



Universidad
Rey Juan Carlos

132 PROBLEMAS DE FÍSICA, ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

**Material
docente**



Javier Used
Alexandre Wagemakers



Esta monografía es un proyecto de la editorial Academia Abierta



Colección
Material docente

132 problemas de física, electricidad y magnetismo

Autores

Javier Used

Alexandre Wagemakers

Esta monografía ha sido publicada gracias a la financiación de la convocatoria de asignaturas en abierto promovida por la Oficina de Conocimiento y Cultura Libres de la Universidad Rey Juan Carlos.

Cómo citar

Used, J., & Wagemakers, A. (2025). *132 problemas de física, electricidad y magnetismo*. Editorial Academia Abierta. Recuperado a partir de <https://monografias.urjc.es/index.php/omp-urjc/catalog/book/45>

Depósito

Archivo abierto de la URJC (BURJC digital)

DOI: <https://doi.org/10.33732/MD-45>

© 2025. Javier Used, Alexandre Wagemakers

© De los textos: Javier Used, Alexandre Wagemakers

© De las imágenes: sus autores/as

© Imagen portada: Fabiano Rodrigues, <https://www.pexels.com/es-es/foto/galleta-de-lana-de-acero-de-fuego-1662298/>

Editorial

Academia Abierta. Servicio de Publicaciones de la URJC

C/Tulipán s/n

28933 Móstoles

<https://monografias.urjc.es/index.php/omp-urjc>

Diseño de interiores y portada

Glaux Publicaciones Académicas, SLU

Contacto editorial

Laura de la Cruz / Tomás Zarza

servicio.publicaciones@urjc.es

Algunos derechos reservados



Este documento se distribuye bajo la licencia "Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional" de Creative Commons, disponible en <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>

Si estás comenzando una carrera universitaria de ciencias o ingeniería y te toca enfrentarte a las leyes del electromagnetismo, este libro está pensado justo para ti.

Lo que tienes entre manos es, básicamente, una colección de problemas de electricidad y magnetismo resueltos. Pero no son solo las soluciones numéricas, en este libro hemos intentado desarrollarlas paso a paso, con el máximo detalle posible, como si estuvieras viendo a tu profesor en la pizarra. La idea es que puedas seguir el hilo y entiendas cada uno de los pasos que damos a la hora de resolver cada problema.

Los ejercicios seleccionados cubren prácticamente todo lo del temario que se imparte en una asignatura de física de segundo cuatrimestre en casi cualquier grado científico tecnológico. Los ejercicios han sido ordenados de menor a mayor dificultad, para que vayas cogiendo soltura poco a poco. Muchos de ellos tienen un nivel similar al que te podrías encontrar en tus exámenes.

Un consejo, si son tus primeros contactos con estos temas te recomendamos que uses este libro junto con algún otro texto de teoría. Aunque al principio de cada capítulo recordaremos brevemente algunas ideas clave para que te sitúes, no explicamos la teoría desde cero y vamos a dar por supuestos algunos conocimientos básicos, lo que nos va a permitir ahorrar explicaciones sobre la notación utilizada en las fórmulas introductorias de cada capítulo. Es por esto por lo que lo ideal es que consultes tu manual donde la teoría se exponga de forma completa. A la hora de resolver problemas de física es tan importante conocer las fórmulas utilizadas como los conceptos teóricos en los que se basan. Una comprensión completa de el por qué de las cosas es fundamental a la hora de resolver los problemas propuestos y facilitará que seas capaz de enfrentarte a nuevos retos.

Esperamos que este libro te sea de gran ayuda para entender y dominar la Electricidad y el Magnetismo.

¡Mucho ánimo!

Javier y Alexandre

ÍNDICE GENERAL

1. CAMPO ELÉCTRICO	1
• 1.1. Ecuaciones relevantes	1
• 1.2. Ejercicios	3
2. POTENCIAL	33
• 2.1. Ecuaciones relevantes.	33
• 2.2. Ejercicios	35
3. CONDENSADORES	85
• 3.1. Ecuaciones relevantes.	85
• 3.2. Ejercicios	87
4. CORRIENTE ELÉCTRICA	107
• 4.1. Ecuaciones relevantes.	107
• 4.2. Ejercicios	109
5. GENERACIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO	131
• 5.1. Ecuaciones Relevantes.	131
• 5.2. Ejercicios	135
6. FUERZAS MAGNÉTICAS	157
• 6.1. Ecuaciones Relevantes.	157
• 6.2. Ejercicios	158
7. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	187
• 7.1. Ecuaciones relevantes.	187
• 7.2. Ejercicios	189

1 CAMPO ELÉCTRICO

1.1 Ecuaciones relevantes

■ Ley de Coulomb.

Supongamos que tenemos dos cargas eléctricas q_1 y q_2 separadas una distancia d . La Ley de Coulomb nos dice que la fuerza que ejerce la carga q_1 sobre la carga q_2 viene dada por:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

donde

- $\vec{r}_{12}$ es el vector que une la carga q_1 con la carga q_2 . De este modo $d = |\vec{r}_{12}|$ es el módulo del vector que une ambas cargas.
- $\vec{u}_{12}$ es el vector unitario de q_1 a q_2 , es decir, $\vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$
- La constante K se conoce como constante de Coulomb y su valor es: $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$. Esta constante está relacionada con la permitividad eléctrica del medio en el que se encuentra inmerso nuestro sistema ϵ . Para el caso del vacío $\epsilon = \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

■ Campo Eléctrico.

Se define el campo eléctrico en un punto del espacio como la fuerza neta ejercida sobre una carga testigo positiva q_0 dividida por el valor de dicha carga q_0 .

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{q_0}}{q_0} \quad (1.2)$$

La unidad de campo eléctrico es el $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$ o el $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

■ Campo eléctrico generado por una carga puntual q .

$$\vec{E} = K \frac{q}{|\vec{d}|^3} \vec{d} = K \frac{q}{d^2} \vec{u} \quad (1.3)$$

En este caso

- $\vec{d}$ es el vector que une la carga con el punto donde queremos obtener el campo eléctrico.
- $\vec{u}$ es el vector unitario de $\vec{d}$.

■ Campo generado por un sistema de cargas puntuales.

Aplicando el Principio de Superposición, obtenemos que el campo generado por un sistema de cargas puntuales es el resultado de la suma vectorial de los campos eléctricos generados por cada una de las cargas.

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i K \frac{q_i}{d_i^2} \vec{u}_i \quad (1.4)$$

■ Campo generado por una distribución continua de carga.

$$\vec{E} = \int_V d\vec{E} = \int_V K \frac{dq}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = \int_V K \frac{dq}{r^2} \vec{u} \quad (1.5)$$

- dq es el diferencial de carga y vendrá dado por $dq = \rho dv$, siendo ρ la densidad de carga y dv el diferencial de volumen.
- $\vec{r}$ es el vector que une el diferencial de carga dq con el punto donde queremos obtener el campo eléctrico.
- $\vec{u}$ es el vector unitario de $\vec{r}$.

■ Ley de Gauss.

El flujo eléctrico ϕ_e es una magnitud matemática relacionada con el número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie orientada, $\vec{A}$. Para una superficie plana y un campo uniforme el flujo eléctrico viene definido por:

$$\phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \vec{n}A = E_n A \quad (1.6)$$

donde E_n es la componente del campo eléctrico paralela al vector unitario normal a la superficie, $\vec{n}$.

Para el caso de una superficie cerrada, se considerará el convenio de tomar el vector normal a la superficie, $\vec{n}$, dirigido hacia el exterior de la superficie en cada punto de esta. De este modo el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada vendrá dado por:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}dA = \oint_S E_n dA = E_n \oint_S dA \quad (1.7)$$

Aplicando la ecuación (1.7) llegamos a la conocida Ley de Gauss:

$$\phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}dA = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (1.8)$$

Una de las principales utilidades de la Ley de Gauss es que nos va a permitir simplificar el cálculo de los campos eléctricos generados por algunas distribuciones continuas de carga con simetrías notables:

Campo eléctrico generado por un plano infinito no conductor con densidad de carga σ .

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u} \quad (1.9)$$

Campo eléctrico generado por un hilo infinito con densidad de carga λ .

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \vec{u} \quad (1.10)$$

Veremos otros ejemplos de distribuciones en los ejercicios.

■ Campo eléctrico en conductores.

En este capítulo únicamente se van a considerar conductores en equilibrio electrostático, es decir, conductores en los cuales las cargas permanecen en "reposo". Esto nos va permitir considerar las siguientes afirmaciones:

- El campo eléctrico en el interior de un conductor es nulo ($\vec{E}_{int} = 0$).
- La carga eléctrica neta sobre un conductor reside en la superficie de dicho conductor.

1.2 Ejercicios

1. Tenemos dos cargas $q_1 = 3 \mu\text{C}$ y $q_2 = 4 \mu\text{C}$ situadas respectivamente en los puntos $(-1, 0)$ m y $(3, 0)$ m.

- ¿En qué punto o puntos (si procede) se anula el campo eléctrico?
- Calcular el campo en el punto $(0, 1)$ m.

Solución

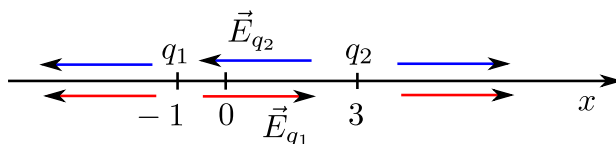
a) Lo primero de lo que debemos darnos cuenta es que el campo eléctrico solo puede anularse en el eje x . Si el lector situase una carga positiva fuera del eje x y dibujase las fuerzas que actúan sobre ella, comprobaría a simple vista que es imposible que las fuerzas se anulen. En este caso, la partícula experimentaría una fuerza que la empujaría hacia el infinito. Sin embargo, vamos a comprobar la existencia de un punto del eje x donde estas fuerzas se anulan.

Supongamos que el punto que estamos buscando tiene por coordenadas $(x, 0)$, para calcular el campo eléctrico en un punto del eje x sumamos los campos generados por las dos cargas teniendo cuidado con su

orientación.

$$\begin{aligned}\vec{E}(x) &= \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} = \frac{Kq_1}{(x - (-1))^2} \vec{u}_1 + \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} \vec{u}_2 = \\ &= \frac{Kq_1}{(x + 1)^2} \frac{(x + 1)\vec{i}}{|x + 1|} + \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} \frac{(x - 3)\vec{i}}{|x - 3|} = \vec{0}\end{aligned}$$

Una simple observación de las líneas de campo a lo largo del eje x nos permite observar que el campo eléctrico únicamente se puede anular entre los puntos de coordenadas $(-1, 0)$ m y $(3, 0)$ m. A la izquierda de $(-1, 0)$ y a la derecha de $(3, 0)$, los campos eléctricos generados por ambas cargas llevan el mismo sentido y, por lo tanto, no se pueden anular.



En este caso tenemos $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = -(x - 3)$.

Simplificando la ecuación anterior llegamos a

$$\frac{Kq_1}{(x + 1)^2} - \frac{Kq_2}{(x - 3)^2} = 0$$

Lo que nos lleva a una ecuación de segundo orden:

$$\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\right)x^2 + \left(2 + 6\frac{q_1}{q_2}\right)x + 1 - 9\frac{q_1}{q_2} = 0$$

cuyos coeficientes son:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{23}{4} = 0$$

La única solución admisible de este polinomio es $x = 0,856$ m.

Otra forma de resolver este problema sería empezando por el dibujo de las líneas de campo que hemos presentado anteriormente. El análisis de esta figura, nos ha permitido deducir que la única región en la que se puede anular el campo eléctrico es entre ambas cargas, puesto que las líneas de campo llevan sentido opuesto. Partiendo de esto, podemos obtener el punto que estamos buscando simplemente exigiendo que los módulos de ambos campos sean iguales. Por lo tanto:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \rightarrow \frac{K|q_1|}{(x)^2} = \frac{K|q_2|}{(4 - x)^2}$$

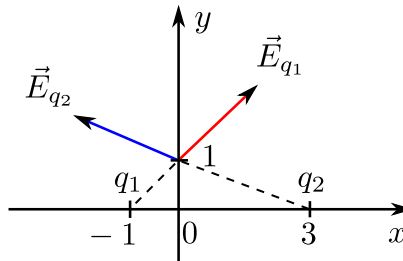
En este caso hemos definido x como la distancia desde la carga q_1 hasta el punto que estamos buscando. La distancia entre el punto y la carga q_2 será $(4 - x)$ siendo 4 la distancia total entre ambas cargas.

El desarrollo de esta ecuación nos vuelve a llevar a un polinomio de orden dos, $x^2 + 24x - 48 = 0$, cuya única solución válida es $x = 1,856\text{m}$.

Como en este caso x representaba la distancia a la carga q_1 volvemos a obtener que la solución que estábamos buscando es el punto de coordenadas $(0,856, 0)$ m.

b) Para calcular el campo eléctrico en el punto $(0, 1)$ m deberemos calcular el campo eléctrico generado por cada carga y aplicar el principio de superposición.

Las distancias entre las cargas y el punto donde queremos calcular el campo total se obtienen mediante el teorema de Pitágoras.



El campo generado por la carga q_1 es:

$$\vec{E}_{q_1} = \frac{Kq_1}{(\sqrt{2})^2} \vec{u}_1 = \frac{Kq_1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \right) = 9545,9(\vec{i} + \vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

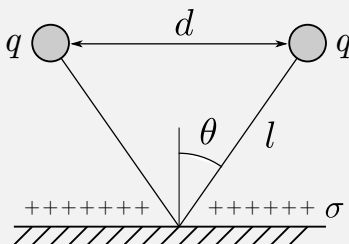
El campo generado por la carga q_2 es:

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{Kq_2}{(\sqrt{10})^2} \vec{u}_2 = \frac{Kq_2}{10} \left(\frac{-3}{\sqrt{10}} \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{j} \right) = 1138,4(-3\vec{i} + \vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Una vez que tenemos los campos $\vec{E}_{q_1}$ y $\vec{E}_{q_2}$, el campo total lo obtenemos sumando sus respectivas componentes:

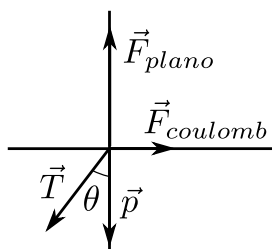
$$\vec{E}_T = 6130,6\vec{i} + 10684,3\vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

2. Dos esferas de masa $m = 1 \cdot 10^{-6}$ kg y carga $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C están atadas a un punto común mediante un hilo de masa despreciable y longitud l . Ambas cargas se encuentran en suspensión por encima de un plano cargado con densidad uniforme $\sigma = 5 \cdot 10^{-6}$ C·m⁻². Si en la situación de equilibrio, los hilos forman un ángulo $\theta = 30^\circ$ con la vertical, calcule la longitud del hilo y la tensión que este ejerce.



Solución

Las fuerzas que intervienen en este problema son, el peso de cada esfera, la fuerza eléctrica que actúa sobre cada esfera debido al campo que genera el plano, las fuerzas que se ejercen mutuamente las dos esferas y la tensión del hilo que mantiene a las esferas en contacto con el plano. En el siguiente esquema se ha representado las fuerzas que actuarían sobre la carga de la derecha de la figura del problema.



Puesto que el sistema está en equilibrio debe cumplirse $\sum_i \vec{F}_i = 0$. Si descomponemos cada una de las fuerzas que actúan sobre la esfera de la derecha, obtendremos una ecuación para cada uno de los ejes (horizontal y vertical):

$$qE_{plano} - mg - T \cos \theta = 0 \rightarrow T \cos \theta = qE_{plano} - mg$$

$$-K \frac{q^2}{d^2} + T \sin \theta = 0 \rightarrow T \sin \theta = K \frac{q^2}{d^2}$$

Teniendo en cuenta que el parámetro d es la distancia entre ambas cargas, obtenemos $d = 2l \sin \theta$, de modo que la ecuación anterior nos queda:

$$T \sin \theta = K \frac{q^2}{4l^2 \sin^2 \theta} \rightarrow T \sin^3 \theta = K \frac{q^2}{4l^2}$$

Usando la primera ecuación calculamos el valor de la tensión:

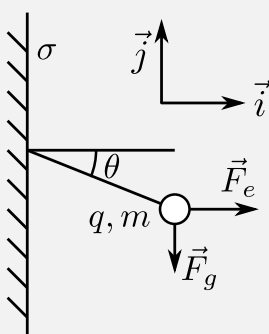
$$T = \frac{qE_{\text{plano}} - mg}{\cos \theta} = \frac{q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - mg}{\cos \theta} = 0,33 \text{ N}$$

Despejamos la longitud l de la segunda ecuación:

$$l = \sqrt{\frac{4T \sin^3 \theta}{Kq^2}} = 4,24 \text{ m}$$

3. Disponemos de un plano infinito vertical cargado con una densidad de carga σ positiva y uniforme. Una pequeña esfera de masa m con carga positiva q se encuentra atada mediante una cuerda al plano. Una vez alcanzada la situación de equilibrio, y considerando que en dicho instante la cuerda está tensa, calcule la relación entre carga y masa para que el ángulo formado entre la cuerda y la normal al plano sea $\theta = 45^\circ$.

Datos: $\sigma = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$, $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$



Solución

Para obtener un ángulo θ de 45° entre la horizontal y la cuerda necesitamos hallar una relación entre las componentes de la tensión $\vec{T}$.

Usando la condición de equilibrio entre las fuerzas, la tensión $\vec{T}$ se expresa como:

$$\vec{T} + \vec{F}_g + \vec{F}_e = 0$$

Las fuerzas conocidas son: $\vec{F}_g = -mg\vec{j}$ y $\vec{F}_e = q\vec{E} = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$.

Si ahora descomponemos la tensión $\vec{T}$ según los ejes vertical y horizontal y aplicamos la ecuación del equilibrio según estos dos ejes obtendremos:

$$-T \sin \theta + F_g = 0$$

$$-T \cos \theta + F_e = 0$$

Despejamos:

$$T \sin \theta = F_g$$

$$T \cos \theta = F_e$$

Dividiendo una ecuación por la otra desaparece la tensión T :

$$\tan \theta = \frac{F_g}{F_e} = \frac{2mg\varepsilon_0}{q\sigma}$$

Podemos despejar la relación carga masa para formar un ángulo de 45° :

$$\frac{q}{m} = \frac{2g\varepsilon_0}{\sigma \tan \theta} = 1,73 \cdot 10^{-5} \text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}$$

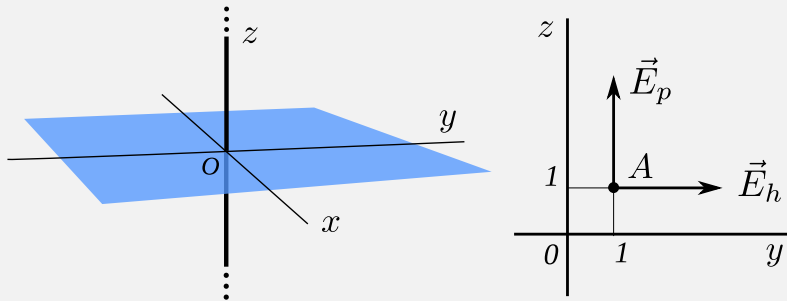
4. Una esfera de superficie S situada en el vacío contiene tres cargas eléctricas $q_1 = 1 \mu\text{C}$, $q_2 = -3 \mu\text{C}$, $q_3 = 4 \mu\text{C}$. ¿Cuánto vale el flujo eléctrico a través de dicha superficie?

Solución

La solución consiste en aplicar directamente la definición de la ley de Gauss a la superficie S : El flujo del campo eléctrico es simplemente la suma de las cargas contenidas en la esfera dividido por la constante ε_0 :

$$\phi_e = \frac{(q_1 + q_2 + q_3)}{\varepsilon_0} = 225988,7 \text{ V}\cdot\text{m}$$

5. Un plano indefinido con densidad de carga $\sigma > 0$ se encuentra en el plano xy , mientras que un hilo cargado con densidad $\lambda > 0$ se sitúa sobre el eje z tal y como se muestra en la figura. Obtenga el campo eléctrico en el punto $A(0, 1, 1)$ m.



Solución

Para solucionar el problema aplicaremos el principio de superposición. Por un lado calcularemos mediante la ecuación (1.9) el campo generado por el plano xy , $\vec{E}_p$, y por otro lado, el campo generado por el hilo, $\vec{E}_h$, mediante la ecuación (1.10).

El campo generado por el plano en el punto A es:

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

El campo generado por el hilo conductor a una distancia de 1 m del hilo es:

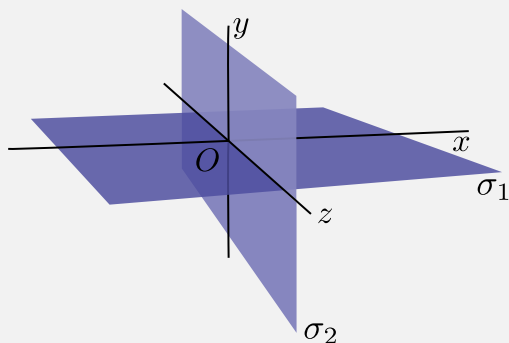
$$\vec{E}_h = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot 1} \vec{j} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

y su dirección es perpendicular al campo generado por el plano.

El campo total es la suma de estos dos campos:

$$\vec{E} = \vec{E}_h + \vec{E}_p = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot 1} \vec{j} \right) \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

6. Tenemos dos planos indefinidos situados en un sistema de coordenadas (O, x, y, z) . Uno de ellos se sitúa en el plano xz y tiene una densidad superficial de carga $\sigma_0 = -0,25 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, mientras que el otro se sitúa en el plano yz y tiene una densidad superficial de carga $\sigma_2 = -0,5 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$.



Calcular la expresión del campo eléctrico en el plano xy .

Solución

Para obtener el campo en cualquier punto del plano xy debemos descomponer el problema en cuatro zonas y hallar el campo generado por cada plano cargado en cada una de las zonas. La suma de ambas componentes nos proporcionará el campo eléctrico buscado: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

- $x > 0, y > 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{j} \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = -\frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} - \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x < 0, y > 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{j} \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (-\vec{i}) \rightarrow \vec{E}_T = -\frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} + \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x < 0, y < 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} (-\vec{j}) \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} (-\vec{i}) \rightarrow \vec{E}_T = \frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} + \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $x > 0, y < 0$:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} (-\vec{j}) \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = \frac{0,25}{2\varepsilon_0} \vec{j} - \frac{0,5}{2\varepsilon_0} \vec{i} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

7. Un hilo infinito cargado con una densidad $\lambda = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se encuentra situado a lo largo del eje x . Si una carga $q = -1 \mu\text{C}$ está situada en el punto $(0, 1, 2)$ m:

- Calcular el campo eléctrico generado por el cable en dicho punto.
- Calcular la fuerza eléctrica que actúa sobre q .

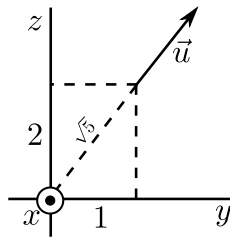
Solución

a) El campo eléctrico generado por un hilo cargado a una distancia d del propio hilo viene dado por la ecuación (1.10):

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ el vector unitario perpendicular al hilo que apunta hacia el punto donde queremos calcular el campo.

El punto $(0, 1, 2)$ m se encuentra a una distancia $d = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ m del hilo, y por lo tanto el vector unitario que indica la dirección del campo es $\vec{u} = (\vec{j} + 2\vec{k})/\sqrt{5}$.



Con estos datos, el campo se expresa como:

$$\vec{E}(d) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{5}} \frac{(\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{5}} = 7193,44(\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) La fuerza eléctrica sobre la carga q es simplemente el producto del campo por la carga:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}(d) = q \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{5}} \frac{(\vec{j} + 2\vec{k})}{\sqrt{5}} = -7,19 \cdot 10^{-3}(\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ N}$$

8. Se sitúa un electrón ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) a una cierta distancia por debajo de una lámina horizontal cargada con una densidad superficial uniforme σ . Se observa que el electrón queda estacionariamente suspendido por debajo de la placa. Teniendo en cuenta que el electrón también está sometido a la acción de la gravedad,

- Calcule el valor de la densidad de carga σ .
- Si se repite el experimento con una carga positiva de valor $q = 1 \mu\text{C}$ y masa $m = 1 \cdot 10^{-16}$ kg. ¿Cuánto vale la aceleración de la partícula en este caso?

Datos: $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

Solución

a) El enunciado nos dice que el electrón queda suspendido en equilibrio por debajo de la placa. En este instante las fuerzas que actúan sobre el electrón son el peso y la fuerza eléctrica debida a la lámina, que deberán tener sentido opuesto para que el electrón esté en equilibrio. Esto nos indica que la lámina debe tener carga positiva.

