segundo hilo aplicaremos (5.2) y deducimos que dicho punto debe situarse sobre la recta que une el origen de coordenadas con el punto (3, 4) a 7,5 m de dicho punto en la parte de la semirecta delimitada por el punto (3, 4, 0) y el infinito. Esta deducción del sentido del campo también lo podríamos hacer mediante la regla de la mano derecha.

$$\vec{r} = (3, 4) + 7,5 \cdot (0,6, 0,8) = (7,5, 10) \text{ m}$$

El esquema de este último apartado nos permite comprobar que nuestros razonamientos son ciertos. En muchos casos, la realización de este tipo de dibujos nos facilitan la localización de la segunda corriente.



Si el sentido de la segunda corriente fuese el opuesto, el razonamiento sería similar pero deduciríamos que el punto está situado en el tramo de la recta delimitada por el punto (3, 4) y $-\infty$, de este modo:

$$\vec{r} = (3, 4) - 7,5 \cdot (0, 6, , 0, 8) = (-1, 5, -2) \text{ m}$$

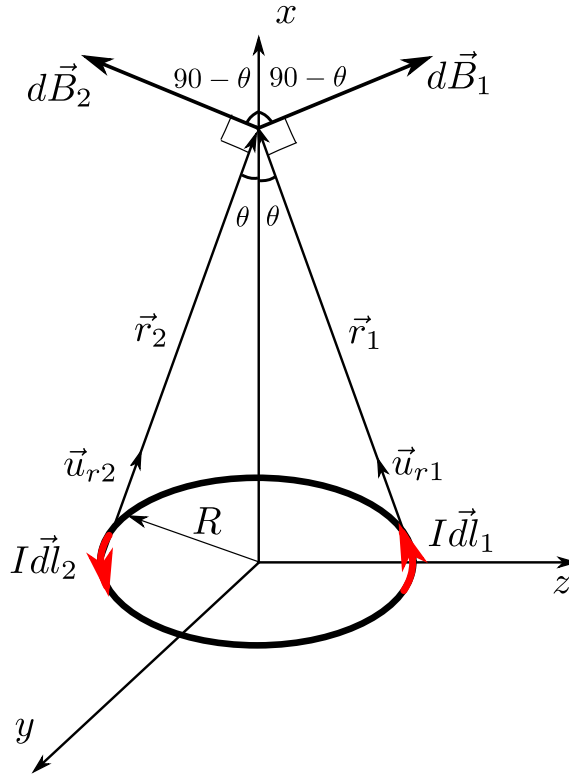
En este tipo de problemas en los que únicamente intervienen dos hilos paralelos, para que el campo resultante en un determinado punto del espacio sea nulo estos hilos y el punto en cuestión siempre deberán estar alineados sobre la misma recta.

9. Obtenga la expresión del campo magnético generado por una espira de radio R por la que circula una corriente I en un punto de su eje longitudinal situado a una distancia x del centro de la espira.

Solución

Lo primero que queremos indicar al lector es que la expresión que se pide es la fórmula (5.4).

Para proceder a la resolución de este problema, lo más conveniente es realizar un dibujo que nos permita identificar la dirección y sentido del campo magnético. Este dibujo nos va a permitir apreciar la simetría del campo magnético lo que facilitará la obtención de la expresión que se nos pide.



Si tomamos un elemento diferencial de corriente $I d\vec{l}_1$ y aplicamos la ley de Biot y Savart (5.2) obtenemos el campo $d\vec{B}_1$

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2}$$

Este campo magnético lo podemos descomponer en dos componentes: la componente según la dirección del eje x , $d\vec{B}_x$ y la componente en el plano perpendicular a la dirección x , $d\vec{B}_{yz}$. De este modo obtenemos:

$$d\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2} \cos(90 - \theta)$$

y

$$d\vec{B}_{yz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2} \sin(90 - \theta)$$