Para calcular su valor, simplemente debemos aplicar la segunda ley de Newton. En este caso, al conocer el sentido de ambas fuerzas, únicamente debemos exigir que ambos módulos sean iguales, es decir, utilizaremos el valor absoluto de la carga del electrón. El balance de fuerzas

$$\sum \vec{F} = 0 = \vec{p} + \vec{F}_e$$

nos lleva a

$$m_e g = |e| E = |e| \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

y despejamos σ

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 m_e g}{|e|} = 9,87 \cdot 10^{-22} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$$

b) Ahora las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa $m = 1 \cdot 10^{-16}$ kg y carga $1 \mu\text{C}$ llevan el mismo sentido y por lo tanto la aplicación directa de la 2ª Ley de Newton nos dará el resultado que buscamos

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{p} + \vec{F}_e = m\vec{g} + q\vec{E} = mg(-\vec{j}) + q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{j})$$

$$\vec{a} = \left(g + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 m} \right) (-\vec{j}) = -10,35\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

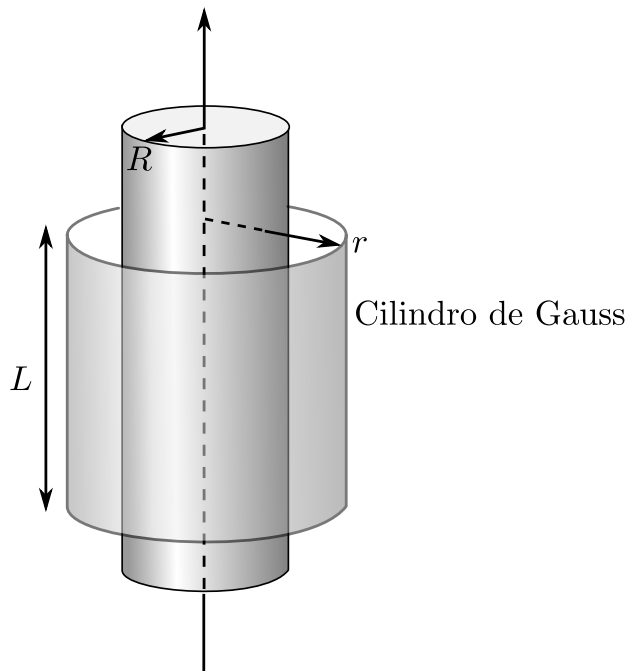
9. Dado un cilindro macizo, infinito y conductor de radio R y con densidad de carga $+\sigma$ distribuida uniformemente en la superficie. Calcule el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

Solución

El campo alrededor del cilindro macizo depende de la distancia al eje r y tiene simetría cilíndrica. Debemos diferenciar dos regiones: la externa al cilindro cargado $r > R$ y la zona interior al cilindro.

- Para $r > R$ podemos hallar el campo eléctrico aplicando el teorema de Gauss. Para ello tomaremos como superficie Gaussiana un cilindro de radio r y altura L que comparta el eje con el cilindro cargado, tal y como se muestra en la figura:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



$$E(r)2\pi rL = \frac{\sigma 2\pi RL}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- Para $r < R$ tenemos un campo nulo, $\vec{E}(r) = 0$ dado que nos encontramos dentro del cilindro conductor en equilibrio electrostático y por lo tanto toda la carga se encuentra sobre la superficie.

10. Un plano infinito se extiende sobre el plano xy y se deposita sobre este una densidad de carga $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Se sitúa otro plano cargado paralelo al primero y 2 m por encima de este. El segundo plano tiene una densidad de carga $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Calcule el campo eléctrico en los puntos A(0,0,-1), B(0,0,0.5) y C(0,0,3). Las coordenadas están en metros.

Solución

Tenemos dos planos paralelos con cargas diferentes. Para poder calcular el campo en los puntos A, B y C tenemos que descomponer el espacio en tres zonas: para $z < 0$, $0 < z < 2$ y $2 < z$.

En cada una de estas zonas tenemos que aplicar el principio de superposición sabiendo que cada plano genera el siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

El campo generado por el plano situado en $z = 2$ m es:

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z > 2 \\ -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} & \text{para } z < 2 \end{cases}$$

Podemos ahora expresar el campo en los tres puntos sin dificultad teniendo cuidado en conservar los signos de las densidades de carga σ_1 y σ_2 a la hora del cálculo numérico:

- para $z < 0$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = -169491,5 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

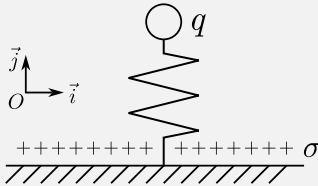
- para $0 < z < 2$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = 395480,2 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- para $z > 2$

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = 169491,5 \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

11. Consideramos un plano infinito cargado con una densidad de carga superficial $\sigma > 0$. Por encima del plano colocamos un objeto cargado con carga q positiva y masa m . El objeto está unido al plano mediante un muelle de constante elástica k . Calcular la elongación del muelle en función de las constantes del problema. Considere el efecto de la gravedad en este problema.



Solución

El plano produce un campo eléctrico perpendicular a él mismo, en este caso como la partícula está situada por encima del plano, el campo eléctrico en el punto donde está situada la partícula llevará sentido $\vec{j}$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{j}$$

Una vez en equilibrio, la carga está sometida a la fuerza generada por el campo eléctrico, $\vec{F}_e$, a la fuerza de la gravedad, $\vec{F}_g$, y a la fuerza recuperadora del muelle, $\vec{F}_m$, de tal modo que la fuerza neta es nula:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m + \vec{F}_g = 0 \rightarrow qE - k\Delta x - mg = 0$$

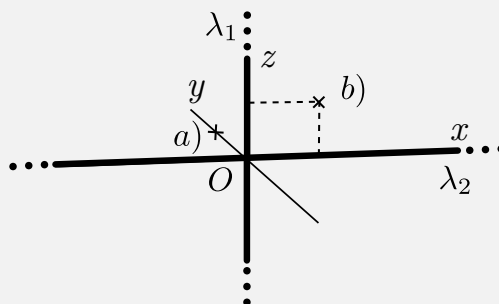
La elongación del muelle es entonces:

$$\Delta x = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 k} - \frac{mg}{k}$$

12. Un cable infinito con densidad de carga uniforme $\lambda_1 = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se encuentra situado a lo largo del eje z . Un segundo cable con densidad $\lambda_2 = -1 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ se dispone perpendicularmente al primero a lo largo del eje x . Hallar el campo eléctrico en los puntos siguientes:

a) (0,1,0) m.

b) (1,0,1) m.



Observe el lector que en el esquema del problema el sistema de referencia se ha tomado de tal manera que el sentido positivo del eje y está orientado hacia dentro del papel.

Solución

a) En este problema debemos aplicar el principio de superposición calculando el campo generado por cada cable por separado.

El campo eléctrico generado por el cable 1 en el punto a) es:

$$\vec{E}_1^a = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^a} \vec{j}$$

con $d_1^a = 1$ m la distancia del punto a) al cable.

En el punto b) tenemos:

$$\vec{E}_1^b = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^b} \vec{i}$$

siendo $d_1^b = 1$ m la distancia del punto b) al cable.

Analizamos ahora el campo creado por el segundo cable dispuesto a lo largo del eje x :

$$\vec{E}_2^a = \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^a} \vec{j}$$

$$\vec{E}_2^b = \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^b} \vec{k}$$

con $d_2^a = 1 \text{ m}$ y $d_2^b = 1 \text{ m}$.

Terminamos el cálculo sumando las dos contribuciones en cada punto:

$$\vec{E}^a = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^a} \vec{j} + \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^a} \vec{j} = \left(\frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} - \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \right) \vec{j} = \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi} \right) \vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$\vec{E}^b = \frac{\lambda_1}{2\pi d_1^b} \vec{i} + \frac{\lambda_2}{2\pi d_2^b} \vec{k} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \vec{i} - \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1} \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

13. Dos planos infinitos, cargados homogéneamente con densidades superficiales de carga $\sigma_1 = 4 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ y $\sigma_2 = 2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ están situados paralelamente entre sí y separados una distancia de 1 m. Calcular el campo eléctrico creado por esta distribución en un punto cualquiera del espacio.

Solución

Para proceder a la resolución del problema supondremos que ambos planos infinitos están situados de forma paralela al plano xy . De este modo, puesto que el campo eléctrico generado por un plano infinito lleva dirección perpendicular al plano que lo genera, podremos considerar que los campos llevan dirección según el eje z .

También deberemos suponer la posición relativa de ambos planos, en este caso consideraremos que el plano 1 está situado en $z = 0$ y el plano 2 en $z = 1 \text{ m}$. Si la posición relativa de los planos cambiase, la forma de proceder a la resolución sería análoga aunque cambiarían los resultados numéricos.

Una vez que tenemos planteado el problema, procederemos a su resolución. Para ello deberemos dividir el espacio en tres regiones:

- $z < 0$. En esta región tanto el campo generado por el plano 1 como el generado por el plano 2 llevan sentido $-\vec{k}$, por lo tanto el campo eléctrico total será:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = -\frac{4 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

$$\vec{E}_T = \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $0 < z < 1$ m. En la región entre ambos planos los campos generados por cada uno de ellos llevan sentidos opuestos. De este modo, el campo $\vec{E}_1$ tiene sentido $+\vec{k}$, mientras que $\vec{E}_2$ lleva sentido $-\vec{k}$.

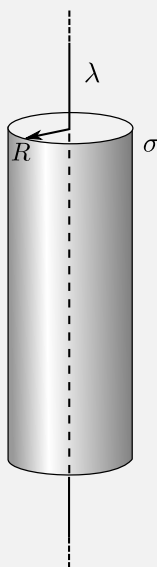
$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} - \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

$$\vec{E}_T = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $z > 1$. En esta región tanto el campo generado por el plano 1 como el generado por el plano 2 llevan sentido $\vec{k}$, por lo tanto el campo eléctrico total será el mismo que en la zona $z < 0$, pero en sentido opuesto.

$$\vec{E}_T = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{2\varepsilon_0} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

14. Se sitúa un cable infinito a lo largo del eje z cargado con una densidad de carga $\lambda = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$. El cable coincide con el eje de un cilindro hueco infinito de radio $R = 10$ cm cargado con una densidad de carga $\sigma = 3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Hallar el campo eléctrico en los puntos A(0, 5) cm y B(0, 15) cm.



Solución

Si nos fijamos en los datos del problema, el punto A se encuentra en la región del espacio que hay entre el cable y el cilindro, por lo que para calcular el campo eléctrico en este punto únicamente deberemos tener en cuenta el campo generado por el cable (el campo generado por un cilindro hueco en su interior es nulo). Por el contrario, el punto B es un punto exterior al cilindro, y por lo tanto el campo eléctrico será el resultante de la suma de los campos generados por ambas distribuciones.

Comencemos calculando el campo en el punto A. Para ello aplicaremos el teorema de Gauss tomando como superficie gaussiana un cilindro de longitud L y radio $r = 0,05$ m cuyo eje coincida con el cable. Por simetría el campo eléctrico generado por el cable tiene dirección radial y por lo tanto el flujo eléctrico se produce únicamente a través de la superficie lateral de la superficie gaussiana ya que en sus bases el vector $\vec{E}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares y por lo tanto, su producto escalar es nulo. Teniendo esto en cuenta:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = E 2\pi r L \rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Como la densidad de carga del cable es negativa, el campo tendrá dirección radial, pero sentido hacia el propio cable:

$$\vec{E}(A) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,05 \epsilon_0} \vec{u}_r = -719344,38 \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Lo primero que vamos a hacer para obtener el campo en el punto B es calcular el campo generado por el cilindro (en el apartado anterior ya hemos obtenido la expresión general del campo generado por el cable) para un punto externo al propio cilindro. Una vez obtenida la expresión general, particularizaremos en el punto B.

Procederemos de forma similar al caso anterior, es decir, tomaremos como superficie gaussiana un cilindro de longitud L y radio $r > R$.

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi R L}{\epsilon_0} = E 2\pi r L \rightarrow E = \frac{\sigma R}{r \epsilon_0}$$

En este caso la carga es positiva y por lo tanto el sentido del campo eléctrico es radial hacia afuera:

$$\vec{E}_{cilindro} = \frac{\sigma R}{r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

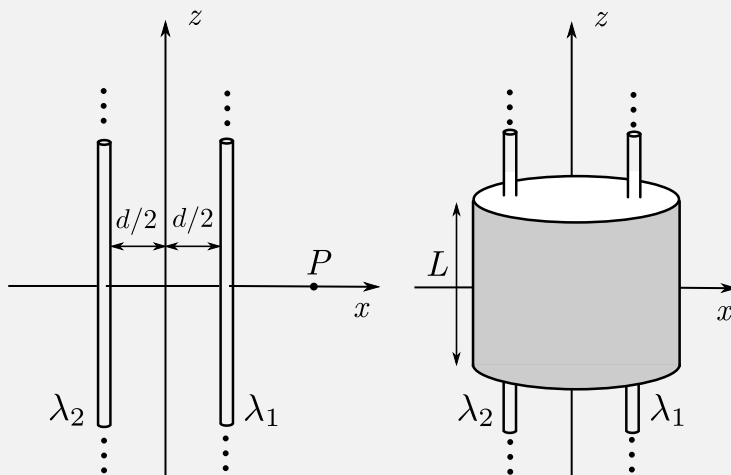
Finalmente procedemos a la suma vectorial de ambos campos en el punto B:

$$\vec{E}(B) = \vec{E}_{cable} + \vec{E}_{cilindro} = \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,15 \epsilon_0} \vec{u}_r + \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1}{0,15 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(B) = -13792,76 \vec{u}_r \cdot \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

15. Tenemos dos hilos muy largos, paralelos y separados por una distancia $d = 0,2 \text{ m}$ tal y como se indica en la figura. Los hilos son no-conductores y están cargados con densidades lineales uniformes $\lambda_1 = 1 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ y $\lambda_2 = -1 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Calcular la expresión del campo eléctrico en el punto $P(1, 0) \text{ m}$ indicado en la figura.
- Una caja cilíndrica con su eje coincidiendo con el eje z encierra parte de los cables cargados (ver figura). Cuál es el valor del flujo eléctrico sobre la superficie de la caja.



Solución

a) En la primera parte debemos aplicar el principio de superposición teniendo en cuenta el campo generado por cada uno de los cables infinitos:

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) = \frac{\lambda_1}{2\pi r_1 \epsilon_0} \vec{i} + \frac{\lambda_2}{2\pi r_2 \epsilon_0} \vec{i} = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 0,9 \epsilon_0} \vec{i} + \frac{-1 \cdot 10^{-6}}{2\pi 1,1 \epsilon_0} \vec{i}$$

$$\vec{E}(P) = 3633,05 \vec{i} \cdot \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

b) En esta segunda parte calculamos el flujo generado por el campo de los dos hilos. Para calcular este flujo sin tener que integrar el campo

usamos la ley de Gauss:

$$\phi_e = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_1 L + \lambda_2 L}{\varepsilon_0} = 0 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{m}^2$$

16. Un péndulo eléctrico está constituido por una esfera metálica de masa m y carga q positiva, colgada de un hilo muy fino de longitud l y masa despreciable. Se hace oscilar al péndulo en una región donde existe un campo eléctrico homogéneo, vertical y orientado de arriba hacia abajo. En este caso se observa que la esfera efectúa 100 oscilaciones en un tiempo t_1 , mientras que si invertimos el sentido del campo, el péndulo tarda un tiempo $t_2 > t_1$ en realizar otras 100 oscilaciones.

a) Calcule la intensidad del campo eléctrico.

b) Halle el valor de la constante g de la gravedad en este experimento.

Ayuda: Período del péndulo sometido a una aceleración vertical

$$a: T = 2\pi\sqrt{l/a}$$

Solución

a) Tenemos dos experimentos donde el período de oscilación del péndulo es distinto. En el caso del péndulo con el campo orientado hacia abajo, tenemos una aceleración vertical que es:

$$a = g + \frac{F}{m} = g + \frac{qE}{m}$$

por lo tanto, el tiempo t_1 se puede expresar en función de los datos del enunciado,

$$t_1 = 100T = 200\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}$$

En el segundo experimento, la fuerza eléctrica empuja hacia arriba el péndulo. Por lo tanto, la aceleración que este experimenta será:

$$a = g - \frac{F}{m} = g - \frac{qE}{m}$$

Como consecuencia, el tiempo t_2 vendrá dado por:

$$t_2 = 100T = 200\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{qE}{m}}}$$

Con ambas medidas del tiempo podemos hallar el campo y la constante g de la gravedad mediante la suma y la diferencia de los cuadrados de los inversos de ambos tiempos:

$$\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} = \frac{2}{(200\pi^2)l} \left(\frac{qE}{m} \right)$$

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} = \frac{2g}{(200\pi^2)l}$$

Despejando las dos ecuaciones anteriores tenemos los datos buscados y la respuesta del apartado b):

$$E = \frac{(200\pi)^2 lm}{2q} \left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right)$$

$$g = \frac{(200\pi)^2 l}{2} \left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} \right)$$

17. Una carcasa metálica neutra de radio interior $r_i = 10$ cm y de radio exterior $r_e = 15$ cm, encierra una corteza esférica de radio $r_c = 5$ cm con una densidad de carga $\sigma_c = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Los centros de la carcasa y de la corteza coinciden en $O(0,0,0)$.

a) ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie interior y exterior de la carcasa metálica?

b) Hallar el campo eléctrico a lo largo del semi-eje $z \geq 0$.

Solución

a) Para calcular la densidad de carga en las superficies interior y exterior de la carcasa, lo primero que deberemos tener en cuenta es que al ser una carcasa conductora, una vez que se alcance el equilibrio electrostático, el campo eléctrico en su interior deberá ser 0.

Esto implica que si tomamos una superficie gaussiana de radio r tal que $r_i \leq r \leq r_e$ la carga encerrada por dicha superficie gaussiana deberá ser nula. Es decir, en la superficie interna ($r = r_i$) debe producirse una acumulación de carga negativa que anule la carga que tiene la corteza esférica, de modo que la carga total sea 0.

$$Q_{r_c} + Q_{r_i} = 0 \rightarrow Q_{r_c} = -Q_{r_i} \rightarrow \sigma_c 4\pi r_c^2 = -\sigma_i 4\pi r_i^2$$

$$\sigma_i = -\sigma_c \frac{r_c^2}{r_i^2} = -2,5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

Para calcular la densidad de carga en la superficie externa, r_e , simplemente tendremos que tener en cuenta que inicialmente la carcasa no tenía carga y por lo tanto lo que se produce es una redistribución de las cargas libres que hay en el material.

Como consecuencia de esta redistribución, en la superficie externa r_e se acumulará una carga que anulará la que se ha acumulado en la superficie interna, r_i , o lo que es lo mismo una carga igual a la que aporta la corteza esférica. De este modo:

$$Q_{r_c} = Q_{r_e} \rightarrow \sigma_c 4\pi r_c^2 = \sigma_i 4\pi r_e^2$$

$$\sigma_i = \sigma_c \frac{r_c^2}{r_e^2} = \frac{10}{9} \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) Para calcular el campo eléctrico a lo largo del semi-eje $z \geq 0$, deberemos aplicar la Ley de Gauss en las 4 regiones en las que la distribución de carga divide al semieje. Para todos estos casos la superficie gaussiana que debemos tomar es una superficie esférica de centro en el origen de coordenadas y radio la distancia desde el punto en el que queremos calcular el campo hasta el origen.

- $z < 5 \text{ cm}$. En este caso la carga encerrada por la superficie gaussiana es nula, pues toda la carga está en la superficie de corteza esférica, por lo tanto:

$$\vec{E}_{z < 5 \text{ cm}} = 0 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $5 \text{ cm} \leq z < 10 \text{ cm}$. Ahora al aplicar la Ley de Gauss obtenemos que la carga encerrada en el interior de la superficie gaussiana es la carga que hay en la corteza esférica de radio $r_c = 5 \text{ cm}$ y densidad $\sigma_c = 10 \mu\text{C m}^{-2}$, es decir, $q_{int} = 4\pi r_c^2 \sigma_c = 0,1\pi \mu\text{C}$, por lo tanto:

$$\vec{E}_{5 \text{ cm} \leq z < 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}$. Este caso es extremadamente sencillo, ya que el campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático tiene que ser 0. Hay que recordar que esta condición ya la hemos aplicado en el apartado a) para calcular la densidad de carga en la superficie interior de la carcasa.

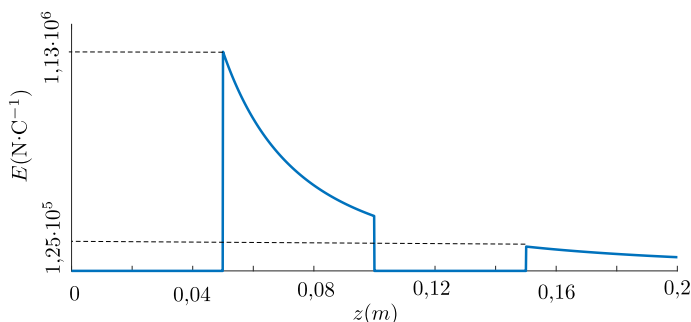
$$\vec{E}_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}} = 0 \vec{k} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$$

- $z > 15 \text{ cm}$. Finalmente para puntos externos a la carcasa, la carga contenida en la superficie gaussiana será únicamente la que aporta

la corteza esférica, puesto que el enunciado nos dice que la carcasa no posee carga. Al introducir la corteza esférica se produce una redistribución de las cargas en la carcasa, pero la carga total tiene que permanecer constante y en este caso la carga inicial era nula. Teniendo en cuenta todo esto:

$$\vec{E}_{z > 15 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} \vec{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

Finalmente podemos representar gráficamente la evolución del módulo del campo eléctrico en función de z .



18. Una carga puntual q se encuentra en el centro de una carcasa esférica **no conductora** de radio interior r_i y radio exterior r_e . La carcasa tiene una densidad de carga volumétrica $\rho \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ homogénea repartida en todo su interior. Hallar el campo eléctrico para todas las distancias r relativas a la carga interior.

Solución

Es conveniente dividir el problema en tres regiones dependiendo de la distancia r al centro de la carcasa esférica:

- $0 < r \leq r_i$. En esta zona solo tenemos el campo generado por la carga puntual q :

$$\vec{E}_1(r) = K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

- $r_i \leq r \leq r_e$. En esta región tenemos la superposición del campo generado por la carga puntual y la densidad de carga de la carcasa homogénea hasta el radio r . Dada la simetría esférica, el campo debido a la parte de la carcasa, $\vec{E}_c(r)$, se puede hallar aplicando la ley

de Gauss a una esfera de radio r centrada en el centro de la carcasa. De este modo

$$\vec{E}_c(r) \cdot \vec{S} = E_c(r) S = E_c(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_i^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E_c(r) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - r_i^3)}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho(r^3 - r_i^3)}{3r^2 \varepsilon_0}$$

Teniendo en cuenta que la dirección del campo es radial y que $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, la expresión del campo eléctrico generado por la parte de la corteza incluida en la región de estudio la podremos escribir como:

$$\vec{E}_c(r) = K \frac{\rho 4\pi(r^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r$$

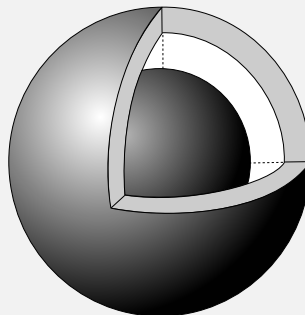
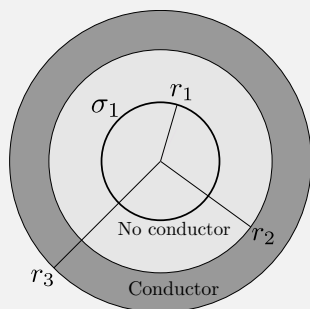
Finalmente, el campo total será la suma de ambos campos:

$$\vec{E}_2(r) = K \frac{\rho 4\pi(r^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r + K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

- $r > r_e$. Tenemos la suma de los dos campos, el generado por toda la carcasa y el generado por la carga puntual. Para calcular el campo generado por toda la carcasa, volveremos a aplicar el teorema de Gauss que nos llevará a una expresión similar a la obtenida en el apartado anterior para $\vec{E}_c(r)$ siendo esta vez la carga total de la carcasa $Q_{int} = \rho 4/3\pi(r_e^3 - r_i^3)$:

$$\vec{E}_2(r) = K \frac{\rho 4\pi(r_e^3 - r_i^3)}{3r^2} \vec{u}_r + K \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

19. Consideramos una corteza esférica (no conductora) de radio r_1 con una densidad de carga σ_1 repartida en su superficie. A su alrededor colocamos una carcasa esférica conductora de radio interior r_2 y de radio exterior r_3 , de modo que el centro de la carcasa coincide con el centro de la corteza esférica. El conductor tiene una carga neutra.



- Calcular la densidad de carga en la superficie interna y externa de la carcasa conductora.
- Calcular el campo eléctrico en función de la distancia al centro del dispositivo.

Solución

a) Para resolver este problema aplicamos la ley de Gauss a la carcasa conductora. Consideramos una superficie de Gauss esférica de radio $r_g \in]r_2, r_3[$ y con su centro coincidiendo con el de las otras dos carcasas. El campo eléctrico en la carcasa es nulo dado que se trata de un material metálico en equilibrio electrostático, por lo tanto el flujo también es nulo y la suma de las cargas en el interior de la superficie gaussiana también debe serlo:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

La carga repartida sobre la cara interior de la carcasa esférica debe anular la carga de la corteza, es decir:

$$\sigma_1 4\pi r_1^2 = -\sigma_2 4\pi r_2^2$$

siendo σ_2 la densidad de carga de la superficie interior de la carcasa metálica. Se obtiene:

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma_1 r_1^2}{r_2^2}$$

Para calcular la densidad de carga en la superficie externa de la carcasa deberemos tener en cuenta que la carcasa metálica es neutra, y por lo tanto la suma de las cargas acumuladas en las superficies externa e interna deben anularse:

$$\sigma_2 4\pi r_2^2 = -\sigma_3 4\pi r_3^2$$

A su vez podemos expresar la densidad de carga de la superficie externa de la carcasa, σ_3 con la densidad de carga de la corteza esférica del enunciado, σ_1 :

$$\sigma_3 = -\frac{\sigma_2 r_2^2}{r_3^2} = \frac{\sigma_1 r_1^2}{r_3^2}$$

b) Para el cálculo del campo, debemos dividir el espacio en distintas zonas:

- $0 < r < r_1$. Basta con aplicar el teorema de Gauss a una esfera centrada en el origen con un radio inferior a r_1 . Al tener toda la carga distribuida a lo largo de la superficie de la esfera, la carga encerrada por la superficie gaussiana será 0 y por lo tanto el campo eléctrico nulo, $\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r$.
- $r_1 < r < r_2$. Dada la simetría esférica del problema, el campo es equivalente al de una carga puntual con carga $Q = \sigma_1 4\pi r_1^2$:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{r^2} \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- $r_2 < r < r_3$. El campo eléctrico es nulo al ser un material conductor en equilibrio electrostático.
- $r_3 < r$. De nuevo encontramos el campo de una carga puntual situada en el origen de coordenadas:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{r^2} \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

20. Tenemos un cilindro macizo de base S y altura h . Depositamos en su interior una carga $Q = 2 \mu\text{C}$.

- a) Calcular el flujo del campo sobre las paredes del cilindro. Añadimos un campo externo uniforme $\vec{E} = 10\vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ paralelo al eje axial del cilindro.
- b) Calcule de nuevo el flujo sobre las paredes del cilindro.

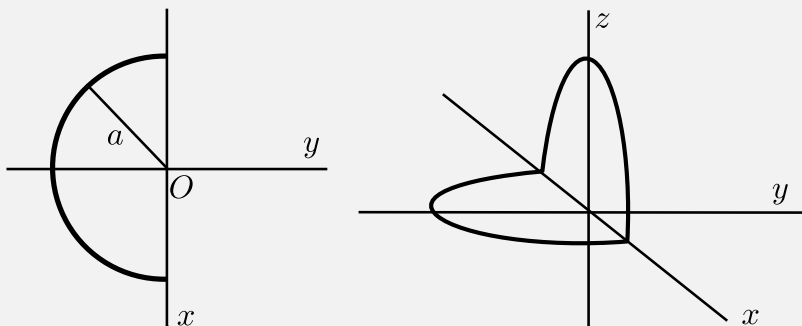
Solución

a) La primera pregunta es una aplicación directa de la ley de Gauss:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} \text{ V}\cdot\text{m}$$

b) El campo adicional no modifica el flujo total del campo sobre las paredes. Aunque puede cambiar el valor del campo en todos los puntos del cilindro, no va a haber modificación del flujo. Este flujo depende de las cargas en el interior de la superficie y la presencia del campo eléctrico adicional no modifica el valor total de la carga, dependiendo del material, podrá modificar su distribución, pero nunca su valor.

21. Disponemos de dos semiaros con densidad de carga λ repartida uniformemente. Uno de los semiaros se encuentra en el semiplano xy para $y < 0$ y con su centro en el origen. El otro semiarco se encuentra en el semiplano xz con $z > 0$ y su centro también coincide con el origen. Ambos semiaros tienen radio a . Calcular el campo eléctrico producido por los semiaros en el origen.

**Solución**

El campo eléctrico se obtiene sumando vectorialmente los campos eléctricos generados por cada uno de los semiaros. Procedemos a calcular el campo eléctrico que genera el semiarco situado en el plano xy . Una vez calculado este campo, el generado por el semiarco situado en el plano xz será automático.

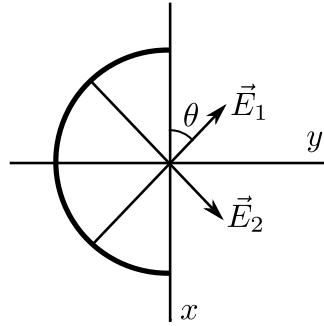
El campo generado por un elemento diferencial de longitud del semiarco

($dl = ad\theta$) es:

$$d\vec{E} = \frac{Kdq}{a^2}\vec{u} = \frac{K\lambda dl}{a^2}\vec{u} = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2}\vec{u}$$

Una vez conocido $d\vec{E}$, deberemos integrar a todo el semiarco.

Para resolver esta integral, lo primero que hacemos es descomponer el campo eléctrico en sus componentes x e y . Si nos fijamos en el siguiente dibujo, observamos que la única componente del campo que no se anula es la componente y mientras que la componente x se anula por simetría (todo elemento diferencial del semiarco, dl_1 , tiene otro simétrico, dl_2 , que genera un campo cuya componente x anula la contribución del primero). Procediendo de forma análoga para el semiarco en el plano xz obtendremos que el campo eléctrico generado únicamente tiene componente z .



Procedamos a calcular analíticamente el valor de las componentes. Aunque anteriormente ya hemos indicado que la componente x de nuestro campo se anula por simetría, a continuación también haremos el desarrollo matemático para comprobar que nuestra intuición coincide con las matemáticas. La componente según el eje y del campo se escribe como:

$$dE_y = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2} \sin \theta$$

Integrando para todos los elementos obtenemos el campo:

$$E_y = \int_0^\pi \frac{\sin \theta K\lambda ad\theta}{a^2} = \frac{K\lambda}{a} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{2K\lambda}{a}$$

La componente según el eje x del campo se escribe como:

$$dE_x = \frac{K\lambda ad\theta}{a^2} \cos \theta$$

Integrando para todos los elementos obtenemos el campo:

$$E_x = \int_0^\pi \frac{\cos\theta K \lambda a d\theta}{a^2} = \frac{K\lambda}{a} [\sin\theta]_0^\pi = 0$$

Por lo tanto el campo generado por este semiarco en el origen es:

$$\vec{E}_{xy} = \frac{2K\lambda}{a} \vec{j}$$

Procediendo de forma análoga, el campo generado por el otro semiarco tendrá la misma magnitud pero con una orientación diferente:

$$\vec{E}_{xz} = -\frac{2K\lambda}{a} \vec{k}$$

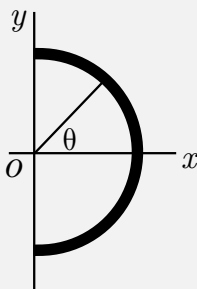
El campo total es la suma de ambos:

$$\vec{E}_{xy} + \vec{E}_{xz} = \frac{2K\lambda}{a} \vec{j} - \frac{2K\lambda}{a} \vec{k}$$

22. Disponemos de un semiarco de radio a con densidad lineal de carga λ **no uniforme**:

$$\lambda(\theta) = 1 \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) \text{ C}\cdot\text{m}^{-1}$$

Calcular el campo eléctrico en el origen.



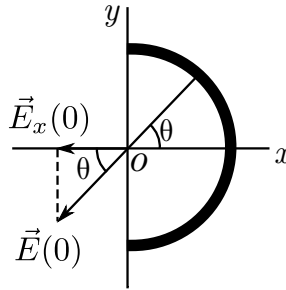
Ayuda: fíjense que la distribución de carga es simétrica con respecto al eje x .

Solución

El campo eléctrico se puede calcular fácilmente con la observación de la simetría con respecto al eje x de la distribución de carga. Esto significa que la componente y del campo va a desaparecer dado que los campos

debidos a elementos de longitud simétricos respecto del eje x tendrán la suma de sus componentes y nula. Con esto en mente, nos podemos centrar en la componente x del campo eléctrico:

$$\vec{E}_x(0) = - \int_0^{\pi/2} \frac{Ka\lambda(\theta)}{a^2} \cos(\theta) d\theta \vec{i}$$



Es la resultante de la proyección sobre el eje x del campo generado de cada trozo de aro sumados a lo largo del aro. Notando que la distribución es simétrica con respecto al eje y podemos integrar para la mitad de los ángulos θ y multiplicamos por dos el resultado. Resolvemos:

$$\vec{E}_x(0) = -2 \int_0^{\pi/2} \frac{K \cdot 10^{-6}}{a} \cos^3(\theta) d\theta \vec{u}_x = -K \cdot 10^{-6} \frac{4}{3a} \vec{i}$$

siendo la integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \frac{2}{3} \vec{i}$$

2 POTENCIAL

2.1 Ecuaciones relevantes.

■ Diferencia de potencial.

La fuerza eléctrica es una fuerza conservativa y por lo tanto debe existir una función energía potencial U asociada a ella. La relación entre la energía potencial y la fuerza eléctrica viene dada por el hecho de que cuando la partícula sobre la que se aplica la fuerza conservativa $\vec{F}$ sufre un desplazamiento $d\vec{l}$ la partícula experimenta una variación de su energía potencial:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (2.1)$$

Si se considera que la fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre una carga q es $\vec{F} = q\vec{E}$, obtenemos que

$$dU = -q\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.2)$$

Aplicando la ecuación anterior a la carga testigo q_0 , obtenemos $dU = -q_0\vec{E} \cdot d\vec{l}$. La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina diferencia de potencial dV :

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.3)$$

Para un desplazamiento finito desde el punto a al punto b , la variación de potencial es

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.4)$$

y su unidad en el sistema internacional es el Voltio [V].

Aplicando la ecuación (2.4) al caso de cargas puntuales, se obtiene:

$$V(r) = K \frac{q}{r} + V_0 \quad (2.5)$$

donde V_0 es el valor de la función en un punto arbitrario que se toma como referencia. En el caso de la carga puntual se toma como punto de referencia el infinito para el cual $V_\infty = 0$. De este modo la ecuación (2.5) queda

$$V(r) = K \frac{q}{r} \quad (2.6)$$

Aplicando el principio de superposición, el potencial eléctrico para una distribución de cargas puntuales es:

$$V(r) = \sum_i K \frac{q_i}{r_i} \quad (2.7)$$

■ Potencial debido a una distribución continua de carga.

En este caso, procederemos a integrar sobre todo el volumen del objeto el potencial generado por el diferencial de carga dq :

$$V(r) = \int_V K \frac{dq}{r} \quad (2.8)$$

Si la distribución de carga es infinita nos impide considerar que el potencial en el infinito es cero y deberemos asignar un valor arbitrario a un punto cualquiera del espacio.

■ Relación entre el campo eléctrico y el potencial.

$$\vec{E}(r) = -\text{grad } V(r) = -\vec{\nabla} V(r) \quad (2.9)$$

donde el operador $\vec{\nabla}$ toma diferentes expresiones dependiendo de sistema de coordenadas que utilicemos. En nuestro caso y por simplicidad utilizaremos coordenadas cartesianas, en cuyo caso:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (2.10)$$

■ Energía Potencial de distribuciones de cargas.

Sean dos cargas q_1 y q_2 separadas una distancia d la energía potencial asociada a la distribución formada por ambas cargas es

$$U = K \frac{q_1 q_2}{d} \quad (2.11)$$

Si tenemos una distribución de varias cargas puntuales la energía potencial total será:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad (2.12)$$

donde V_i es el potencial eléctrico en el punto donde está situada la carga q_i generado por todas las cargas a excepción de la carga q_i .

■ Trabajo.

El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando una partícula de carga q_0 se desplaza entre dos puntos $\vec{r}_a$ y $\vec{r}_b$, lo podemos calcular directamente aplicando su definición:

$$W = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} q_0 \vec{E}_e \cdot d\vec{l} \quad (2.13)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta la relación (2.4), el trabajo lo podremos poner en función de la energía potencial:

$$W = -q_0 \Delta V = -\Delta U \quad (2.14)$$

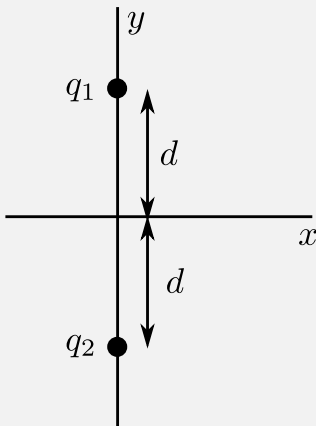
2.2 Ejercicios

1. El electrón-voltio es el trabajo necesario para mover a un electrón de un punto con potencial de 0 V a un punto con potencial de 1 V. Calcular el trabajo en Julios.

Solución

$$W = -q\Delta V = -(-1,6 \cdot 10^{-19})1V = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

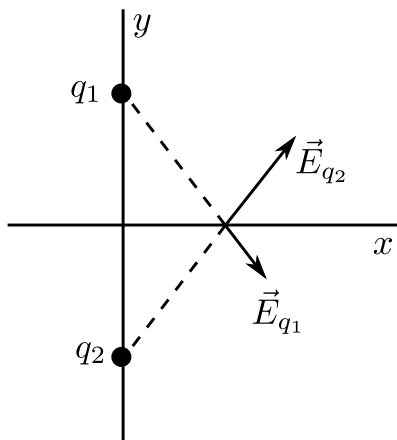
2. Se dispone de dos cargas q_1 y q_2 situadas sobre el eje y a una distancia d del eje x tal y como se muestra en la figura:



- Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del eje x .
- Consideramos ahora $q_1 = 1 \text{ nC}$ y $q_2 = 2 \text{ nC}$, $d = 10 \text{ cm}$, calcular el potencial en los puntos $(2, 0) \text{ cm}$ y $(0, 0) \text{ cm}$.
- Calcular el trabajo necesario para mover una carga de 1 nC del punto $(2, 0) \text{ cm}$ hasta el punto $(0, 0) \text{ cm}$.

Solución

- a) Para calcular el campo que se nos pide debemos superponer el campo generado por cada una de las cargas en un punto del eje x :



$$\vec{E}_{q_1} = K \frac{q_1}{d^2 + x^2} \vec{u}_1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

con el vector unitario: $\vec{u}_1 = \frac{x\vec{i} - d\vec{j}}{\sqrt{d^2 + x^2}}$ y

$$\vec{E}_{q_2} = K \frac{q_2}{d^2 + x^2} \vec{u}_2 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

con el vector unitario: $\vec{u}_2 = \frac{x\vec{i} + d\vec{j}}{\sqrt{d^2 + x^2}}$.

El campo generado en cualquier punto del eje es:

$$\vec{E} = \vec{E}_{q_1} + \vec{E}_{q_2} = K \frac{q_1 \vec{u}_1 + q_2 \vec{u}_2}{d^2 + x^2} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Podemos presentar el resultado con su descomposición en cada eje:

$$\vec{E} = K \frac{1}{(d^2 + x^2)^{3/2}} (x(q_1 + q_2)\vec{i} + d(q_2 - q_1)\vec{j}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) El cálculo del potencial en los puntos (2, 0) cm y en (0, 0) cm supone también aplicar el principio de superposición:

$$V(2, 0) = K \frac{q_1}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} = K \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{0,02^2 + d^2}} = 264,7 \text{ V}$$

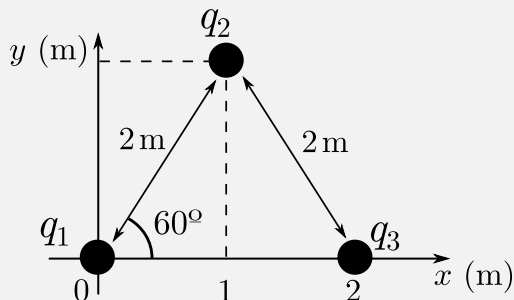
$$V(0, 0) = K \frac{q_1}{\sqrt{d^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{d^2}} = K \frac{q_1 + q_2}{d} = 270 \text{ V}$$

c) Para calcular el trabajo necesario para desplazar una carga de 1 nC entre los puntos (2, 0) cm y (0, 0) cm podríamos aplicar directamente $W = \int_{(2,0)}^{(0,0)} \vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde $d\vec{l}$ sería el diferencial de desplazamiento a lo largo de la trayectoria entre ambos puntos. Sin embargo, y aprovechando que el campo eléctrico es un campo conservativo, podemos aplicar $W_e = -\Delta U = -q\Delta V$, de este modo tenemos:

$$W_e = -q(V(0, 0) - V(2, 0)) = -1 \cdot 10^{-9}(270 - 264,7) = -5,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

El hecho de que el trabajo realizado por el campo eléctrico sea negativo nos indica que la partícula no realizará este movimiento de forma espontánea y que tendremos que ser nosotros, desde el exterior, los que aportemos esa energía. Por lo tanto, el trabajo necesario será el opuesto del trabajo realizado por el campo eléctrico: $W = 5,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$.

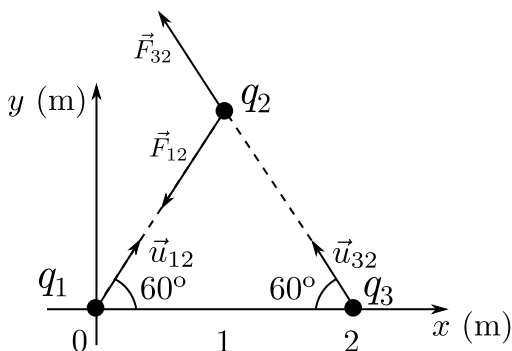
3. Se disponen 3 cargas de valor $q_1 = -1 \mu\text{C}$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$ y $q_3 = 1 \mu\text{C}$ según la distribución que se muestra en la figura siguiente:



- Calcular la fuerza eléctrica que actúa sobre q_2 .
- La energía almacenada por el sistema de cargas.

Solución

- a) Calculamos la fuerza sobre la carga q_2 mediante la Ley de Coulomb y aplicando el principio de superposición:



Los vectores unitarios de la figura anterior se descomponen usando el ángulo que forman con la horizontal:

$$\vec{u}_{12} = \cos(60^\circ)\vec{i} + \sin(60^\circ)\vec{j} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{u}_{32} = -\cos(60^\circ)\vec{i} + \sin(60^\circ)\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \vec{u}_{12} + K \frac{q_3 q_2}{d^2} \vec{u}_{32} = K \frac{q_1 q_2}{d^2} \left(\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right) + K \frac{q_3 q_2}{d^2} \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j} \right)$$

$$\vec{F}_2 = -4,5 \cdot 10^{-3} \vec{i} \text{ N}$$

b) La energía almacenada en el sistema de cargas se puede calcular usando los potenciales generados en el lugar donde está situada cada una de las cargas:

$$V_{q_1} = K \frac{q_2}{d} + K \frac{q_3}{d} = 13500 \text{ V}$$

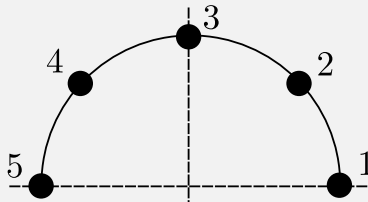
$$V_{q_2} = K \frac{q_1}{d} + K \frac{q_3}{d} = 0 \text{ V}$$

$$V_{q_3} = K \frac{q_1}{d} + K \frac{q_2}{d} = 4500 \text{ V}$$

Calculamos ahora la energía electrostática del sistema:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_{q_i} = \frac{1}{2} (q_1 V_{q_1} + q_2 V_{q_2} + q_3 V_{q_3}) = -4,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

4. Cinco cargas negativas idénticas de valor $-10 \mu\text{C}$, están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio 2 m, de manera que dos de ellas están en los extremos del semicírculo.



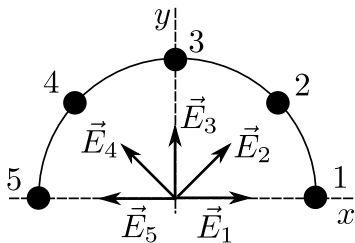
- a) Calcule el campo eléctrico generado por esta distribución de carga en el centro del semicírculo.

A continuación, las cargas 2 y 4 (ver figura) cambian de signo y modifican su posición a lo largo del borde del semicírculo, de modo que el campo eléctrico en el centro del semicírculo pasa a ser nulo. Obtenga:

- b) La nueva posición de ambas partículas.
- c) El trabajo realizado por el campo eléctrico para traer un electrón desde el infinito hasta el centro del semicírculo.

Solución

a) El campo en el centro del semicírculo es la superposición de los campos generados por las 5 cargas. Es recomendable realizar un esquema del problema en el que se vean los campos eléctricos generados por las distintas cargas de modo que nos permita entender mejor el problema.



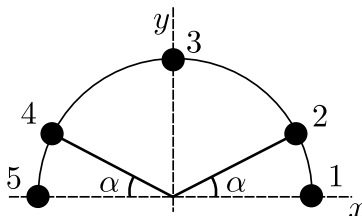
Una vez que tenemos el esquema del problema, procedemos a realizar la suma vectorial de los campos eléctricos. Para ello nos aprovecharemos del esquema realizado y al conocer el sentido de cada campo podremos trabajar con el módulo de la carga.

$$\vec{E}(0,0) = K \frac{|q_1|}{R^2} \vec{i} - K \frac{|q_5|}{R^2} \vec{i} + K \frac{|q_2|}{R^2} \vec{u}_2 + K \frac{|q_4|}{R^2} \vec{u}_4 + K \frac{|q_3|}{R^2} \vec{j}$$

con los vectores unitarios: $\vec{u}_2 = \cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j}$ y $\vec{u}_4 = -\cos(\pi/4)\vec{i} + \sin(\pi/4)\vec{j}$. Con $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q = -10 \mu\text{C}$, la resultante es:

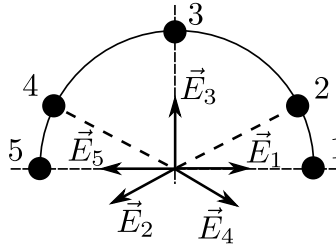
$$\vec{E}(0,0) = K \frac{|q|}{R^2} (1 + \sqrt{2}) \vec{j} = 54319,8 \vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) Para encontrar la nueva distribución de cargas conviene dibujar una distribución ficticia tal que la suma hipotética de los campos en el centro del semicírculo sea cero.



Podemos ver inmediatamente que el campo resultante de las cargas 1 y 5 es nulo. Otra hipótesis razonable de cara al cálculo es asumir que la distribución se mantiene simétrica con respecto al eje y marcado en

la figura, esto nos indica que las componentes según el eje x de las cargas 2 y 4 también se anulan, dejando únicamente una componente según el eje y . Finalmente, la suma de estas componentes más el campo generado por la partícula 3 debe ser nula en el punto que se nos pide.