Si analizamos el esquema de la figura, podemos observar que el elemento $d\vec{l}_1$ tiene un elemento simétrico $d\vec{l}_2$ que genera un campo magnético $d\vec{B}_2$ cuya componente en el plano perpendicular a la dirección x

anula la componente del campo generada por el elemento $d\vec{l}_1$. Esto nos lleva a la simplificación del problema puesto que únicamente tenemos que calcular la componente x del campo magnético total.

$$\vec{B}_x = \int d\vec{B} \cos(90 - \theta) = \int \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}_1}{4\pi r_1^2} \cos(90 - \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{r_1^2} \sin\theta$$

La distancia desde el elemento de corriente $d\vec{l}_1$ hasta el punto donde queremos calcular, lo podemos escribir en función de su coordenada x y el radio de la espira R : $r_1 = \sqrt{x^2 + R^2}$ y de forma similar también podemos relacionar $\sin\theta = R/r$. Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación anterior obtenemos

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \sin(\theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Simplificando y teniendo en cuenta que hemos demostrado que el campo magnético total únicamente tiene componente x , podemos obtener la expresión que se nos pide:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

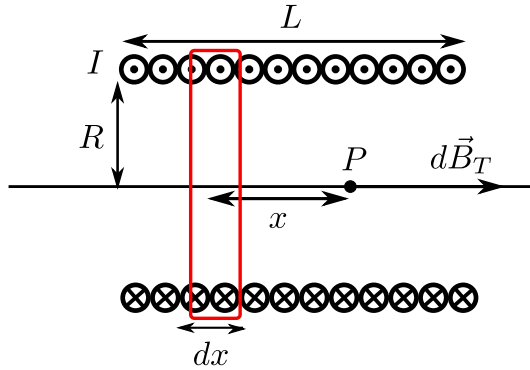
10. Obtenga la expresión del campo magnético generado por un solenoide de longitud L y N espiras de radio R por el que circula una corriente I en un punto de su eje longitudinal.

Solución

La expresión que se pide es una generalización de la fórmula (5.5) que hemos mostrado en la introducción de este capítulo.

Para proceder a la resolución de este problema, nos basaremos en la ecuación (5.4) que nos proporciona el campo magnético generado por una espira en un punto de su eje.

Para plantear el problema realizamos un dibujo en el que se representa un corte transversal del solenoide en el que se puede apreciar el sentido de la corriente en el propio solenoide. En este caso viendo el sentido de la corriente y teniendo en cuenta la regla de la mano derecha deducimos que el campo magnético en el punto P lleva sentido $+\vec{i}$ apuntando hacia la derecha como se muestra en la figura siguiente:



Tomamos un elemento diferencial de longitud dx del solenoide, observamos que contiene $n dx$ espiras, siendo n la densidad de espiras por unidad de longitud ($n = N/L$). El campo magnético generado por las espiras contenidas en este elemento diferencial de longitud lo podemos averiguar basándonos en la ecuación (5.4), y vendrá dado por la siguiente expresión:

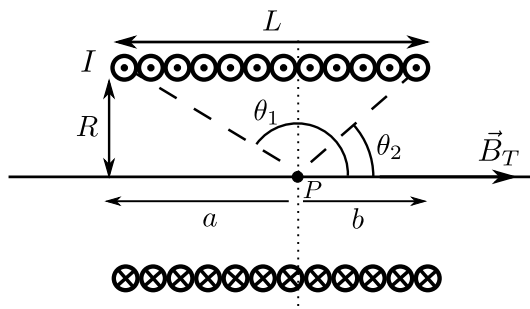
$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 n I dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{L}$$

Integrando esta expresión obtendremos el campo magnético generado por todo el solenoide.

Para realizar la integral hacemos el cambio de variable $R = x \operatorname{tg} \theta$ y tenemos en cuenta que $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$.

$$x = \frac{R}{\operatorname{tg} \theta} \rightarrow dx = \frac{-R}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

Esto nos lleva a poder expresar el dB anterior en función de la variable θ .