Siendo $q' = 10 \mu\text{C}$ la carga de 2 y 4, las componentes según el eje y de campo de las dos cargas son:

$$\vec{E}_2^y = -\frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{E}_4^y = -\frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha \vec{j}$$

El campo de la carga 3 en el centro del círculo es:

$$\vec{E}_3 = \frac{K|q|}{R^2} \vec{j}$$

El problema consiste ahora en calcular el ángulo α para obtener un campo nulo en el centro:

$$-2 \frac{Kq'}{R^2} \sin \alpha + \frac{K|q|}{R^2} = 0$$

$$2 \sin \alpha = 1$$

la solución siendo: $\alpha = \pi/6 \text{ rad}$.

c) Para resolver este apartado lo primero que debemos hacer es calcular el potencial en el centro del semicírculo:

$$V(0,0) = 3 \frac{Kq}{R} + 2 \frac{Kq'}{R} = \frac{Kq}{R} = -45000 \text{ V}$$

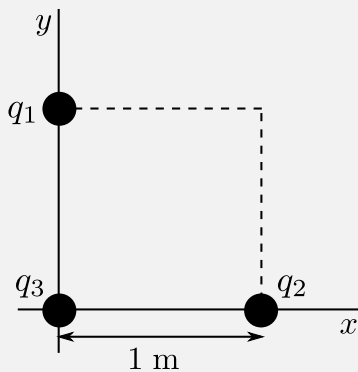
El trabajo realizado por el campo eléctrico para traer el electrón desde el infinito hasta este punto vendrá dado por:

$$W_e = -\Delta U = -e \cdot \Delta V = -e(V(0,0) - V_\infty) = -e(V(0,0) - 0) = -e \frac{Kq}{R}$$

$$W_e = -7,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

5. En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado se sitúan cargas de $10 \mu\text{C}$ cada una (ver figura). Calcule:

- El campo eléctrico en el cuarto vértice y la fuerza que experimentará un electrón cuando lo situemos en dicho vértice.
- El trabajo que realizará el campo eléctrico para llevar el electrón desde este vértice hasta el centro del cuadrado en presencia de las otras tres. ¿Será espontáneo el movimiento?



Solución

a) Para calcular el campo eléctrico aplicamos el principio de superposición calculando primero el campo debido a cada carga en el cuarto vértice del cuadrado:

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \vec{i}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{r_2^2} \vec{j}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{r_3^2} \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

siendo $q_1 = q_2 = q_3 = 10 \mu\text{C}$, $r_1 = r_2$ y $r_3 = \sqrt{2}r_1$.

El campo total se obtiene mediante la suma vectorial de los campos anteriores:

$$\vec{E}_T(1,1) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{Kq_1}{r_1^2} \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{j} \right)$$

$$\vec{E}_T(1,1) = 121819\vec{i} + 121819\vec{j} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

La fuerza que se ejerce sobre un electrón en este punto es

$$\vec{F} = e\vec{E}_T = e \frac{Kq_1}{r_1^2} \left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\vec{j} \right) = -1,95 \cdot 10^{-14}(\vec{i} + \vec{j}) \text{ N}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico para desplazar el electrón desde el cuarto vértice hasta el centro del cuadrado, necesitamos calcular los potenciales eléctricos en estos puntos. Para simplificar la notación consideraremos $q_1 = q_2 = q_3 = q$, $r_1 = r_2 = d = 1 \text{ m}$

$$V(1,1) = 2K\frac{q}{d} + K\frac{q}{d\sqrt{2}} = 243639,61 \text{ V}$$

Calcular el potencial eléctrico en el centro del cuadrado es aún más sencillo, puesto que la distancia entre las cargas y el centro es la misma para todas ellas $d' = \sqrt{2}/2\text{m}$. De este modo,

$$V(0,5;0,5) = 3K\frac{q}{d'} = 3K\frac{2q}{\sqrt{2}} = 381837,66 \text{ V}$$

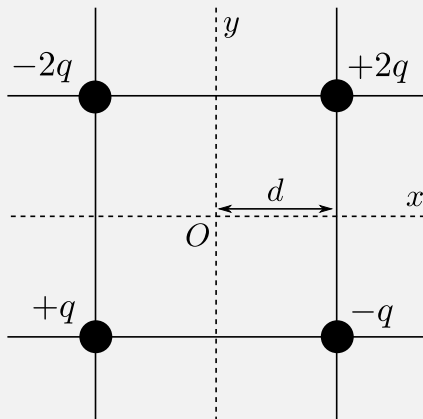
Teniendo en cuenta que $W = -\Delta U = -e\Delta V$, obtenemos:

$$W = -e(V(0,5;0,5) - V(1;1)) = -e \left(3K\frac{2q}{\sqrt{2}} - 2K\frac{q}{d} - K\frac{q}{d\sqrt{2}} \right)$$

$$W = 2,21 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Como el trabajo realizado por el campo eléctrico tiene signo positivo nos indica que el movimiento del electrón habrá sido espontáneo.

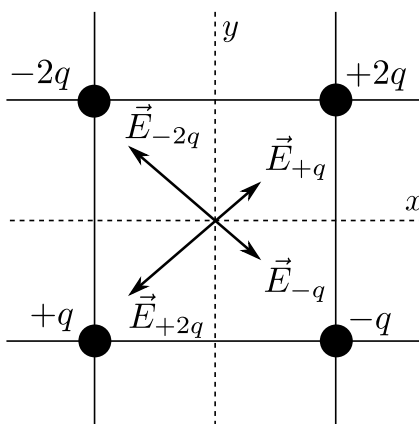
6. Dada la configuración espacial de cargas que se presenta en la siguiente figura. Razone las siguientes afirmaciones:



- a) El campo eléctrico en el punto $(0,0)$ es nulo.
- b) El potencial eléctrico en el punto $(0,0)$ es nulo.
- c) Si introducimos un electrón en el punto $(0,0)$ la fuerza que actuará sobre él llevará sentido $-\vec{i}$

Solución

Para resolver las cuestiones a) y c) lo más sencillo es hacer un dibujo esquemático del problema en el que representemos el campo eléctrico generado por cada carga. Dado que la distancia de las cargas al origen es la misma para todas, los campos generados serán directamente proporcionales al valor de las cargas. De este modo $|E_{\pm 2q}| = 2|E_{\pm q}|$



a) **Falsa.** Si hacemos la suma vectorial de todos los campos eléctricos de la figura se observa que el campo resultante lleva dirección $-\vec{i}$.

b) **Verdadera.** Para calcular el potencial en el origen de coordenadas debemos hacer la suma de los potenciales generados por cada una de las cargas.

$$V_T = \sum V_i = K \frac{2q}{d\sqrt{2}} + K \frac{-2q}{d\sqrt{2}} + K \frac{q}{d\sqrt{2}} + K \frac{-q}{d\sqrt{2}} = 0$$

c) **Falsa.** Si como hemos dicho en el apartado a) el campo eléctrico lleva sentido $-\vec{i}$, la fuerza eléctrica que actuará sobre un electrón llevará sentido $\vec{i}$, puesto que la carga del electrón es negativa.

7. Una partícula con carga $q = 1 \mu\text{C}$, masa $m = 1 \cdot 10^{-13} \text{ kg}$ y con velocidad $\vec{v}_0 = 10^4 \vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ entra en $x = 0$ en una zona con campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -10 \vec{i} \text{ V}\cdot\text{m}$. ¿En qué punto del eje x la partícula se detendrá y dará la vuelta?

Solución

Una forma de resolver este problema es aplicando conceptos energéticos. De este modo, si aplicamos el teorema de la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas obtenemos:

$$W_e = \Delta E_c = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Al ser un campo uniforme podemos calcular el trabajo:

$$W_e = \vec{l} \cdot q \vec{E} = (x_f - x_i) \vec{i} \cdot q \vec{E} = -x_f q E$$

Siendo $\vec{l} = (x_f - x_i)\vec{i}$ la longitud del trayecto realizado en el campo eléctrico. Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$x_f = \frac{mv_0^2}{2Eq} = 0,5 \text{ m}$$

Como el enunciado nos dice que consideremos $x_i = 0$, la partícula se parará en el punto $x_f = 0,5 \text{ m}$.

Otra forma de resolver este problema utilizando conceptos energéticos sería aplicar el teorema de conservación de la energía, ya que sabemos que el campo electrostático es conservativo:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV_0 = E_f = 0 + qV_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = q(V_f - V_0) = q\Delta V$$

En este caso la relación entre ΔV y $\vec{E}$ es muy sencilla:

$$\Delta V = - \int_{x_i}^{x_f} \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_{x_i}^{x_f} -10\vec{i} \cdot d\vec{x} = 10(x_f - x_i)$$

Sustituyendo su expresión en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = q\Delta V = q10(x_f - x_i)$$

que nos lleva a la solución obtenida anteriormente.

Finalmente, también podríamos haber aplicado conceptos de cinemática. Al entrar en la región donde hay campo eléctrico este genera sobre la partícula una aceleración que la frena:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = -\frac{qE}{m}\vec{i}$$

Teniendo en cuenta esta aceleración, podemos calcular el tiempo que tardará la partícula en detenerse:

$$\vec{v}_f = 0 = \vec{v}_0 + \vec{a}t_f \rightarrow 0 = v_0 - \frac{qE}{m}t_f \rightarrow t_f = \frac{mv_0}{qE}$$

Con este tiempo y la ecuación del movimiento uniformemente acelerado podemos calcular el espacio recorrido por la partícula hasta detenerse:

$$x_f = v_0t_f - \frac{1}{2}at_f^2 = \frac{mv_0^2}{qE} - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{mv_0}{qE}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{2qE}$$

Volviendo a obtener la misma solución.

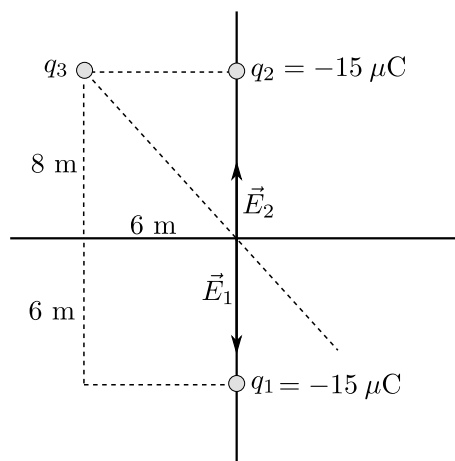
8. Tenemos tres cargas puntuales $q_1 = -15 \mu\text{C}$, $q_2 = -15 \mu\text{C}$ y q_3 de valor desconocido, situadas respectivamente en los puntos $(0, -6)$, $(0, 8)$ y $(-6, 8)$, estando las coordenadas en metros. Sabiendo que el potencial eléctrico en el origen de coordenadas es nulo, calcule:

- El valor de q_3 y el campo eléctrico en el origen.
- El trabajo realizado por el campo eléctrico para llevar una carga de 1 nC desde el origen de coordenadas hasta el punto $(-6, 0)$.

Solución

En este tipo de problemas la realización de un esquema en el que situemos las cargas en sus posiciones y dibujemos el campo eléctrico que genera cada una de las cargas en los puntos que se nos indique el enunciado, nos facilitará tanto la solución como la comprensión del problema.

En este caso hemos dibujado los campos generados por las cargas q_1 y q_2 en el origen de coordenadas y la recta sobre la que se situará el campo generado por q_3 (de momento no conocemos su signo y por lo tanto no podemos saber su sentido).



a) Puesto que el potencial en el origen es nulo, podemos obtener el valor

de la carga q_3 , sin más que exigir esta condición:

$$V(0,0) = 0 = V_1 + V_2 + V_3 = K \frac{q_1}{6} + K \frac{q_2}{8} + K \frac{q_3}{10}$$

$$V(0,0) = 0 = K \left(\frac{-15 \cdot 10^{-6}}{6} + \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{8} + \frac{q_3}{10} \right)$$

$$q_3 = \frac{175}{4} \cdot 10^{-6} = 43,75 \mu\text{C}$$

Una vez que tenemos el valor de q_3 , podemos completar el esquema dibujando el campo eléctrico generado por esta carga ($\vec{E}_3$).

Para calcular el campo eléctrico total deberemos realizar la suma vectorial de los tres campos. Mediante el esquema podemos deducir que el vector unitario de $\vec{E}_3$ es $\vec{u}_3 = (0,6\vec{i} - 0,8\vec{j})$, simplemente aplicando la definición de vector unitario o haciendo uso de sus cosenos directores. Por lo tanto, el campo que se nos pide será:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= K \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{6^2} \vec{j} + K \frac{-15 \cdot 10^{-6}}{8^2} (-\vec{j}) \\ &+ K \frac{43,75 \cdot 10^{-6}}{10^2} (0,6\vec{i}, -0,8\vec{j}) = \end{aligned}$$

$$\vec{E}_T = 2362,5\vec{i} - 4790,625\vec{j} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

b) Para esta segunda pregunta necesitamos el valor del potencial en el punto $(-6, 0)$:

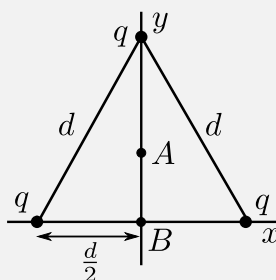
$$V(-6,0) = K \frac{q_1}{\sqrt{6^2 + 6^2}} + K \frac{q_2}{\sqrt{6^2 + 8^2}} + K \frac{q_3}{8} = 19808,8 \text{ V}$$

Si ahora aplicamos la ecuación (2.14) obtenemos el trabajo que se nos pide:

$$W_e = -q\Delta V = -q(V(-6,0) - V(0,0)) = -1 \cdot 10^{-9}(19808,8 - 0)$$

$$W_e = 1,98 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

9. Se disponen 3 cargas puntuales situadas en el plano xy tal y como se indica en la figura siguiente. Calcule el potencial en el centro del triángulo equilátero formado por las tres cargas (punto A), y en el punto medio de la base del triángulo (punto B).



Solución

a) El potencial en el centro del triángulo se calcula fácilmente si observamos que el centro es equidistante a las cargas. Por lo tanto, si definimos d_1 como la distancia del centro a las cargas, obtenemos:

$$V(A) = 3K \frac{q}{d_1} = 3K \frac{q}{d\sqrt{3}/3} = \frac{9}{\sqrt{3}} K \frac{q}{d}$$

En el punto B el cálculo del potencial es también inmediato, solo necesitamos calcular la altura h del triángulo:

$$V(B) = 2K \frac{q}{d/2} + K \frac{q}{h} = 4K \frac{q}{d} + K \frac{q}{d\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) K \frac{q}{d}$$

10. Se dispone un plano infinito situado en el plano (O, x, y) con una densidad de carga de superficie σ uniforme. Se desplaza una partícula desde el punto $(0,0,-1)$ m hasta el punto $(0,0,1)$ m (puede eventualmente atravesar el plano). ¿Cuál es la energía total necesaria en el proceso?

Solución

En este problema tenemos una simetría del campo eléctrico con respecto al plano. Los campos eléctricos a un lado y otro del plano, tienen el mismo módulo pero sentidos opuestos. Una consecuencia de este hecho, es que si realizamos un trabajo para acercar la partícula hasta el

plano desde el punto $(0,0,-1)$, tendremos el trabajo opuesto al mover la partícula desde el plano hasta el punto $(0,0,1)$. Sumando las dos partes obtenemos un trabajo globalmente nulo al mover la partícula de un punto al otro por este juego de simetría.

11. Una carga puntual de valor $q = 1 \mu\text{C}$ se encuentra en el centro de una corteza cargada de radio $R = 10 \text{ cm}$ y de carga total $Q = 3 \mu\text{C}$. A continuación, dicha carga se desplaza 1 cm con respecto al centro.

- a) ¿Cuál es el trabajo realizado sobre la carga?
- b) ¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio $R_2 = 15 \text{ cm}$ concéntrica con la carcasa antes y después del desplazamiento?

Solución

a) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico lo más sencillo es aplicar $W = -q\Delta V$.

Sin embargo, en este caso, el campo en el interior de la corteza es nulo (simplemente hay que aplicar la Ley de Gauss tomando una superficie gaussiana esférica de centro el centro de la esfera y comprobar que $q_{int} = 0$).

Si el campo eléctrico es nulo eso implica $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow V = \text{cte} \rightarrow W = 0 \text{ J}$.

b) El flujo eléctrico a través de una superficie es independiente de dónde estén situadas las cargas internas, solo depende de la suma algebraica de dichas cargas, por lo tanto:

$$\phi_e = \frac{(Q + q)}{\varepsilon_0} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\varepsilon_0} = 451977,4 \text{ V}\cdot\text{m}$$

12. Disponemos de una partícula de carga $q = 1 \mu\text{C}$ y masa $m = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ a 1 m de un plano infinito cargado con una densidad de carga uniforme $\sigma = -10 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. Si en el instante $t = 0$, se deja a la partícula, inicialmente en reposo, evolucionar libremente despreciando los efectos de la gravedad, responda a las siguientes preguntas:

- a) ¿A qué distancia del plano la partícula habrá adquirido una energía cinética de 100 mJ?
- b) ¿Cuál es la velocidad en este punto concreto?

Solución

a) El campo eléctrico generado por el plano es uniforme, perpendicular al plano y su módulo viene dado por la expresión:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

En este caso, como la carga de la partícula es positiva y la densidad de carga del plano es negativa, el campo eléctrico ejercerá una fuerza de atracción sobre la partícula, independientemente de si la partícula se encuentra por encima o por debajo del plano.

Como la única fuerza que está actuando es la fuerza eléctrica, la energía adquirida por la partícula se corresponderá con el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante la distancia d , y puesto que la fuerza es constante en todo el espacio y perpendicular al plano podemos escribir:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F d = 100 \text{ mJ}$$

Despejando la distancia, obtenemos

$$d = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{F} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{q E} = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6} |\sigma| / (2\varepsilon_0)} = 0,177 \text{ m}$$

Como lo que nos piden es la distancia al plano y puesto que la partícula estaba inicialmente a 1 metro del plano y se ha acercado, el resultado final será:

$$d_f = 1 - 0,177 = 0,823 \text{ m}$$

b) La velocidad en este instante vendrá dada por:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6}}} = 447,21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

13. Un plano infinito vertical yz , está cargado con una densidad superficial de carga σ positiva. A un metro del plano, en la zona $x > 0$, tenemos un objeto de masa m con una carga q positiva. En un instante dado soltamos el objeto sin velocidad inicial:

- Calcular las fuerzas que actúan sobre el objeto y el módulo de cada una de ellas.
- Determinar el tipo de movimiento del objeto y calcular su aceleración si la tuviera.

Datos: $\sigma = 8\varepsilon_0 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $m = 0,3 \text{ kg}$, $q = 1 \text{ C}$, $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Solución

a) El plano infinito genera un campo eléctrico uniforme en la zona donde se encuentra el objeto, por lo tanto la fuerza que experimentará dicho objeto debida a este campo será:

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} = 4\vec{i} \text{ N}$$

Por otro lado, el objeto tiene una masa m , por lo que la fuerza gravitatoria vendrá dada por:

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j} = -3\vec{j} \text{ N}$$

b) Al ser fuerzas constantes, tenemos una aceleración constante:

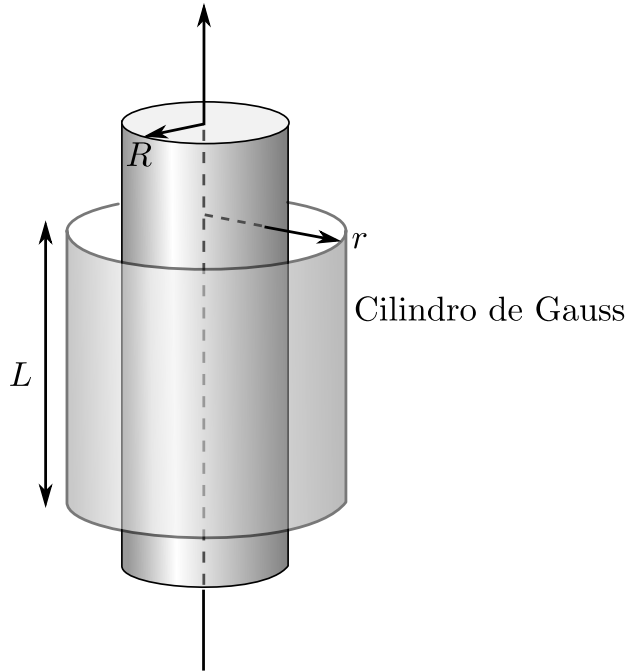
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_E}{m} + \frac{\vec{F}_g}{m} = \frac{40}{3}\vec{i} - 10\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

y por lo tanto el objeto describirá un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

14. Dado un cilindro macizo, infinito y conductor de radio R y con densidad de carga $+\sigma$ distribuida uniformemente en la superficie. Calcule el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio si consideramos $V(2R) = 0$.

Solución

En este problema se asume la expresión del campo eléctrico $\vec{E}(r) = \sigma R/\varepsilon_0 r \vec{u}_r$ para $r > R$ y $\vec{E}(r) = 0$ para $r \leq R$. Esta fórmula se ha obtenido en el ejercicio 9 del capítulo 1.



Para calcular el potencial eléctrico deberemos tener en cuenta las dos regiones en las que queda dividido el espacio.

- para $r > R$ el potencial se puede hallar usando directamente la definición de diferencia de potencial $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ y considerando la expresión del campo eléctrico generado por un hilo infinito visto en el capítulo anterior.

$$V(r) - V(2R) = - \int_{2R}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = - \int_{2R}^r \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} dr = \left[-\frac{\sigma R \ln r}{\varepsilon_0} \right]_{2R}^r$$

$$V(r) - V(2R) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{r}$$

Es decir tenemos:

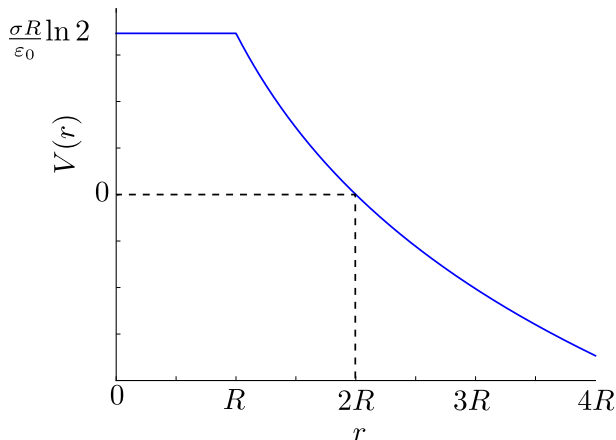
$$V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{r} \text{ para } r > R$$

- para $r \leq R$ deberemos aplicar el hecho de que el campo eléctrico en el interior del cilindro es nulo, puesto que el enunciado nos dice que el cilindro es conductor, lo que implica que el potencial en esta región toma un valor constante para cualquier punto. Para calcular este valor constante aplicaremos la continuidad de la función potencial en

la superficie de separación del cilindro. Con todo ello obtenemos

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{2R}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln 2 \text{ para } r \leq R$$

Si representamos gráficamente la función potencial obtenemos:



15. Hallar el campo eléctrico asociado a las siguientes funciones potencial eléctrico:

- $V_1(x, y, z) = x^2y + yz$.
- $V_2(x, y, z) = x^2yz + yze^{-x}$.

Solución

Para hallar el campo eléctrico asociado a la función potencial eléctrico deberemos calcular menos el gradiente de la correspondiente función potencial.

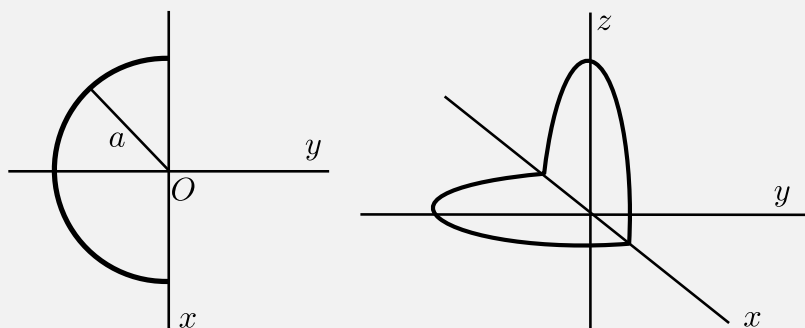
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{z}\right)$$

De este modo obtenemos:

$$\vec{E}_1 = -\left(2xy\vec{i} + (x^2 + z)\vec{j} + y\vec{z}\right)$$

$$\vec{E}_2 = -(2xyz - yze^{-x})\vec{i} - (x^2z + ze^{-x})\vec{j} - (x^2z + ye^{-x})\vec{k}$$

16. Disponemos de dos semiaros con densidad de carga λ repartida uniformemente. Uno de los semiaros se encuentra en el semiplano xy para $y < 0$ y con su centro en el origen. El otro semiaro se encuentra en el semiplano xz con $z > 0$ y su centro también coincide con el origen. Ambos semiaros tienen radio a . Calcule el potencial producido por los semiaros en el origen.



Solución

Para resolver el problema debemos tratar los dos semiaros por separado. Primero consideramos el semiaro situado en el plano xy . Para encontrar el potencial en el origen de coordenadas consideramos un pequeño trozo del aro de longitud $ad\theta$ siendo $d\theta$ el diferencial de ángulo. Este elemento contiene una carga $dq = \lambda ad\theta$. El potencial en el origen se puede calcular integrando todas las contribuciones $dV = Kdq/a$:

$$V_1 = \int_0^\pi \frac{Kdq}{a} = \int_0^\pi \frac{K\lambda ad\theta}{a} = K\pi\lambda$$

La contribución del otro semiaro es idéntica siendo el potencial total:

$$V_1 + V_2 = 2K\pi\lambda$$

17. Una esfera conductora de radio $R = 1$ m se encuentra cargada con una densidad superficial de carga $\sigma = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{4\pi} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. Disponemos de una carga puntual $q = 1$ C que podemos desplazar a nuestro antojo. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico en los siguientes desplazamientos:

- Movemos la carga de $r = 0$ cm a $r = 3$ cm dentro de la esfera, siendo r la distancia al centro de la esfera.
- Alejamos la carga de $r = 1$ m hasta una distancia de $r = 2$ m, siendo r la distancia al centro de la esfera.
- Damos una vuelta completa a la esfera con la carga.

Solución

a) En el interior de un conductor en equilibrio el campo eléctrico es nulo, por lo tanto el trabajo de mover la carga es nulo al no haber fuerza electrostática sobre la carga puntual.

b) En esta segunda situación el campo eléctrico lo genera la esfera cargada, por lo tanto, tenemos un potencial eléctrico similar al potencial generado por una carga puntual situada en el centro de la esfera y de valor $Q = 4\pi R^2 \sigma = 1 \cdot 10^{-6}$ C. El potencial eléctrico es entonces: $V(r) = KQ/r$ V.

El trabajo realizado por el campo eléctrico para alejar la carga a un metro de la esfera es:

$$\Delta W = -q\Delta V = -q(V(2) - V(1)) = -q \left(\frac{KQ}{2} - \frac{KQ}{1} \right) = 4500 \text{ J}$$

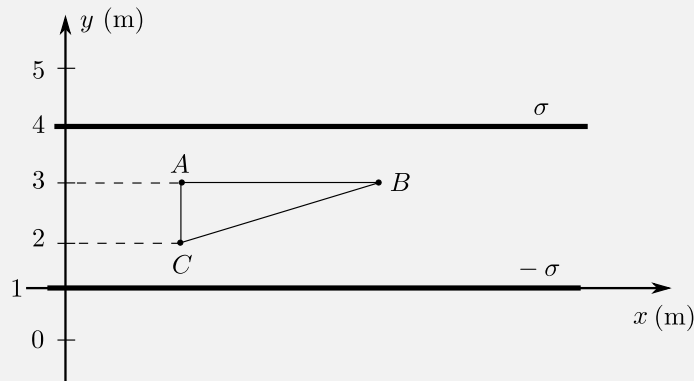
Conviene aquí hacer un comentario acerca de la distribución de carga sobre la esfera conductora. Hemos asumido que las cargas de la esfera no se mueven al acercar una carga q . Sin embargo, al acercar la carga q hacia la superficie conductora, las cargas de la esfera experimentarán una fuerza que aumentará conforme nos acerquemos a ellas, lo que generará una redistribución de las cargas sobre la superficie. Esto implica que el potencial alrededor se verá modificado y por tanto el valor del trabajo también. El cálculo anterior es una aproximación.

c) Si mantenemos la distancia al centro constante, podemos ver que el potencial es idéntico en cualquier punto de este recorrido. Como tal, el trabajo realizado sobre la carga es nulo al ser la diferencia de potencial nula.

Otra forma de justificar este resultado sería teniendo en cuenta que la fuerza eléctrica es conservativa, por lo tanto si salimos de un punto y volvemos al mismo la diferencia de potencial es nula y también el trabajo del campo.

18. Se disponen dos planos infinitos paralelos de densidades σ y $-\sigma$ tal y como se muestra en la figura adjunta. Tenemos una carga negativa $q = -1 \mu\text{C}$ que podemos desplazar.

- ¿Cuál es el valor y dirección del campo entre las placas?
- Calcular el trabajo del campo eléctrico para mover q de A a C.
- Calcular el trabajo del campo eléctrico para mover q de A a B a C.
- Deducir la diferencia de potencial entre A y C.



Solución

a) Tenemos entre placas para $x \in [1, 4]$ la superposición de dos campos generados por planos indefinidos:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga de A a C, calcularemos la integral siguiente:

$$W = \int_A^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^C (q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = \int_3^2 \left(-q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}\right) \cdot (\vec{j}dy) = -\left[\frac{q\sigma}{\varepsilon_0}y\right]_3^2 = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} \text{ J}$$

c) Ahora queremos calcular el trabajo que necesitamos para mover la partícula siguiendo el trayecto $A \rightarrow B \rightarrow C$. Durante el tramo de A a B, el campo eléctrico es perpendicular al trayecto, por lo tanto, la contribución al trabajo es cero al ser el producto escalar nulo. El trabajo total es:

$$W = \int_A^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = 0 + \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l}$$

La integral correspondiente al último tramo $B \rightarrow C$ se resuelve sabiendo que $\vec{F}_e = -q\sigma/\varepsilon_0 \vec{j}$ y que el vector $d\vec{l}$ se puede expresar como $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$. Se calcula el producto escalar $\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -q\sigma/\varepsilon_0 \vec{j} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = -q\sigma/\varepsilon_0 dy$. Integraremos únicamente a lo largo del eje y entre las coordenadas 3 y 2:

$$W = \int_B^C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_3^2 -\frac{q\sigma}{\varepsilon_0} dy = -\left[\frac{q\sigma}{\varepsilon_0} y\right]_3^2 = \frac{q\sigma}{\varepsilon_0} \text{ J}$$

d) La diferencia de potencial entre A y C se calcula aplicando la definición de diferencia de potencial:

$$\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_3^2 \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \vec{j} \cdot (\vec{j} dy) = \left[\frac{\sigma}{\varepsilon_0} y\right]_3^2$$

$$\Delta V = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \text{ V}$$

También se podría calcular haciendo uso de la relación entre trabajo y energía potencial, de este modo:

$$W = -q\Delta V \rightarrow \Delta V = \frac{W}{-q} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0} \text{ V}$$

19. Dos esferas de masas m_1 y m_2 están cargadas con q_1 y q_2 respectivamente. Inicialmente las esferas se encuentran en reposo a una distancia de d_i cuando, debido a la fuerza eléctrica se ponen en movimiento. Hallar las velocidades de las esferas cuando se encuentran a una distancia d_f .

Solución

Al no considerarse fuerzas de rozamiento en el problema podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. En un estado

inicial tenemos un balance de energía cinética E_c^i y potencial electrostática U_p^i :

$$E_c^i = 0$$

$$U_p^i = K \frac{q_1 q_2}{d_i}$$

Al final del proceso tenemos las siguientes energías:

$$E_c^f = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

$$U_p^f = K \frac{q_1 q_2}{d_f}$$

Tenemos la conservación de la energía mecánica que permite establecer una relación entre las velocidades finales $v_{1,f}$ y $v_{2,f}$:

$$E_c^i + U_p^i = E_c^f + U_p^f$$

Sustituimos las expresiones de las energías y operando llegamos a la siguiente expresión:

$$K q_1 q_2 \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

La otra ecuación necesaria involucra la conservación del momento lineal del sistema $\vec{p} = cte$.

$$m_1 \vec{v}_{1,i} + m_2 \vec{v}_{2,i} = m_1 \vec{v}_{1,f} + m_2 \vec{v}_{2,f}$$

Siendo las velocidades iniciales $v_{1,i}$ y $v_{2,i}$ nulas, la ecuación correspondiente a la conservación del momento lineal proyectando sobre el eje del movimiento es:

$$0 = m_1 v_{1,f} - m_2 v_{2,f}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones siguientes:

$$K q_1 q_2 \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right) = \frac{1}{2} m_1 (v_{1,f})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{2,f})^2$$

$$m_1 v_{1,f} - m_2 v_{2,f} = 0$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos da como solución:

$$v_{1,f} = -\alpha \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha}}$$

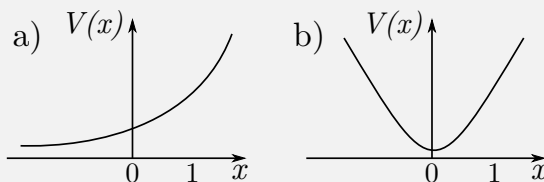
$$v_{2,f} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha}}$$

siendo

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\beta = \frac{2Kq_1q_2}{m_1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_f} \right)$$

20. Representamos la función potencial $V(x)$ en función de x para dos casos diferentes. Describa en ambos casos el efecto del potencial sobre una carga puntual $q > 0$ libre inicialmente situada en $x = 1\text{m}$ para los dos casos.



Solución

Para resolver este problema lo más sencillo es recordar que el campo eléctrico siempre se dirige de potenciales altos a potenciales bajos, con esto en mente, analizaremos los dos potenciales que nos proponen.

a) En este caso el campo eléctrico irá dirigido según el vector $-\vec{i}$, como la carga q es positiva, la fuerza que actuará sobre ella también irá dirigida según $-\vec{i}$ y por lo tanto la partícula acabará en $x = -\infty$.

b) En este caso observamos que aparece un mínimo de potencial en el centro, lo que nos divide el espacio en dos regiones diferentes. En $x > 0$ el campo eléctrico se dirige de derecha a izquierda ($-\vec{i}$) mientras que para $x < 0$ se dirige de izquierda a derecha ($+\vec{i}$). Por lo tanto, la partícula que inicialmente hemos depositado en $x = 1\text{ m}$ experimentará una fuerza hacia la izquierda que hará que su velocidad aumente. Este efecto durará hasta el momento en el que la partícula pase a la región $x < 0$, en ese momento el campo eléctrico cambiará de sentido, y por lo tanto la fuerza. Esto hará que la partícula se vaya frenando hasta detenerse. Una vez que se detenga, al estar situada en la región $x < 0$, la fuerza hará que vuelva hacia la derecha, aumentando su velocidad hasta que pase a la región $x > 0$, donde nuevamente el campo eléctrico cambiará de sentido y hará que la partícula se vuelva a frenar. Por lo tanto, en este

caso la partícula realizará un movimiento de vaivén en torno al mínimo de la función potencial.

Observe el alumno que en todo momento hemos despreciado el efecto radiativo que se produce cuando una carga se desplaza y que hace que la energía de la partícula disminuya en el tiempo. Este efecto está muy alejado de los conocimientos de un alumno de cursos básicos de física, por lo que no entramos en profundidad en este problema conceptual y simplemente hacemos una descripción generalista.

21. Una esfera metálica aislada de radio 10 cm se carga a un potencial de 1000 V. Se toca la esfera con otra, también aislada de 2 cm de diámetro que a continuación se descarga. Se repite la operación 5 veces.

- a) La carga de la primera esfera antes de ser tocada.
- b) La carga de dicha esfera después de la quinta operación una vez que el sistema alcanza el equilibrio electrostático.

Solución

a) La primera esfera antes de ser tocada por la segunda tiene un potencial de $V = 1000 \text{ V}$, por tanto:

$$V = K \frac{q}{r_1} = 1000 \text{ V}$$

Despejamos q con un radio $r_1 = 10 \text{ cm}$:

$$q = \frac{V r_1}{K} = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

b) Al tocar la segunda esfera, la carga inicialmente localizada sobre la primera se reparte entre los dos conductores. Llamaremos q_1 la carga de la esfera de radio $r_1 = 10 \text{ cm}$ y q_2 a la carga de la esfera de radio $r_2 = 2 \text{ cm}$. Después del contacto, tendremos la relación:

$$q = q_1 + q_2$$

Además, por el hecho de estar en contacto, ambos conductores pasarán a tener el mismo potencial (si no lo estuviesen, habría una diferencia de potencial entre ambos conductores y por lo tanto un campo eléctrico que haría que las cargas no estuviesen en equilibrio electrostático)

$$V = K \frac{q_1}{r_1} = K \frac{q_2}{r_2}$$

La carga q_1 después de la primera iteración es:

$$q_1 = q - q_2 = q - \frac{q_1 r_2}{r_1}$$

Factorizamos q_1 :

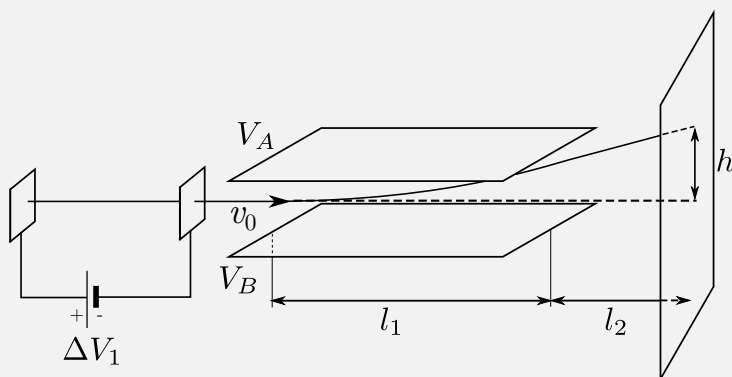
$$q_1 = \frac{q}{1 + \frac{r_2}{r_1}} = q \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

En cada iteración se retira siempre la misma proporción de carga de la esfera 1 de modo que al cabo de cinco iteraciones la carga remanente en la esfera será:

$$q_1(5) = q \left(\frac{r_1}{r_1 + r_2} \right)^5 = 4,46 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

22. Se dispone de un aparato para desviar iones mediante campos eléctricos. En una primera sección los iones, inicialmente en reposo, son acelerados mediante un campo eléctrico horizontal generado entre dos electrodos con una diferencia de potencial ΔV_1 entre ellos. A continuación, las partículas entran con una velocidad v_0 en una región en la que existe un campo eléctrico vertical creado por dos placas paralelas mediante una diferencia de potencial ($V_B - V_A$) entre ellas. Al salir de la zona de campo vertical, las partículas chocan contra un panel vertical. (ver figura adjunta)

El problema consiste en determinar las diferencias de potencial adecuadas para tener una desviación vertical en la pantalla de altura h . Supondremos para todo el problema que los iones que queremos desviar tienen carga q positiva y masa m , además despreciaremos el efecto de la gravedad. Calcule:



- a) La velocidad v_0 al entrar entre las placas horizontales en función de la diferencia de potencial ΔV_1 .
- b) El campo eléctrico entre las placas horizontales en función de la diferencia de potencial $\Delta V_2 = V_B - V_A$ si las placas están separadas una distancia d_1 .
- c) Sabiendo que la longitud de las placas es l_1 , calcular en función de ΔV_2 , v_0 y los parámetros del problema el ángulo α que forma la trayectoria de salida de las partículas con la horizontal.
- d) La desviación vertical h en la pantalla en función de los parámetros del problema. Demostrar que la distancia h no depende ni de la masa ni de la carga de la partícula.
- e) Si suponemos una diferencia de potencial $\Delta V_1 = 100$ V, calcule la diferencia de potencial ΔV_2 necesaria para obtener una deflexión h de 10 cm.

Datos: $l_1 = 0,5$ m, $l_2 = 1$ m, $d_1 = 10$ cm

Nota: Normalmente, debido a que las partículas cargadas tienen masas muy pequeñas, en este tipo de problemas se desprecia el efecto de la gravedad en el movimiento de la partícula.

Solución

a) Puesto que la única fuerza que está actuando es la fuerza eléctrica y sabemos que es conservativa, podemos aplicar el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad v_0 . El trabajo realizado por el campo eléctrico se transforma en energía cinética, es decir, la partícula se acelera y va ganando energía cinética a costa de perder energía potencial electrostática.

$$\Delta E_m = \Delta U_p + \Delta E_c = q\Delta V_1 + \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

En este caso la diferencia de potencial ΔV_1 debe ser negativa ya que la carga es positiva, es decir, la partícula se mueve de forma espontánea hacia las regiones de potencial bajo y por lo tanto $\Delta V_1 < 0$

$$-q\Delta V_1 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

lo cual nos proporciona:

$$v_0 = \sqrt{\frac{-2q\Delta V_1}{m}}$$

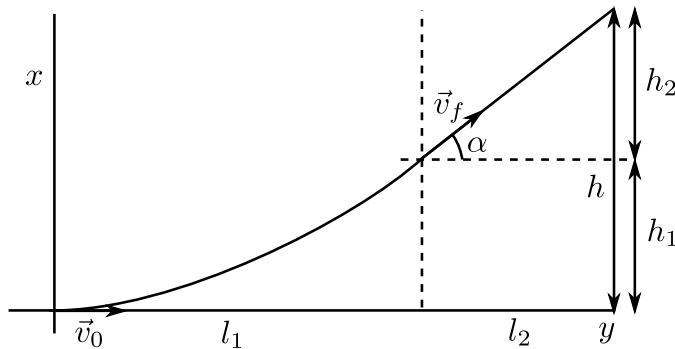
b) El campo generado por los dos planos paralelos se halla a partir de la diferencia de potencial $\Delta V_2 = V_B - V_A$:

$$E = \frac{\Delta V_2}{d_1}$$

La orientación del campo depende de qué placa tenga el mayor potencial pues el campo eléctrico siempre va de potencial mayor a menor.

c) Para obtener el ángulo de salida tenemos que calcular la trayectoria de la partícula en la zona en la que se dispone del campo eléctrico vertical uniforme (l_1).

La velocidad inicial v_0 de la partícula es perpendicular al campo eléctrico existente en esta segunda región y la aceleración de la partícula es vertical, por lo que estamos en un caso de tiro parabólico con aceleración constante. Si descomponemos la trayectoria según los ejes x e y , tenemos un movimiento rectilíneo uniforme en el eje x y rectilíneo uniformemente acelerado según el eje y .



En la figura observamos que en este caso la desviación de la partícula es hacia arriba ($a > 0$), es decir, que el campo eléctrico en esa región también apunta hacia arriba, o lo que es lo mismo $\Delta V_2 = (V_B - V_A) > 0$. Las ecuaciones del movimiento nos quedan:

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

A la salida de la región donde hay campo, el vector velocidad vendrá dado por:

$$\vec{v}_f = v_0 \vec{i} + at_f \vec{j}$$

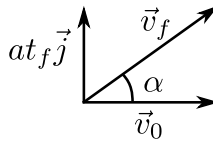
con una aceleración

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{q\Delta V_2}{md_1}$$

El tiempo t_f de recorrido se puede hallar mediante la velocidad horizontal v_0 , pues tal y como hemos dicho antes, en el eje x la partícula describe un movimiento rectilíneo uniforme.

$$t_f = \frac{l_1}{v_0}$$

Para calcular el ángulo que forma el vector velocidad de salida v_f con la horizontal podemos ayudarnos del siguiente gráfico:



El ángulo se puede obtener aplicando trigonometría al triángulo formado por el vector velocidad y sus componentes $v_x = v_0$ y $v_y = a t_f$:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a t_f}{v_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a l_1 / v_0}{v_0} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{q\Delta V_2 l_1}{md_1 v_0^2} \right)$$

d) Una vez que la partícula ha salido del campo eléctrico, sigue un movimiento rectilíneo uniforme hasta la pantalla vertical donde acaba impactando. La altura h se obtiene sumando las alturas h_1 y h_2 que se indican en el gráfico anterior. La altura h_1 es la altura final de la partícula cuando sale de la región delimitada por las placas horizontales, es decir, $h_1 = y(t_f)$. La altura h_2 se obtiene con el triángulo rectángulo de lado l_2 y altura h_2 , de donde deducimos $h_2 = l_2 \tan \alpha$. De este modo:

$$h = l_2 \tan \alpha + y(t_f) = l_2 \frac{q\Delta V_2 l_1}{md_1 v_0^2} + \frac{q\Delta V_2 l_1^2}{2md_1 v_0^2} = \frac{q\Delta V_2 l_1}{2md_1 v_0^2} (2l_2 + l_1)$$

Si sustituimos la velocidad inicial v_0 obtenemos:

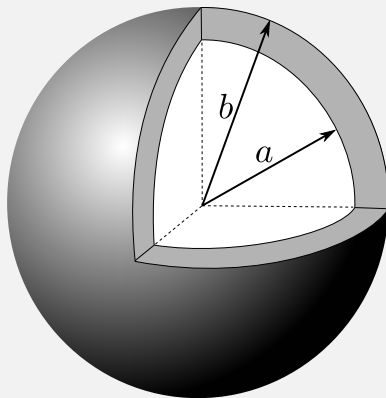
$$h = \frac{\Delta V_2 l_1}{4\Delta V_1 d_1} (2l_2 + l_1)$$

Con esta fórmula hemos demostrado que la altura h no depende de la carga ni de la masa de la partícula.

e) Calculamos ΔV_2 para obtener una deflexión de 10 cm

$$\Delta V_2 = \frac{4\Delta V_1 d_1}{l_1(2l_2 + l_1)} = 3,2 \text{ V}$$

23. Un cascarón esférico tiene radio interno a y radio externo b . Si la región $a \leq r \leq b$ tiene una densidad de carga eléctrica $\rho \text{ C}\cdot\text{m}^{-3}$ uniformemente distribuida. Determine el campo eléctrico y el potencial para cualquier punto del espacio.



Solución

Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto vamos a aprovechar la simetría esférica del problema y aplicar el teorema de Gauss. En este caso el campo eléctrico es radial y tiene valor constante $E(r)$ para cualquier punto situado a una distancia r fija.

Los tres casos importantes son:

- $r < a$ La esfera de Gauss no contiene carga ($q_{int} = 0$), por tanto:

$$\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r$$

- $a < r \leq b$ La esfera de Gauss contiene una carga interior que depende del volumen del cascarón que abarca dicha superficie:

$$q_{int} = \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)\rho$$

De este modo la Ley de Gauss nos queda de la siguiente manera,

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi(r^3 - a^3)}{3\epsilon_0}$$

Usando la simetría esférica del campo eléctrico podemos hallar el resultado de la integral:

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E(r)$$

Combinando ambos resultados y obtenemos:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho(r^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

- $r > b$ La esfera de Gauss contiene toda la carga:

$$\oint_S \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0}$$

Usando de nuevo la simetría del campo eléctrico podemos hallar:

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

En este problema podemos usar el convenio del valor de potencial eléctrico nulo en el infinito: $V(\infty) = 0$ V. Para el potencial eléctrico en cualquier punto debemos proceder al revés, primero calcularemos el potencial para las partes externas para posteriormente calcularlo para las regiones internas. Procediendo de este modo aseguraremos la continuidad del potencial.

De nuevo dividimos el espacio en varias partes:

- $r > b$ El potencial es equivalente al potencial generado por una partícula puntual con una carga equivalente a la total del casquete esférico: De este modo si la carga total del casquete es:

$$Q_t = \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3}$$

el potencial eléctrico vendrá dado por:

$$V(r) = K \frac{Q_t}{r} = K \frac{\rho 4\pi(b^3 - a^3)}{3r} = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0 r}$$

- $a < r \leq b$ El potencial puede hallarse usando la definición de diferencia de potencial entre las distancias b y r al centro de la esfera y considerando la expresión del campo eléctrico que hemos obtenido en el apartado anterior para esta región. Para realizar esta integral vamos a hacer uso de una nueva variable r' que nos permite definir

$d\vec{l} = dr\vec{j}$. Esta nueva variable la usamos porque la variable r ya se ha definido como la distancia al centro del casquete.

$$V(r) - V(b) = - \int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^r \frac{\rho(r'^3 - a^3)}{3\epsilon_0 r'^2} dr' =$$

$$- \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r'^2}{2} + \frac{a^3}{r'} \right]_b^r = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \left(\frac{b^2}{2} + \frac{a^3}{b} \right) \right]$$

Despejamos el potencial $V(r)$:

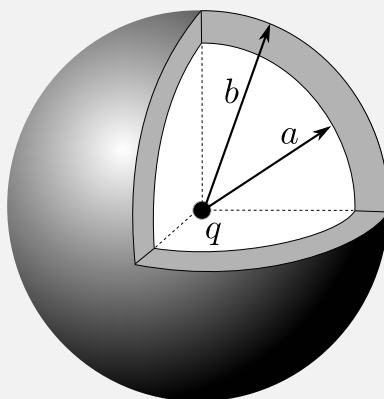
$$V(r) = - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{a^3}{r} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^3}{b} \right) + V(b) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} \right)$$

Donde el valor de $V(b)$ lo podemos obtener particularizando la expresión de $V(r)$ obtenida en la zona exterior al cascarón para el caso $r = b$.