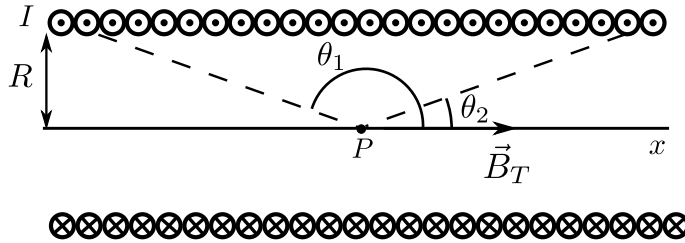
Operando e integrando, llegamos a la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Esta expresión la podemos transformar escribiendo los cosenos en función de las características físicas del solenoide. En este caso, respecto del punto P , el extremo izquierdo del solenoide está en el punto $-a$ y el extremo derecho en b , lo que nos lleva a:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} - \frac{-a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0 In}{2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

Un caso particular de este problema sería considerar que el solenoide es muy largo y que el punto P está situado en el medio del propio solenoide. Esto nos lleva a que $\theta_1 \rightarrow \pi$ y que $\theta_2 \rightarrow 0$.

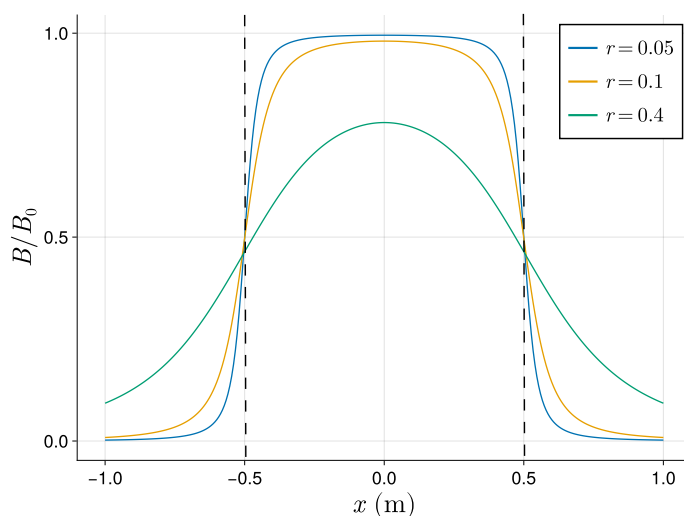


De este modo,

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = \frac{\mu_0 IN}{L} = \mu_0 nI$$

que se corresponde con la expresión del campo magnético en el interior de un solenoide infinito.

Aunque no se pide, para que el lector entienda por qué en la mayoría de los problemas directamente usamos la fórmula correspondiente al campo magnético de un solenoide infinito en lugar de particularizar la expresión que hemos obtenido, presentamos la siguiente gráfica.



En ella se representa la relación entre el campo magnético exacto en el eje de un solenoide, B , y la aproximación de solenoide infinito, $B_0 = \mu_0 n I$. Esta relación la hemos calculado para 3 solenoides distintos de longitud 1 m y de radios $r = 5$ cm, $r = 10$ cm y $r = 40$ cm. En la gráfica también se han marcado con una línea punteada vertical los puntos que se corresponderían con los extremos del solenoide.

Si analizamos los resultados comprobamos que para los valores más pequeños de los radios el valor del campo magnético permanece prácticamente constante y con un valor muy próximo al valor ideal del solenoide infinito $B/B_0 \approx 1$ siendo esta aproximación más válida cuanto más pequeño es el radio. Asimismo, podemos observar que el campo magnético decrece en el exterior del solenoide y que este decrecimiento es más pronunciado cuanto más pequeño es el radio del solenoide.

Estos resultados nos llevan a aceptar la aproximación del campo magnético generado por un solenoide infinito como opción válida para simplificar los problemas en los que aparecen campos magnéticos generados por solenoides, puesto que normalmente los radios serán mucho menores que las longitudes de los solenoides implicados.