- $r \leq a$ Tenemos que tener en cuenta que en esta región el campo eléctrico es nulo y por lo tanto el valor del potencial es constante en toda esta zona. Para calcular su valor simplemente debemos particularizar la expresión obtenida anteriormente para el caso $r = a$:

$$V(r) = V(a) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{a} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (b^2 - a^2)$$

24. Tenemos una corteza esférica conductora de radio interno $a = 20$ cm y radio externo $b = 30$ cm cargada con una carga Q . En el centro de la corteza se sitúa una segunda carga q . Una vez alcanzado el equilibrio electrostático y sabiendo que el campo eléctrico en $r = 10$ cm vale $\vec{E}(r) = -2,7 \cdot 10^6 \vec{u}_r \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ y el potencial para $r = 40$ cm es $V(r) = -22500 \text{ V}$ (para obtener este valor se ha considerado que $V(\infty) = 0 \text{ V}$) calcule:
- Los valores de las cargas Q y q .
 - El potencial eléctrico en $r = 15$ cm.
 - El trabajo realizado por el campo eléctrico para pasar una carga $q_0 = -1 \text{ nC}$ desde $r = 25$ cm hasta $r = 40$ cm. ¿Es espontáneo el movimiento?.



Solución

a) El campo eléctrico en el interior del cascarón (para $r < a$) se debe únicamente a la carga puntual situada en el centro de la corteza. Por tanto:

$$\vec{E}(r) = \frac{Kq}{r^2} \vec{u}_r = -2,7 \cdot 10^6 \vec{u}_r \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Despejamos la carga eléctrica q :

$$q = \frac{-2,7 \cdot 10^6 \cdot (0,1)^2}{9 \cdot 10^9} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

El dato del potencial eléctrico nos permite hallar la carga de la corteza metálica, ya que dada la simetría del problema podemos considerar que

ese potencial es similar al que se generaría considerando ambas cargas como puntuales y situadas en el centro de la corteza esférica. De este modo, para todos los puntos externos a la corteza esférica ($r \geq b$) tendremos:

$$V(r) = \frac{K(Q + q)}{r}$$

Considerando el valor numérico que nos proporciona el enunciado y despejando la carga Q obtenemos:

$$Q = \frac{-22500 \cdot 0,4}{9 \cdot 10^9} - q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b) Para calcular el potencial en el interior del cascarón necesitamos primero calcular el potencial para $r = a$ y después calcular la diferencia de potencial provocada por la carga puntual en el interior. Sabiendo que en el conductor el potencial es uniforme en todo el interior tenemos $V(a) = V(b)$ y podemos deducir:

$$V(b) = V(a) = \frac{K(Q + q)}{b} = -30000 \text{ V}$$

La diferencia de potencial entre un punto a una distancia r y el radio a se debe únicamente al campo eléctrico generado por la carga puntual:

$$V(r) - V(a) = \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a}$$

Despejando $V(r)$, tenemos :

$$V(r) = V(a) + \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a} = -30000 + \frac{Kq}{r} - \frac{Kq}{a}$$

Sustituimos para $r = 15 \text{ cm}$:

$$V(0,15) = -30000 - 180000 + 135000 = -75000 \text{ V}$$

c) Para calcular el trabajo de una partícula cargada desde $r = 25 \text{ cm}$ hasta $r = 40 \text{ cm}$ debemos calcular la diferencia de potencial entre ambos puntos. El potencial en el interior del conductor es constante y será el mismo que tome en la superficie externa $r = 30 \text{ cm}$. Únicamente necesitamos calcular la diferencia de potencial entre los radios $r = 30 \text{ cm}$ y $r = 40 \text{ cm}$:

$$V(0,4) - V(0,3) = \frac{K(Q + q)}{0,4} - \frac{K(Q + q)}{0,3} = 7500 \text{ V}$$

El trabajo buscado es por tanto:

$$W = -q_0(V(0,4) - V(0,3)) = 1 \cdot 10^{-9} \cdot 7500 = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Como el trabajo es positivo, el movimiento de la carga será espontáneo.

25. Un plano infinito se extiende sobre el plano xy y se deposita sobre este una densidad de carga $\sigma_1 = 5 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Se sitúa otro plano cargado paralelo y 2 m por encima del primero con una densidad de carga $\sigma_2 = -2 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Aplicando la definición de diferencial de potencial eléctrico, calcule la diferencia de potencial entre los puntos A(0,0,3) m y B(0,0,5) m.

Solución

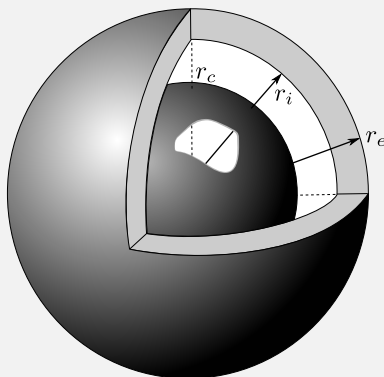
El cálculo de la diferencia de potencial entre dos puntos de coordenadas $z_A = 3 \text{ m}$ y $z_B = 5 \text{ m}$ se obtiene integrando directamente el campo. Para ello primero debemos calcular el campo eléctrico que hay en la región que se nos pide, en este caso, y como el campo está siendo generado por dos planos infinitos de densidades σ_1 y σ_2

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} \vec{k} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \vec{k}$$

Una vez obtenido el campo eléctrico, aplicamos la propia definición de diferencia de potencial entre dos puntos:

$$\begin{aligned} \Delta V = V(A) - V(B) &= - \int_{z_A}^{z_B} \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} z \right]_{z_A}^{z_B} = \\ &= - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} (z_B - z_A) = -338983 \text{ V} \end{aligned}$$

26. Una carcasa metálica neutra de radio interior $r_i = 10$ cm y de radio exterior $r_e = 15$ cm encierra una corteza esférica de radio $r_c = 5$ cm con una densidad de carga uniforme $\sigma_c = 10 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Los centros de la carcasa y de la corteza coinciden en $O(0,0,0)$. Calcule el potencial a lo largo del semi-eje $z \geq 0$.



Solución

Para calcular el potencial para cualquier punto del eje z deberemos considerar las tres regiones en las que la carcasa divide el espacio. Comenzaremos estudiando el problema en la región externa a la carcasa puesto que vamos a considerar como referencia del potencial su valor en el infinito, el cual consideraremos nulo. $V(z \rightarrow \infty) = 0$ V.

- $z \geq 15$ cm. Para puntos externos a la carcasa, el potencial sería similar al generado por una carga puntual de valor la carga total del sistema, situada en el origen de coordenadas. Calculamos la carga total de la esfera $q = 4\pi r_c^2 \sigma = 0,1\pi \mu\text{C}$, con lo que obtenemos:

$$V_{r \geq 15 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} \text{ V}$$

- $10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}$. En esta región el campo eléctrico es nulo, por lo tanto el potencial deberá permanecer constante a lo largo de toda esta zona. Para calcular su valor numérico simplemente debemos exigir la continuidad del potencial, es decir, en esta región del espacio el potencial eléctrico toma el mismo valor que en el límite exterior de la

carcasa $z = 15$ cm:

$$V_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,15} \text{ V}$$

- $5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}$. Para calcular el potencial eléctrico en esta región podemos o bien aplicar su definición $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ e integrar entre un punto genérico de la región, r , y el borde interior del casquete esférico, o bien resolver la integral indefinida del campo y exigir la continuidad del potencial, de modo que obtengamos la constante de integración.

En este caso, y por cambiar el procedimiento seguido en otros ejercicios anteriores, aplicaremos el segundo método. Así, y teniendo en cuenta que el campo eléctrico es el generado por la corteza esférica cuya carga total hemos calculado anteriormente, la integración indefinida que tenemos es:

$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = - \int \vec{E} \cdot d\vec{z} = - \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z^2} + C \text{ V}$$

$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} + C \text{ V}$$

Para calcular el valor de la constante de integración, C , deberemos volver a aplicar la continuidad de la función potencial en la superficie de separación de ambas regiones, $V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}}(10 \text{ cm}) = V_{10 \text{ cm} \leq z \leq 15 \text{ cm}}(10 \text{ cm})$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,1} + C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,15}$$

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 0,1\pi \cdot 10^{-6} \left(\frac{1}{0,15} - \frac{1}{0,1} \right) = -\frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

Una vez calculada la constante de integración C , la expresión del potencial en esta región queda:

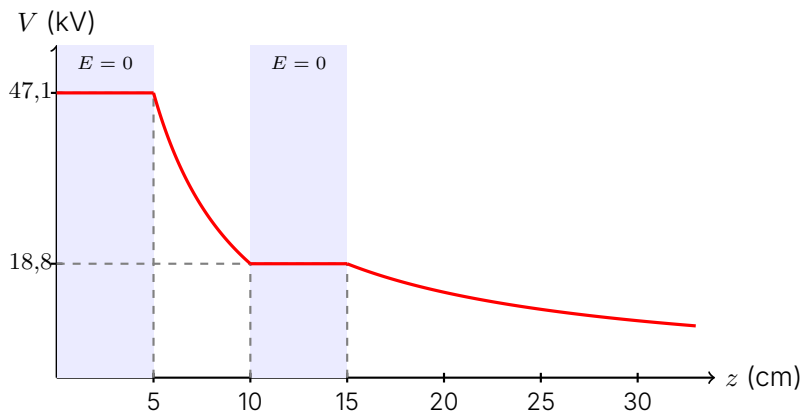
$$V_{5 \text{ cm} \leq z \leq 10 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{z} - \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

- $z < 5 \text{ cm}$. Finalmente, en la última región el campo eléctrico vuelve a ser nulo y, por lo tanto, el potencial volverá a ser constante; en este caso, su valor será el mismo que toma la función potencial en la superficie externa de la esfera $z = 5 \text{ cm}$

$$V_{z \leq 5 \text{ cm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{0,05} - \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \frac{10}{3} \text{ V}$$

$$V_{z \leq 5 \text{ cm}} = \frac{0,1\pi \cdot 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{50}{3} \right) \text{ V}$$

Como resumen podemos representar gráficamente el potencial de modo que podamos ver cómo evoluciona en función de z .

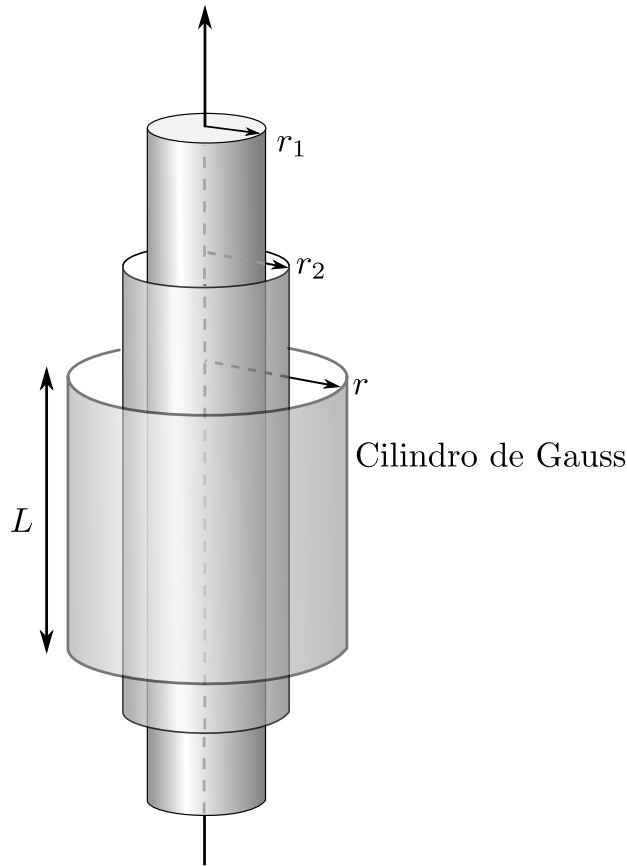


27. Consideramos dos cilindros coaxiales huecos muy largos y de radios r_1 y r_2 siendo $r_2 > r_1$. Los cilindros tienen una densidad superficial de carga uniforme σ_1 y σ_2 ambas positivas. Hallar:

- El campo eléctrico en función de la distancia al eje para todo el espacio.
- La diferencia de potencial entre los dos cilindros en función de la densidad de carga.

Solución

a) Para calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio deberemos dividir el problema en tres regiones. En cada una de estas regiones aplicaremos la Ley de Gauss para lo cual consideraremos como superficie gaussiana cilindros de radio arbitrario r y longitud L coaxiales con los cilindros cargados.



Tal y como se ha comentado en ejercicios anteriores, el campo eléctrico generado por un cilindro infinito es perpendicular a la superficie lateral del mismo, por lo tanto, el flujo eléctrico únicamente se produce a través de la superficie lateral de la superficie gaussiana. De modo que a la hora de aplicar la ley de Gauss, la ecuación que nos quedará es:

$$\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E S_{lateral} = E 2\pi r L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Procedamos a calcular el campo eléctrico en las diferentes regiones.

- $r < r_1$. En esta región la carga encerrada es nula y por lo tanto:

$$\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

- $r_1 < r < r_2$. En la región entre los cilindros cargados la única carga interna es la que aporta el cilindro de radio r_1 .

$$\phi_e = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1 2\pi r_1 L}{\varepsilon_0} = E 2\pi r L$$

Puesto que las cargas son positivas el sentido del campo eléctrico será positivo según la dirección radial, es decir:

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

- $r > r_2$ En la región externa el campo eléctrico total será la suma de los campos generados por ambos cilindros. En este caso los dos cilindros tienen carga positiva y procediendo de forma similar al caso anterior obtenemos que el campo total será:

$$\vec{E}(r) = \left(\frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 r_2}{r \varepsilon_0} \right) \vec{u}_r$$

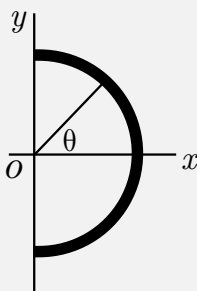
b) Para calcular la diferencia de potencial entre ambos cilindros simplemente debemos aplicar la definición de diferencia de potencial e integrar. En el caso que nos piden, el campo eléctrico que hay entre ambos cilindros únicamente es el campo generado por el cilindro de radio r_1 , por lo tanto,

$$\Delta V = V(r_2) - V(r_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma_1 r_1}{r \varepsilon_0} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = - \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

28. Disponemos de un semicirculo de radio a con densidad lineal de carga λ **no uniforme**:

$$\lambda(\theta) = 1 \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$$

Calcule el potencial producido por el semicirculo en el origen O .



Solución

Para calcular el potencial en el origen es preciso plantear una integral que va a sumar los efectos de todas las partes del aro. Un elemento de

longitud $dl = ad\theta$ del aro llevará una carga dq que dependerá del ángulo: $dq = \lambda(\theta)ad\theta$. Integramos a lo largo del aro para obtener el potencial:

$$V(0) = \int \frac{Kdq}{r} = \int_0^\pi \frac{Ka\lambda(\theta)}{a} d\theta$$

La distancia al origen de cada elemento de longitud $ad\theta$ es constante y podemos sustituir la expresión de la densidad de carga en la integral:

$$V(0) = \int_0^\pi K \cdot 10^{-6} \cos^2(\theta) d\theta = K \cdot 10^{-6} \frac{\pi}{2} + C \text{ V}$$

siendo C una constante de integración que dependerá de dónde tomemos el origen para la función potencial. Si consideramos que $V(\infty) = 0$, entonces $C = 0 \text{ V}$.

29. En una región del espacio el campo eléctrico viene expresado por:

$$\vec{E}(x, y, z) = 10\vec{i} + 4y\vec{j} + \vec{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Calcular el trabajo necesario para mover una carga $Q = 0,1 \mu\text{C}$ inicialmente situada en el punto $P_0(0, 2, 0)$ m una distancia $\Delta l = 1 \text{ mm}$ según las siguientes direcciones:

- a) $\vec{i}$.
- b) $\vec{i} + \vec{j}$.
- c) $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Solución

Para calcular el trabajo que nos piden aplicaremos la definición de trabajo realizado por una fuerza:

$$W = \int_{P_0}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_0}^{P_f} Q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ahora, nos queda por determinar el trayecto de la partícula desde el punto inicial P_0 hasta el punto final P_f para cada uno de los casos propuestos.

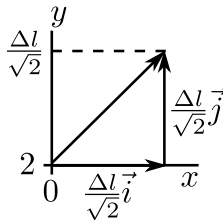
a) Primero evaluamos el elemento de trabajo dW antes de integrar:

$$dW = Q\vec{E} \cdot d\vec{l} = Q\vec{E} \cdot dx\vec{i} = Q10dx$$

La integración es inmediata al ser la dirección a lo largo del eje x entre 0 y Δl :

$$W = Q10\Delta l = 1 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) Este segundo apartado requiere un poco más de cuidado puesto que la dirección del desplazamiento ya no sigue uno de los ejes. El punto de salida es $P_0(0, 2, 0)$ y el punto de llegada será $P_f = P_0 + \vec{r}$, siendo $\vec{r} = \Delta l \cdot \vec{u} = \Delta l(\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ el vector desplazamiento. Haciendo esta suma, obtenemos que el punto final es $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0)$.



Para calcular la integral del trabajo haremos uso del hecho de que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa, y por lo tanto su integral no depende del camino seguido. En este caso integraremos primero siguiendo el eje x y luego el eje y (el lector puede comprobar que invirtiendo el orden de integración el resultado es el mismo).

Como únicamente la componente E_y del campo varía en función del punto del espacio en el que nos encontremos (en este caso solo depende de la coordenada y), podemos separar el cálculo en dos integrales independientes: una siguiendo el eje x de 0 a $\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}$ y otra siguiendo el eje y de $y = 2$ a $y = 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}$ según el eje y .

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} Q\vec{E}(x, 2, 0) \cdot \vec{i} dx + \int_2^{2+\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} Q\vec{E}(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, y, 0) \cdot \vec{j} dy = \\ &= Q \cdot [10x]_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} + Q [2y^2]_2^{2+\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}} = Q\Delta l \left[\frac{10}{\sqrt{2}} + \Delta l + \frac{8}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned}$$

$$W = 1,273 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

c) Este último apartado involucra de nuevo descomponer el trayecto, esta vez en tres tramos. Por la naturaleza del campo vamos a poder integrar primero según los ejes x y z antes de integrar la componente y .

Para calcular las coordenadas del punto de llegada, primero normalizaremos el vector desplazamiento,

$$\vec{u} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{|\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

A continuación al punto inicial le sumaremos el vector unitario anterior multiplicado por el módulo del desplazamiento Δl , $P_f = P_0 + \vec{u}\Delta l$, con lo que obtenemos que el punto de llegada es $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}})$.

Tenemos ahora tres integrales, una para cada eje de coordenadas:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}(x, 2, 0) \cdot \vec{i} dx + \int_2^{2-\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, y, 0\right) \cdot \vec{j} dy \\ &\quad + \int_0^{2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} Q\vec{E}\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, z\right) \cdot \vec{k} dz = \\ &= 10\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}Q + Q\left[4\frac{y^2}{2}\right]_2^{2-\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}} + 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}Q = Q\Delta l\left[\frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{\Delta l}{3}\right] \\ W &= 1,63 \cdot 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

Otra forma de afrontar este problema es aplicar la relación:

$$W_e = -\Delta U = -Q\Delta V.$$

Para ello, lo primero que debemos hacer es obtener la función $V(x, y, z)$. Puesto que el enunciado nos da la expresión del campo eléctrico podemos aplicar $\vec{E} = -\vec{grad}(V(x, y, z))$. Para obtener V podemos proceder por integración de los polinomios verificando que se obtiene siempre la igualdad anterior. Esto nos lleva a obtener la expresión:

$$V(x, y, z) = -10x - 2y^2 - z + C$$

donde C es una constante que depende del sistema de referencia que tomemos a la hora de definir el potencial electrostático. En nuestro caso y como lo que vamos a calcular es ΔV no tiene importancia y podremos considerar que $C = 0$. Procedamos al cálculo del trabajo en cada uno de los casos propuestos:

a) Al movernos Δl según la dirección $\vec{i}$, pasamos del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f = (\Delta l, 2, 0)$, con lo que el trabajo realizado por el campo vendrá dado por:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q\Delta V = -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q(V(\Delta l, 2, 0) - V(0, 2, 0)) = \\ &= -Q((-10\Delta l - 2 \cdot 2^2 - 0) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)) = Q10\Delta l \end{aligned}$$

$$W_e = 1 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

b) Ahora nos movemos Δl según la dirección $(\vec{i} + \vec{j})$, pasando del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0)$. En este caso el trabajo realizado por el campo será:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q\left(V\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}, 0\right) - V(0, 2, 0)\right) = \\ &= -Q\left(\left(-10\frac{\Delta l}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \left(2 + \frac{\Delta l}{\sqrt{2}}\right)^2 - 0\right) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)\right) \\ W_e &= 1,273 \cdot 10^{-9} \text{ J} \end{aligned}$$

c) Finalmente, nos movemos Δl según la dirección $(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$, pasando del punto $P_0 = (0, 2, 0)$ al punto $P_f(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}})$. El trabajo realizado por el campo será:

$$\begin{aligned} W_e &= -Q(V(P_f) - V(P_0)) = -Q\left(V\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}, 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right) - V(0, 2, 0)\right) = \\ &= -Q\left(\left(-10\frac{\Delta l}{\sqrt{6}} - 2 \cdot \left(2 - \frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right)^2 - 2\frac{\Delta l}{\sqrt{6}}\right) - (-10 \cdot 0 - 2 \cdot 2^2 - 0)\right) \\ W_e &= 1,63 \cdot 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

30. En una región del espacio el campo eléctrico viene expresado como:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= (y^2 - 2xyz^3)\vec{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\vec{j} + \\ &+ (6z^3 - 3x^2yz^2)\vec{k} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}. \end{aligned}$$

Calcule el trabajo necesario para mover una carga $Q = 1\mu\text{C}$ inicialmente situada en el punto $P_0(2, -1, 2)$ m hasta el punto $P_f(-1, 3, -2)$ m.

Solución

Este problema es el numéricamente más complejo de los que haremos de este estilo y por eso, a modo de resumen, lo resolveremos por dos métodos diferentes ofreciendo otras posibilidades.

Método 1 En este primer método que proponemos utilizaremos la relación que existe entre campo eléctrico y energía potencial.

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\text{grad}} V(x, y, z)$$

Esto nos permite obtener la función energía potencial $V(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \rightarrow V(x, y, z) = -xy^2 + x^2yz^3 + K_1(y, z)$$

$$E_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \rightarrow V(x, y, z) = -3y - xy^2 + x^2yz^3 + K_2(x, z)$$

$$E_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \rightarrow V(x, y, z) = -\frac{3}{2}z^4 + x^2yz^3 + K_3(x, y)$$

donde $K_1(y, z)$, $K_2(x, z)$ y $K_3(x, y)$ son funciones que contienen a los elementos que no aparecen en la expresión obtenida en cada una de las integrales pero sí en alguna de las otras.

Por ejemplo, el término $-3y$ únicamente aparece en la segunda expresión pero cumple los requisitos para poder estar contenido tanto en $K_1(y, z)$ como en $K_3(x, y)$. Si esto no ocurriese nos indicaría que o bien nos hemos equivocado en los cálculos o que el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$ que nos proporcionan no es conservativo y por lo tanto no podemos calcular la función potencial correspondiente.

Aclarado este punto, obtendremos la función potencial sin más que poner los diferentes términos que hemos obtenido en las integrales anteriores.

$$V(x, y, z) = -xy^2 + x^2yz^3 - 3y - \frac{3}{2}z^4 + C$$

donde C es una constante numérica de integración que dependerá del punto que tomemos como referencia para la función potencial. En este tipo de problemas, no es importante su valor ya que lo que nos interesa calcular es la variación de potencial entre dos puntos y por lo tanto el término C nos aparecerá en ambas expresiones, por ello consideraremos $C = 0$.

Es aconsejable que una vez obtenida la función $V(x, y, z)$ se realice el camino inverso y se compruebe que al hacer su gradiente se obtiene el campo eléctrico que nos propone el enunciado.

Finalmente, con la función potencial $V(x, y, z)$ podemos calcular la energía potencial de la partícula en los puntos entre los que se va a desplazar la partícula.

$$U_0 = U(2, -1, 2) = QV(2, -1, 2) = -55 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$U_f = U(-1, 3, -2) = QV(-1, 3, -2) = -48 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Si ahora aplicamos la relación entre trabajo y energía potencial, $W = -\Delta U$

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Método 2

En este segundo método vamos a aplicar directamente la definición de trabajo realizado por una fuerza $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Además, tendremos en cuenta que el campo eléctrico $\vec{E}$ es conservativo, por lo que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica asociada es independiente del camino que sigamos. Con el objetivo de realizar un ejercicio completo proponemos dos caminos distintos y comprobaremos que el trabajo realizado en ambos casos es el mismo y es el mismo al obtenido según el método anterior.

Camino 1

En este camino que proponemos, el trayecto desde el punto $P_0(2, -1, 2)$ m, hasta el punto $P_f(-1, 3, -2)$ m, lo dividiremos en tres tramos. En el primer tramo nos desplazaremos únicamente por el eje x pasando de $P_0(2, -1, 2)$ m al punto $P_1(-1, -1, 2)$ m, a continuación, nos desplazaremos por el eje y y pasaremos de $P_1(-1, -1, 2)$ m hasta el punto $P_2(-1, 3, 2)$ m. Finalmente, nos moveremos por el eje z y pasaremos de $P_2(-1, 3, 2)$ m hasta el punto final $P_f(-1, 3, -2)$ m. La ventaja de utilizar este tipo de caminos es que al desplazarnos por un eje, por ejemplo el x los valores de las variables y y z permanecen constantes y sus diferenciales respectivos son nulos ($dy = dz = 0$).

Recapitulando la trayectoria que proponemos en este primer trayecto sería:

$$P_0(2, -1, 2) \xrightarrow[y=-1, z=2]{dy=dz=0} P_1(-1, -1, 2) \xrightarrow[x=-1, z=2]{dx=dz=0} P_2(-1, 3, 2)$$

$$P_2(-1, 3, 2) \xrightarrow[x=-1, y=3]{dx=dy=0} P_f(-1, 3, -2)$$

Procedamos al cálculo del trabajo realizado por la fuerza en cada uno de los tramos indicados

$$\begin{aligned} W_1 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_x dx = \\ &= Q \int_2^{-1} E_x(x, -1, 2) dx = Q \int_2^{-1} (y^2 - 2xyz^3) dx = \\ &= Q \int_2^{-1} ((-1)^2 - 2x(-1)2^3) dx = -27 \cdot 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_y dy = \\
&Q \int_{-1}^3 E_y(-1, y, 2) dy = Q \int_{-1}^2 (3 + 2xy - x^2 z^3) dx = \\
&Q \int_{-1}^2 (3 + 2(-1)y - (-1)^2 2^3) dx = -28 \cdot 10^{-6} \text{ J}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_3 &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = Q \int E_z dz = \\
&Q \int_2^{-2} E_z(-1, 2, z) dz = Q \int_2^{-2} (6z^3 - 3x^2 y z^2) dx = \\
&Q \int_2^{-2} (6z^3 - 3(-1)^2 3z^2) dx = 48 \cdot 10^{-6} \text{ J}
\end{aligned}$$

Ahora únicamente nos queda sumar los trabajos en cada uno de los tramos y obtenemos el trabajo total

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = -27 \cdot 10^{-6} - 28 \cdot 10^{-6} + 48 \cdot 10^{-6} = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Este procedimiento lo podemos repetir pero cambiando el orden de los ejes por los que nos desplazamos, así otra opción sería:

$$\begin{aligned}
P_0(2, -1, 2) &\xrightarrow[x=2, z=2]{dx=dz=0} P_1(2, 3, 2) \xrightarrow[x=2, y=3]{dx=dy=0} P_2(2, 3, -2) \\
P_2(2, 3, -2) &\xrightarrow[y=3, z=-2]{dy=dz=0} P_f(-1, 3, -2)
\end{aligned}$$

O cualquiera de las otras que al lector se le ocurran (en este caso, al ser un desplazamiento de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, tenemos 6 posibles caminos).

Para cada trayectoria los trabajos pueden ser distintos, pero la suma de los trabajos siempre será la misma.

Camino 2

Tal y como hemos comentado y demostrado, el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es independiente de la trayectoria seguida por la partícula desplazada. Por eso, y puesto que las trayectorias propuestas en el apartado parecen un poco "artificiales", proponemos a continuación una segunda trayectoria que parecería en un principio algo más natural: esta trayectoria es la línea recta que une ambos puntos P_0 y P_f .

Para calcular el trabajo a través de la trayectoria propuesta debemos parametrizar la recta. Para ello, calculamos el vector que une ambos

puntos al que denominaremos $\vec{v}$:

$$\vec{v} = (-3, 4, -4)$$

Con este vector ya podemos proceder a parametrizar el tramo de la recta que une ambos puntos en función de un parámetro t :

$$\vec{r} = P_0 + t\vec{v} = (2, 1, 2) + t(-3, 4, -4) \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

Esto nos permite expresar las coordenadas x , y y z en función de t , así como sus diferenciales

$$x = 2 - 3t \rightarrow dx = -3dt$$

$$y = -1 + 4t \rightarrow dy = 4dt$$

$$z = 2 - 4t \rightarrow dz = -4dt$$

Procedamos a calcular el trabajo realizado por la fuerza eléctrica al desplazar la carga Q por la recta que une ambos puntos, para lo cual en la expresión del trabajo sustituiremos las coordenadas x , y y z y sus correspondientes diferenciales por sus expresiones en función del parámetro t

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int (\vec{E}_x dx + \vec{E}_y dy + \vec{E}_z dz) = \\ &= Q \int \vec{E}_x dx + Q \int \vec{E}_y dy + Q \int \vec{E}_z dz = \\ &= Q \int_0^1 ((-1 + 4t)^2 - 2(2 - 3t)(-1 + 4t)(2 - 4t)^3) (-3)dt + \\ &+ Q \int_0^1 (3 + 2(2 - 3t)(-1 + 4t) - (2 - 3t)^2(2 - 4t)^3) 4dt + \\ &+ Q \int_0^1 (6(2 - 4t)^3 - 3(2 - 3t)^2(-1 + 4t)(2 - 4t)^2) (-4)dt = \\ &= 1\mu C \left(\frac{-11}{5} + \frac{-8}{5} + \frac{-16}{5} \right) = 1\mu C \left(\frac{-35}{5} \right) = -7 \cdot 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

3 CONDENSADORES

3.1 Ecuaciones relevantes.

■ Condensador.

Un condensador es un dispositivo constituido por dos conductores, uno de ellos cargado con una carga Q y el otro con $-Q$ que sirve para acumular energía. Teniendo en cuenta que entre ambos conductores hay una diferencial de potencial $\Delta V = V_+ - V_-$, podemos definir la capacidad del condensador como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (3.1)$$

En el S.I. la unidad de capacidad se denomina *Faradio* [F] y su definición es $1 \text{ F} = 1 \text{ C/1 V}$.

■ Capacidad condensador plano.

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \quad (3.2)$$

siendo ε_0 la permeabilidad eléctrica del vacío, d la distancia entre dos placas planas y paralelas que forman el condensador y A la sección de dichas placas.

■ Capacidad condensador cilíndrico.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(r_2/r_1)} \quad (3.3)$$

donde L es la longitud del condensador y r_1 y r_2 los radios de los cilindros interno y externo respectivamente que forman el condensador.

■ Capacidad condensador esférico.

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (3.4)$$

en este caso r_1 y r_2 son los radios de las esferas concéntricas, interna y externa respectivamente, que forman el condensador.

■ Energía almacenada en un condensador.

La energía almacenada en un condensador es igual al trabajo que hay que realizar para cargar dicho condensador.

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (3.5)$$

La energía almacenada en un condensador es la energía almacenada por el campo eléctrico que se genera en el interior del condensador. Esto nos permite definir la densidad de energía como:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0|E^2| \quad (3.6)$$

■ Dieléctricos.

Un material dieléctrico es un material no conductor. Si el espacio entre los dos conductores que forman un condensador se rellena (total o parcialmente) con un material dieléctrico, la polarización de sus moléculas permite una mayor acumulación de carga en el condensador y por lo tanto un aumento de su capacidad.

Se define la constante dieléctrica o permitividad eléctrica relativa como $\varepsilon_r = \kappa = \varepsilon/\varepsilon_0$ siendo ε la permitividad eléctrica del medio.

De este modo la capacidad de un condensador cuya capacidad inicial es C_0 se ve multiplicada por un factor ε_r cuando el espacio entre los conductores que forman dicho conductor se rellena completamente con un material dieléctrico de capacidad relativa ε_r .

$$C = \varepsilon_r C_0 \quad (3.7)$$

■ Asociación de condensadores.

- **Condensadores en serie.** Sea un conjunto de condensadores de capacidades $C_1, C_2, \dots, C_n$ la capacidad equivalente, C_{eq} , de todos ellos cuando están conectados en serie es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (3.8)$$

- **Condensadores en paralelo.** Sea un conjunto de condensadores de capacidades $C_1, C_2, \dots, C_n$ la capacidad equivalente, C_{eq} , de todos ellos cuando están conectados en paralelo es:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (3.9)$$

3.2 Ejercicios

1. Un condensador plano de placas paralelas de área 1 cm^2 y separadas $1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ está conectado a una diferencia de potencial de 5 V . Desconectamos el condensador de la fuente de alimentación y le conectamos en paralelo otro condensador idéntico al primero pero con un dieléctrico entre sus placas de permitividad relativa $\epsilon_r = 10$. Calcule:
 - a) La carga inicial del primer condensador así como su capacidad.
 - b) La carga en cada condensador una vez conectados.
 - c) La nueva diferencia de potencial entre las placas.

Solución

a) Aplicamos la fórmula del condensador de placas paralelas para hallar la capacidad y la carga inicial:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-4}} = 8,85 \text{ pF}$$

La carga acumulada en el condensador es:

$$Q = C \cdot \Delta V_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 = 4,425 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

b) Una vez que hemos desconectado el condensador de la fuente de alimentación, conectamos el segundo condensador al primero en paralelo tal y como nos dice el enunciado. Al estar desconectados de la fuente, la carga total acumulada en ambos condensadores deberá ser igual a la carga inicial acumulada en el primer condensador, y que hemos calculado en el apartado anterior. Es decir, la carga inicial se repartirá entre ambos condensadores de modo que se cumpla con el principio de conservación de la carga.

Nuestros condensadores están conectados en paralelo y por lo tanto tendrán la misma diferencia de potencial. Por otro lado, la capacidad del segundo condensador es 10 veces superior a la capacidad del primero al tener un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 10$, por lo tanto, $C' = 10C$.

$$Q = Q_1 + Q_2 = C \cdot \Delta V_1 + C' \cdot \Delta V_1 = C(1 + 10)\Delta V_1 = C \cdot 11 \cdot \Delta V_1$$

Si despejamos ΔV_1 obtenemos

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{11 \cdot C} = \frac{C \cdot \Delta V_0}{11 \cdot C} = \frac{\Delta V_0}{11}$$

A partir de la diferencia de potencial podemos hallar la carga acumulada en cada condensador:

$$Q_1 = C \cdot \Delta V_1 = \frac{\varepsilon_0 S \Delta V_0}{11 \cdot d} = 4,02 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

$$Q_2 = C' \cdot \Delta V_1 = \frac{10\varepsilon_0 S \Delta V_0}{11 \cdot d} = 40,2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

c) La nueva diferencia de potencial entre placas se ha calculado anteriormente:

$$\Delta V_1 = \frac{5}{11} \text{ V}$$

2. Un condensador plano, cuyas placas tienen una superficie A y se encuentran separadas por una distancia d , se carga mediante una tensión ΔV . A continuación se desconecta de la fuente de tensión y sin descargar el condensador se separan las placas hasta una distancia $3d$. Calcular:

- a) La nueva diferencia de potencial entre las placas.
- b) La nueva capacidad del condensador.
- c) La variación de energía acumulada en el condensador.

Solución

a) El condensador tiene inicialmente una capacidad C_0 que se puede expresar mediante la ecuación del condensador de placas paralelas:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

La carga acumulada una vez conectado a la diferencia de potencial es:

$$Q = C_0 \Delta V$$

Cuando se separan, la capacidad cambia pero la carga no se altera (se ha desconectado la fuente de tensión). La nueva capacidad es:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{3d} = \frac{C_0}{3}$$

y la nueva diferencia de potencial será:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C_1} = 3 \frac{Q}{C_0} = 3\Delta V$$

b) La nueva capacidad del condensador ha sido obtenida en el apartado anterior:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{3d} = \frac{C_0}{3}$$

c) La energía inicial acumulada en el condensador era:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V^2$$

Una vez desconectado y modificada la distancia entre sus placas, podemos relacionar la energía acumulada en el condensador con la acumulada inicialmente, teniendo en cuenta las relaciones que hemos obtenido anteriormente, de modo que:

$$U_f = \frac{1}{2} C_1 \Delta V'^2 = \frac{1}{2} \frac{C_0}{3} (3\Delta V)^2 = 3U_0$$

La pregunta que nos viene a la cabeza es, ¿De dónde sale este exceso de energía? En realidad, el aumento de la distancia entre las placas es el responsable del aumento de energía acumulada y la variación de la distancia la hemos tenido que realizar nosotros desde el exterior, por lo tanto, el aumento de energía se produce porque desde el exterior le aportamos una energía al sistema al aumentar la separación entre las placas.

3. En la siguiente figura se muestra el esquema de un condensador de placas paralelas, entre las cuales se colocan dos dieléctricos diferentes. Se establece una diferencia de potencial entre ambas placas $V_b - V_a = 100$ V. Datos: $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_{r2} = 2$, $d_1 = 0,1$ m, $d_2 = 0,15$ m.



Calcule:

- El campo eléctrico en cada dieléctrico.
- La capacidad y la carga del condensador si la superficie de las placas es $S = 10$ m².

Solución

a) Para calcular el campo eléctrico en cada zona, podemos aplicar la definición de diferencia de potencial entre placas sabiendo que el campo es uniforme en cada dieléctrico en primera aproximación (despreciamos los efectos de borde). Aplicando la definición obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^{d_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{d_1}^{d_1+d_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = d_1 E_1 + d_2 E_2 = \\ &= V_b - V_a = 100 \text{ V}\end{aligned}$$

La segunda relación constitutiva necesaria es la dependencia lineal del campo entre placas sin dieléctrico (E_0) con los campos eléctricos en las regiones con dieléctrico (E_1 y E_2). Así, $E_1 = \varepsilon_{r1} E_0$ y $E_2 = \varepsilon_{r2} E_0$. Todo esto nos lleva a $E_1 = \varepsilon_{r1} / \varepsilon_{r2} E_2$.

Combinando las dos ecuaciones obtenemos los campos E_1 y E_2 :

$$\begin{aligned}d_1 E_1 + \frac{\varepsilon_{r2} E_1}{\varepsilon_{r1}} d_2 &= 100 \\ E_2 &= \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} E_1\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos:

$$E_1 = \frac{100\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r1}d_1 + d_2\varepsilon_{r2}} = 250 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$E_2 = \frac{100\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}d_1 + d_2\varepsilon_{r2}} = 500 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

b) Para calcular la capacidad del condensador rigurosamente debemos usar la ley de Gauss aplicada en varios lugares del dieléctrico para saber cuánta carga tenemos acumulada en los planos conductores.

Sin embargo, en la situación de dieléctricos apilados como el caso presente, es posible considerar que el condensador está formado por dos condensadores independientes conectados en serie. Un condensador C_1 formado por el dieléctrico ε_{r1} y espesor d_1 y el otro con dieléctrico ε_{r2} y espesor d_2 . Las capacidades asociadas a cada uno de ellos son:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1} = \frac{\varepsilon_0S}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2} = \frac{2\varepsilon_0S}{d_2}$$

Al tener una conexión equivalente en serie, la capacidad total de la asociación se puede calcular usando la fórmula correspondiente:

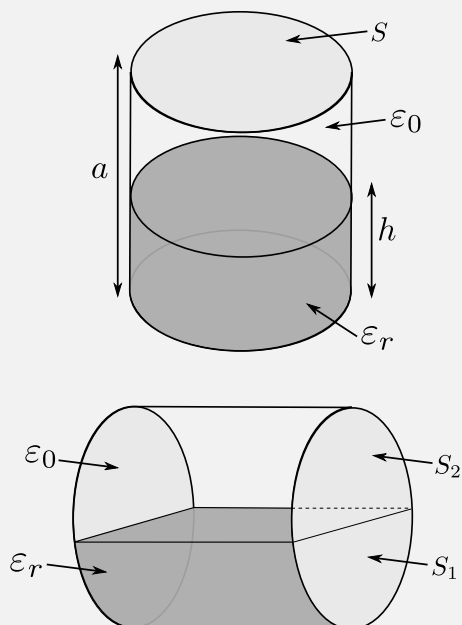
$$C_T = S \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}d_2 + \varepsilon_{r2}d_1} = \frac{2S\varepsilon_0}{2d_1 + d_2} = 5,05 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

4. Se construye un recipiente cilíndrico, con bases perfectamente conductoras y de sección S , separadas una distancia a , con paredes perfectamente aislantes y de espesor despreciable. El interior se llena hasta una altura h con un líquido dieléctrico y permitividad relativa ϵ_r (el resto se deja vacío). El recipiente se coloca en un principio con las bases dispuestas horizontalmente. En esta posición, se carga hasta que la diferencia de potencial entre las placas es ΔV_0 .

- a) Expresar la capacidad del cilindro en función de h , a y de las constantes dieléctricas.

Acto seguido se abre el circuito y, sin descargar las placas, el recipiente es girado 90° alrededor del eje horizontal.

- b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas, $\Delta V'$?



Solución

- a) El conjunto se puede considerar como un condensador de placas pa-

ralelas donde las tapas enfrentadas hacen el papel de planos paralelos. Usando esta aproximación, el condensador así formado consiste en un problema de condensador con un dieléctrico que llena parcialmente el hueco entre placas. Tenemos entonces dos dieléctricos apilados, uno de permitividad $\varepsilon_0\varepsilon_r$ y otro vacío de permitividad ε_0 . El conjunto así formado es equivalente a dos condensadores C_0 y C_1 conectados en serie: el condensador C_0 con aire entre sus placas y el condensador C_1 que contiene al dieléctrico. Los valores de las capacidades de estos condensadores son:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{(a - h)}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{h}$$

Por lo tanto, la capacidad total del sistema será:

$$C_T = \frac{C_0 C_1}{C_0 + C_1} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r(a - h)}$$

Es útil hallar la carga del condensador para la segunda parte del problema:

$$Q = C_T \cdot \Delta V_0 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{h + \varepsilon_r(a - h)} \Delta V_0$$

b) A continuación, tumbamos el recipiente y el dieléctrico pasa a ocupar la parte inferior del volumen del depósito. Al haber desconectado el sistema de la fuente de alimentación, la carga acumulada en las placas se conservará, aunque la capacidad del condensador se verá modificada. Ahora tenemos un condensador equivalente a dos condensadores conectados en paralelo. Nos queda por determinar cuál es el volumen de cada una de las partes en la que el dieléctrico original se ha quedado dividido en la nueva posición.

Cuando el cilindro está de pie, el volumen de dieléctrico es $V = S \cdot h$. Tumbado, el dieléctrico ocupa un volumen $V = S_1 \cdot a$ con S_1 la superficie de tapa en contacto con el dieléctrico. Relacionando las dos ecuaciones anteriores obtenemos: $S_1 = S(h/a)$. La superficie de las bases que no está en contacto con el dieléctrico será $S_2 = S - S_1 = S(1 - h/a)$. Una vez obtenidas las dos superficies S_1 y S_2 , se pueden hallar las capacidades de ambas partes, siendo condensadores de placas paralelas de superficie S_1 y S_2 :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S_1}{a}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_2}{a}$$

Podemos ahora calcular la capacidad total:

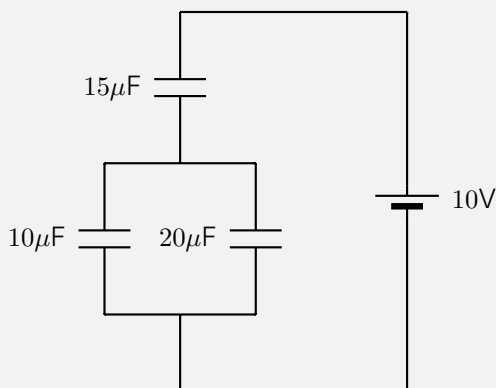
$$C'_T = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{a} \left(\varepsilon_r \frac{h}{a} + 1 - \frac{h}{a} \right)$$

La nueva diferencia de potencial entre los planos se puede hallar recordando que la carga se conserva al girar el cilindro:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C'_T} = \frac{C_T}{C'_T} \Delta V_0 = \frac{a^2 \varepsilon_r}{(h + \varepsilon_r(a - h))(a - h + \varepsilon_r h)} \Delta V_0$$

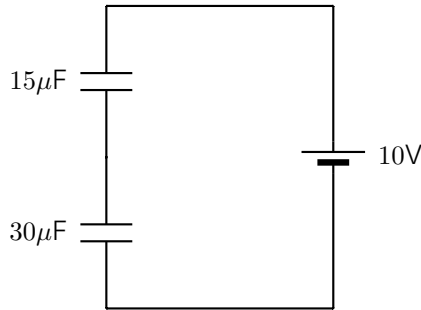
5. A partir del circuito que se muestra en la figura, calcule:

- La capacidad equivalente de la asociación de condensadores.
- La diferencia de potencial en cada condensador.
- La carga de cada condensador.



Solución

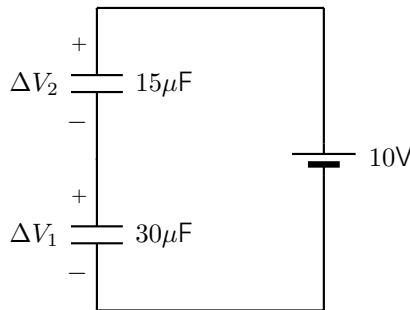
a) Para resolver este tipo de problemas, comenzaremos simplificando el circuito mediante el cálculo de los condensadores equivalentes de las distintas asociaciones que vayamos detectando. En este problema, se puede observar que los condensadores de $20\mu\text{F}$ y $10\mu\text{F}$ están conectados en paralelo y, por lo tanto, su asociación nos da un condensador equivalente de $20\mu\text{F} + 10\mu\text{F} = 30\mu\text{F}$, con lo que el circuito original se transforma en el siguiente:



En este nuevo circuito aparece una asociación en serie entre el condensador de $15\mu\text{F}$ y $30\mu\text{F}$. En este caso, el resultado de asociar estos dos elementos es:

$$\frac{1}{1/15 \cdot 10^{-6} + 1/30 \cdot 10^{-6}} = 10 \mu\text{F}$$

b) Para hallar la diferencia de potencial en cada condensador vamos primero a razonar sobre el circuito reducido siguiente:



En este circuito tenemos dos condensadores que llevan la misma carga Q al estar en serie. Podemos hallar la carga de cada uno con una simple ecuación si nos fijamos en que la suma de las diferencias de potencial de los condensadores debe ser igual a la de la fuente de alimentación, 10 V:

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{30 \cdot 10^{-6}} + \frac{Q}{15 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ V}$$

El cálculo nos lleva a una carga de $Q = 100\mu\text{C}$.

Otra forma de haber obtenido el valor de la carga acumulada en estos condensadores habría sido observar que están conectados en serie y, por lo tanto, podemos calcular su capacidad equivalente sin más que

aplicar la ecuación correspondiente, obteniendo $C_{total} = 10\mu\text{F}$ y de aquí, deducir la carga acumulada en el condensador $Q = 100\mu\text{C}$.

En este caso debemos tener en cuenta que la carga que se acumula en dos condensadores conectados en serie es siempre la misma que se acumula en el condensador equivalente. La carga "no se reparte" entre ambos condensadores como en el caso de condensadores en paralelo.

Volviendo al esquema original, los dos condensadores que están conectados en paralelo tienen la misma diferencia de potencial $\Delta V_1 = Q/(30 \cdot 10^{-6})$ y suman una carga $Q = 100\mu\text{C}$. Las diferencias de potencial son entonces:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{30 \cdot 10^{-6}} = \frac{10}{3} \text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{15 \cdot 10^{-6}} = \frac{20}{3} \text{ V}$$

Tenemos ahora todas las diferencias de potencial del circuito.

c) Finalmente calculamos la carga de cada condensador:

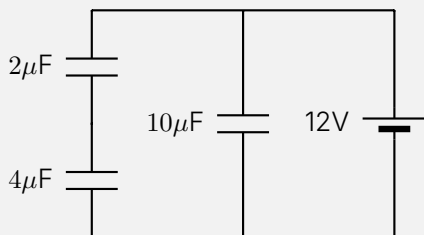
$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V_1 = 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{100}{3} \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V_1 = 20 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{10}{3} = \frac{200}{3} \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot \Delta V_2 = 15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{20}{3} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

6. A partir de la figura siguiente, calcule:

- La capacidad equivalente de la asociación de condensadores.
- La diferencia de potencial en cada condensador.
- La carga de cada condensador.



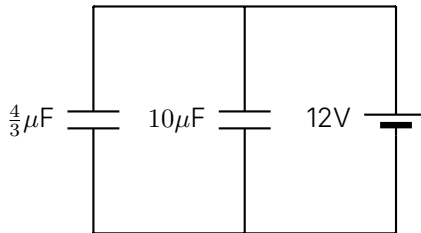
Solución

a) Para calcular la capacidad equivalente del circuito asociamos primero los dos condensadores en serie de capacidad $2\mu\text{F}$ y $4\mu\text{F}$:

$$C_e = \frac{1}{1/2 \cdot 10^{-6} + 1/4 \cdot 10^{-6}} = \frac{4}{3} \mu\text{F}$$

El circuito equivalente resultante tiene ahora dos condensadores en paralelo cuya capacidad equivalente será:

$$C_T = 10 \cdot 10^{-6} + \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} = \frac{34}{3} \mu\text{F}$$



b) La diferencia de potencial del condensador de $10 \mu\text{F}$ tiene una diferencia de 12 V al estar conectado al generador.

Para calcular la diferencia de potencial de los dos condensadores conectados en serie debemos considerar que ambos condensadores tienen la misma carga Q y la suma de las dos diferencias de potencial debe ser 12 V , por lo tanto tenemos la ecuación siguiente:

$$\Delta V_{2\mu\text{F}} + \Delta V_{4\mu\text{F}} = \frac{Q}{2 \cdot 10^{-6}} + \frac{Q}{4 \cdot 10^{-6}} = 12 \text{ V}$$

De esta ecuación obtenemos el valor de $Q = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$.

c) Otra forma de calcular la carga Q sería aplicando la capacidad equivalente de ambos condensadores y que hemos calculado anteriormente:

$$Q = C_e \Delta V = \frac{4}{3} \cdot 10^{-6} 12 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

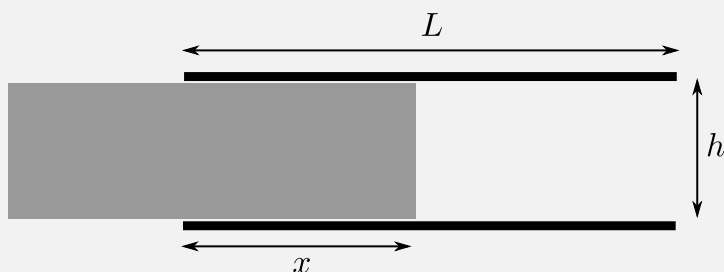
Finalmente, una vez calculada la carga acumulada en cada condensador hallamos la diferencia de potencial de cada uno de los condensadores:

$$\Delta V_{4\mu\text{F}} = \frac{Q}{4 \cdot 10^{-6}} = 4 \text{ V}$$

$$\Delta V_{2\mu F} = \frac{Q}{2 \cdot 10^{-6}} = 8 \text{ V}$$

7. Un condensador de placas cuadradas y paralelas contiene un dieléctrico de constante relativa $\varepsilon_r = 10$ insertado parcialmente tal y como se indica en la siguiente figura. Si los lados de las placas miden $L = 1 \text{ m}$ y la separación entre las placas es $h = 1 \text{ cm}$, calcule:

- La capacidad del condensador.
- La energía almacenada en el condensador en función de x suponiendo una diferencia de potencial constante ΔV entre placas.
- Suponiendo la carga almacenada como constante, si movemos el dieléctrico hacia la derecha una distancia dx , ¿cuánto vale la variación dU de energía del condensador?
- Deducir la fuerza que se ejerce sobre el dieléctrico.



Solución

a) El condensador puede separarse en dos zonas, una rellena con el dieléctrico y otra, la zona vacía entre las placas. En ambas regiones el campo eléctrico es aproximadamente constante y pueden tratarse por separado (despreciamos el campo cerca de la interfaz entre las dos zonas). De este modo los dos condensadores generados tienen una capacidad:

$$C_{\text{dieléctrico}}(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x L}{h}$$

$$C_{\text{vacío}}(x) = \frac{\varepsilon_0 (L - x) L}{h}$$

Queda por definir la capacidad del condensador en su conjunto. Para ello, podemos observar que la carga total de las placas es la suma de

las cargas de ambas placas:

$$Q_T = Q_{\text{vacío}} + Q_{\text{dieléctrico}}$$

Dado que los condensadores tienen la misma diferencia de potencial al estar las placas en equilibrio electrostático tenemos:

$$\begin{aligned} C_T(x) &= \frac{Q_T}{\Delta V} = \frac{Q_{\text{vacío}} + Q_{\text{dieléctrico}}}{\Delta V} = \frac{Q_{\text{vacío}}}{\Delta V} + \frac{Q_{\text{dieléctrico}}}{\Delta V} = \\ &= C_{\text{vacío}} + C_{\text{dieléctrico}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r x L}{h} + \frac{\varepsilon_0 (L - x) L}{h} \end{aligned}$$

Es decir, la capacidad de este tipo de estructuras es similar a tener dos condensadores conectados en paralelo.

b) La energía del condensador depende directamente de la capacidad y de la diferencia de potencial:

$$U(x) = \frac{1}{2} C_T(x) \Delta V^2$$

c) Si movemos el dieléctrico un dx hacia la derecha, la energía del condensador varía en:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\partial C_T(x)}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\varepsilon_0 L (\varepsilon_r - 1)}{h} dx$$

d) Para este apartado conviene recordar la definición de trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento elemental $d\vec{x}$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

El objetivo es relacionar la fuerza F con la variación de energía del condensador. La variación de trabajo es menos la variación de energía potencial $dW = -dU$ y la fuerza se despeja como:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} \Delta V^2 \frac{\varepsilon_0 \cdot L (\varepsilon_r - 1)}{h}$$

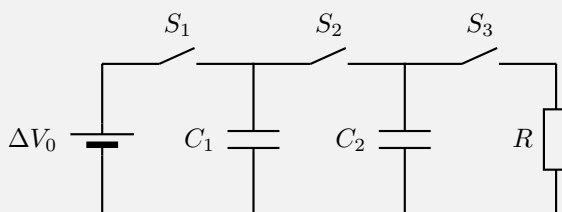
La fuerza que aparece sobre el dieléctrico es constante y tiende a tirar del dieléctrico hacia dentro del condensador.

8. Consideremos el circuito de la figura adjunta. Comenzamos cargando el condensador C_1 con el interruptor S_1 cerrado. A continuación abrimos S_1 y cerramos S_2 cargando así el condensador C_2 . S_3 permanece abierto durante todo el proceso. Datos: $\Delta V_0 = 20 \text{ V}$, $C_1 = 6 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $R = 10 \Omega$.

- a) Calcular la carga inicial de C_1 y la carga final de cada condensador.

A continuación cerramos el interruptor S_3 conectando los dos condensadores a la resistencia R .

- b) ¿Cuánta energía se ha disipado en la resistencia al quedarse los condensadores totalmente descargados?

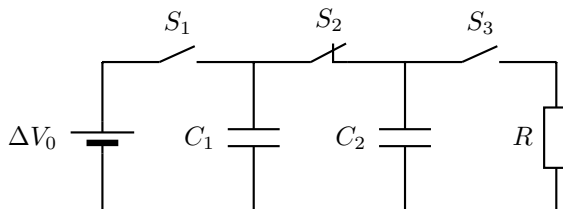


Solución

- a) Inicialmente, la carga acumulada en el condensador C_1 será:

$$Q_i = C_1 \cdot \Delta V_0 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

A continuación, se abre el interruptor S_1 y se cierra el S_2 , de modo que la batería deja de actuar y los condensadores C_1 y C_2 se conectan en paralelo.



Ahora, la carga que inicialmente estaba acumulada en el condensador C_1 y que hemos denominado Q_i pasará a repartirse entre ambos condensadores sabiendo que tienen la misma diferencia de potencial, por lo tanto:

$$\Delta V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

si además aplicamos la ecuación de conservación de la carga:

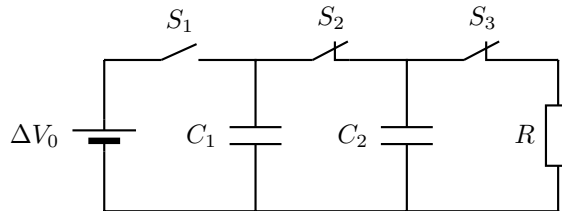
$$Q_i = Q_1 + Q_2 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que podemos resolver:

$$Q_1 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{(1 + C_2/C_1)} = 90 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = \frac{120 \cdot 10^{-6}}{(1 + C_1/C_2)} = 30 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

b) Finalmente, una vez conectados los condensadores a la resistencia, un proceso de descarga tiene lugar.



Durante este proceso, toda la energía almacenada por los condensadores se disipará en la resistencia mediante una corriente eléctrica. Por tanto, en base al principio de conservación de la energía, basta con calcular la energía inicial almacenada por los dos condensadores:

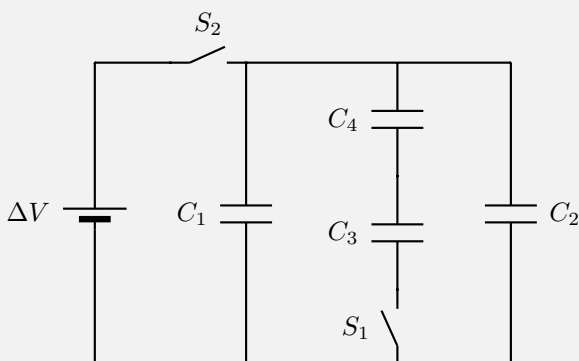
$$U_i = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

9. Se tiene el circuito que se muestra en la figura siguiente. La capacidad de los condensadores es respectivamente $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 2 \mu\text{F}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$ y $C_4 = 2 \mu\text{F}$ y la batería tiene una f.e.m de 12 V. Inicialmente el interruptor S_1 está abierto y el S_2 cerrado y todos los condensadores están descargados.

- a) Calcular la carga en cada condensador y la energía acumulada en el condensador C_1 .

A continuación se abre el interruptor S_2 y se cierra el S_1 .

- b) Calcule la diferencia de potencial entre las placas de cada condensador y la carga que acumula cada condensador.



Solución

a) Con el interruptor S_1 abierto y S_2 cerrado tenemos los dos condensadores C_1 y C_2 conectados en paralelo a la fuente de tensión ΔV . En este caso los dos condensadores tienen una carga:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 48 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 24 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Nos proporciona una carga total $Q_T = 72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$.

Para calcular la energía acumulada aplicaremos la ecuación correspondiente a cada uno de los condensadores, de este modo:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 \Delta V^2 = \frac{1}{2} 4 \mu\text{F} 12^2 = 288 \mu\text{J}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 \Delta V^2 = \frac{1}{2} 2 \mu F 12^2 = 144 \mu J$$

b) En la segunda parte se desconecta la fuente de tensión (se abre S_2) y se conectan otros dos condensadores (se cierra S_1). Vamos a tener una transferencia de carga entre los condensadores hasta que la diferencia de potencial en los extremos de C_1 , C_2 y la asociación C_3 con C_4 sea la misma.

Llamamos de momento C_{eq} al resultado de la asociación de C_3 y C_4 en serie:

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_3 + 1/C_4} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

Los tres condensadores C_1 , C_2 y C_{eq} están en paralelo y tienen la misma diferencia de potencial $\Delta V'$:

$$\Delta V' = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}}$$

La otra ecuación necesaria, relaciona la carga de cada condensador con la carga inicialmente almacenada. Por conservación de la carga, la carga inicial se ha repartido entre los tres elementos al cabo del proceso de equilibrio:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_{eq}$$

Si sustituimos en esta ecuación la carga de cada condensador en función del voltaje:

$$Q_T = C_1 \cdot \Delta V' + C_2 \cdot \Delta V' + C_{eq} \cdot \Delta V' = \Delta V' \cdot (C_1 + C_2 + C_{eq}) = 72 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

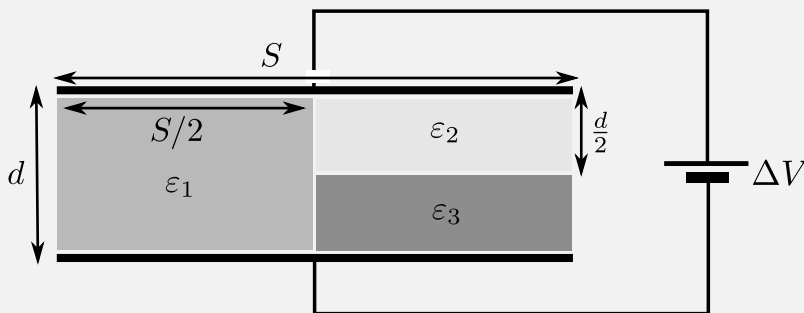
Despejando, obtenemos una diferencia de potencial $\Delta V' = 10,29 \text{ V}$. A partir de este dato podemos hallar la diferencia de potencial y la carga de cada condensador:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V' = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 41,14 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V' = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 20,58 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$Q_{eq} = Q_3 = Q_4 = C_{eq} \cdot \Delta V' = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10,3 = 10,29 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

10. Se tiene un condensador plano de capacidad $C_0 = 10 \text{ pF}$ y de sección $S = 5 \text{ cm}^2$ y separación $d = 1 \text{ cm}$. Se carga mediante una batería de fuerza electromotriz $V = 12 \text{ V}$. A continuación se desconecta y se rellena con tres materiales dieléctricos de permitividades relativas: $\varepsilon_{r1} = 2$, $\varepsilon_{r2} = 4$ y $\varepsilon_{r3} = 6$, tal y como se indica en la figura. Calcule la nueva diferencia de potencial entre las placas del condensador.



Solución

Para calcular la diferencia de potencial una vez relleno el condensador con los dieléctricos necesitamos primero calcular la capacidad del condensador modificado.

Podemos tratar de forma independiente la parte izquierda y la derecha del condensador. La razón por la que se pueden separar es porque el campo eléctrico es perpendicular a las placas en prácticamente todo el volumen. De algún modo no hay interferencia entre la parte derecha y la parte izquierda. La capacidad será entonces la suma de la capacidad de la mitad izquierda y de la mitad derecha.

Si nos fijamos en la parte izquierda, tenemos un condensador plano de superficie $S/2$ y separación entre placas d . El volumen está relleno de un dieléctrico de permitividad relativa ε_{r1} , con lo que la capacidad pasa a ser:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}{2d}$$

La mitad derecha está compuesta de dos capas de espesor $d/2$ con dieléctricos distintos. Nos limitaremos a decir aquí que equivale a poner dos condensadores en serie, cada uno con una superficie $S/2$ y de separación entre placas $d/2$. Cada uno tendrá una capacidad distinta en

función del dieléctrico, así:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}{d}$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S/2}{d/2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r3} S}{d}$$

La asociación en serie de estos dos condensadores nos da la capacidad total de la parte derecha del condensador:

$$C_d = \frac{1}{1/C_2 + 1/C_3} = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{d(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})}$$

Para terminar podemos calcular la capacidad total como:

$$C_T = C_1 + C_d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d} + \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{d(\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3})} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right)$$

$$C_T = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right) = 1,50 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

4 CORRIENTE ELÉCTRICA

4.1 Ecuaciones relevantes.

■ Intensidad de la corriente eléctrica.

Se define la intensidad de corriente eléctrica como el flujo de carga que por unidad de tiempo atraviesa la sección transversal S de un conductor

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnSv_d \quad (4.1)$$

siendo q la carga total de los portadores de carga, n la densidad de portadores o portadores por unidad de volumen del conductor y v_d la velocidad media de desplazamiento de dichos portadores.

La unidad de corriente en el S.I. es el Amperio [A].

■ Resistencia y resistividad. Ley de Ohm.

Cuando entre dos puntos a y b de un conductor hay una diferencia de potencial ΔV implica que en el interior del conductor hay un campo eléctrico $\vec{E}$ que genera una fuerza sobre los portadores libres de carga del conductor, $\vec{F} = q\vec{E}$. Esta fuerza produce un movimiento de dichos portadores lo que nos lleva a la generación de una corriente eléctrica.

El cociente entre la caída de potencial y la intensidad de corriente que circula por un conductor se llama resistencia del conductor, R .

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \rho \frac{L}{S} \quad (4.2)$$

donde ρ es la resistividad del material, L es la longitud del conductor y S su sección.

En el Sistema Internacional la unidad de resistencia se denomina Ohmio [Ω].

Una forma de reescribir la ecuación (4.2) es la conocida como Ley de Ohm:

$$\Delta V = IR \quad (4.3)$$

según la cual la caída de tensión en un conductor es el producto de la intensidad que circula por él y por su resistencia.

■ Fuentes.

Una fuente es un dispositivo que suministra energía a un circuito eléctrico. Se define la fuerza electromotriz de una fuente, ε o f.e.m., como el

trabajo por unidad de carga que realiza la fuente sobre la partícula cargada cuando esta la atraviesa. Su unidad en el Sistema Internacional es el voltio [V].

La potencia aportada por la fuente al circuito viene dada por:

$$P = \varepsilon I \quad (4.4)$$

siendo I la intensidad que atraviesa la propia batería. Su unidad en el Sistema Internacional es el Vatio [W].

Dentro de las fuentes podemos diferenciar dos tipos:

- Baterías ideales: son las fuentes que mantienen constante la diferencia de potencial entre sus bornes, independientemente de la intensidad que suministren.
- Baterías reales: en este caso la diferencia de potencial entre sus bornes depende de la intensidad que circula por ellas. Este efecto se puede modelizar considerando una batería real como una ideal con una pequeña resistencia en serie a la cual llamaremos resistencia interna, r_i . De este modo, la diferencia de potencial a la salida de la batería es:

$$\Delta V = \varepsilon - I r_i \quad (4.5)$$

■ Potencia y energía consumida en una resistencia.

Cuando por un elemento resistivo de un circuito circula una intensidad de corriente se produce una disipación de energía en dicho elemento. El ritmo al que se disipa esta energía es lo que denominamos potencia, y viene dada por:

$$P = \Delta V I = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (4.6)$$

Si ahora tenemos en cuenta que la potencia no es más que la energía disipada por unidad de tiempo, podemos calcular la energía disipada entre dos tiempos, t_0 y t_f , sin más que aplicar su definición:

$$E = \int_{t_0}^{t_f} P dt \quad (4.7)$$

en el caso de que la potencia no dependa del tiempo (corrientes constantes), podemos obtener la energía disipada mediante:

$$E = \int_{t_0}^{t_f} P dt = \Delta V I \Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{V^2}{R} \Delta t \quad (4.8)$$

siendo $\Delta t = t_f - t_0$.

■ Asociación de resistencias.

- *Asociación en serie:* sea un conjunto de resistencias $R_1, R_2 \dots R_n$ conectadas en serie, esta asociación se puede simular mediante una única resistencia a la cual denominaremos resistencia equivalente R_{eq} y cuyo valor viene dado por:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_i R_i \quad (4.9)$$

- *Asociación en paralelo:* de igual modo si el conjunto de resistencias $R_1, R_2 \dots R_n$ se conectan en paralelo, el valor de la resistencia equivalente R_{eq} vendrá dado por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (4.10)$$

■ Leyes de Kirchhoff.

- *1ª Ley de Kirchhoff:* al recorrer un circuito cerrado, la suma algebraica de las variaciones de potencial es igual a cero.

$$\sum_i V_i = 0 \quad (4.11)$$

- *2ª Ley de Kirchhoff:* en toda unión de un circuito donde la corriente pueda dividirse (nodo), la suma de las corrientes entrantes (I_{in}) es igual a la suma de las corrientes salientes (I_{out})

$$\sum I_{in} = \sum I_{out} \quad (4.12)$$

4.2 Ejercicios

1. Un elemento de un circuito produce una energía de 10 kJ en 5 min. Calcular la potencia media producida.

Solución

Se trata simplemente de calcular la energía transferida en un tiempo dado:

$$P_m = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{10000}{5 \cdot 60} = 33,3 \text{ W}$$

2. El motor de corriente continua de una máquina industrial consume una potencia 50 W durante 2 horas. A continuación se incrementa el esfuerzo requerido y el motor consume 100 W durante 1 hora. Calcular la energía consumida a lo largo del periodo de funcionamiento.

Solución

Se analizan los dos periodos por separado. Durante la primera parte:

$$E_1 = \int_0^{t_{fin}} V(t)I(t)dt = P\Delta t = 50 \cdot 2 \cdot 3600 = 36 \cdot 10^4 \text{ J}$$

A lo largo del segundo periodo tenemos:

$$E_2 = P\Delta t = 100 \cdot 1 \cdot 3600 = 36 \cdot 10^4 \text{ J}$$

La energía consumida total es $E_1 + E_2 = 72 \cdot 10^4 \text{ J}$

3. Un cable de cobre transporta una corriente continua de 20 A a lo largo de una distancia de 2000 m. A partir de la información disponible en el capítulo, hallar el diámetro del cable para que las pérdidas por disipación en el mismo sean inferiores a 100 W. Dato: $\rho_{Cu} = 16,76 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$.

Solución

Conocida la conductividad del cobre, la resistencia del cable se puede hallar mediante la fórmula (4.2):

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

con $l = 2000 \text{ m}$ y $\rho = 16,76 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$. Las pérdidas, que no deben exceder $P_{max} = 100 \text{ W}$, se calculan como:

$$P_{max} = R_{max} I^2$$

es decir que la resistencia tendrá que ser inferior a:

$$R_{max} < \frac{P_{max}}{I^2} = 0,25 \Omega$$

La sección mínima del conductor para obtener esta resistencia será:

$$S_{min} > \frac{\rho l}{R_{max}}$$

Y se obtiene $S_{min} > 1,34 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Es decir, un diámetro mínimo de 13,06 mm

4. Una resistencia que puede disipar como máximo 100 W se diseña para funcionar con una diferencia de potencial de 200 V, responder a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuánto vale la resistencia y qué intensidad circula por ella?
- b) ¿Qué potencia disipa la resistencia si se alimenta a 125 V?

Solución

a) Como la potencia y la tensión son datos del problema, la resistencia se puede deducir de la siguiente fórmula:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} \rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{200^2}{100} = 400 \, \Omega$$

La intensidad se calcula mediante la ley de Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{200}{400} = 0,5 \, A$$

b) Cuando se alimenta la resistencia con 125 V, la potencia disipada será:

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{125^2}{400} = 39 \, W$$

5. Por un cable de cobre de 100 m de longitud y $10 \, \text{mm}^2$ de sección, circula una corriente eléctrica de 1 A.

- a) Calcular la resistencia del cable.
- b) ¿Cuál es la diferencia de potencial en sus extremos?
- c) ¿Cuál es la potencia disipada por el cable?

Datos: $\rho_c = 17 \cdot 10^{-9} \, \Omega \cdot \text{m}$

Solución

- a) La resistencia del cable se obtiene por aplicación directa de la ecuación que relaciona la resistencia con las características físicas del cable y la resistividad del material (4.2):

$$R = \frac{\rho_c l}{S} = \frac{17 \cdot 10^{-9} \cdot 100}{10 \cdot 10^{-6}} = 0,17 \, \Omega$$

- b) La diferencia de potencial en los extremos del cable se puede calcular usando la ley de Ohm:

$$\Delta V = R \cdot I = 0,17 \cdot 1 = 0,17 \, \text{V}$$

- c) La potencia disipada por el cable se calcula fácilmente al tener la tensión y la corriente que circula por el cable:

$$P = \Delta V \cdot I = 0,17 \cdot 1 = 0,17 \, \text{W}$$

6. Una resistencia de valor R se conecta a una fuente de voltaje, V , de modo que la corriente que circula por ella es de 3 A. A continuación, se conecta otra resistencia de valor $R/4$ en paralelo con la primera. ¿Cuánto vale la corriente total que circula por el nuevo circuito?

Solución

Para poder evaluar la corriente generada por la fuente de alimentación, necesitamos calcular la resistencia equivalente formada por las dos resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R/4} = \frac{5}{R}$$

Es decir $R_{eq} = R/5$.

Para calcular la diferencia de potencial de la fuente analizaremos la información que nos proporciona el enunciado. Por un lado, cuando únicamente la primera resistencia está conectada a nuestra fuente de voltaje podemos escribir

$$V = R \cdot I = 3 \cdot R$$

Por otro lado, al conectar la segunda resistencia, tenemos una resistencia equivalente $R_{eq} = R/5$, con lo que la corriente generada por la fuente una vez que la segunda resistencia ha sido conectada se puede hallar fácilmente mediante la ley de Ohm.

$$I = \frac{V}{R/5} = \frac{3 \cdot R}{R/5} = 15 \, \text{A}$$

7. Dos resistencias, R_A y R_B , disipan la misma potencia, pero la caída de potencial a través de la resistencia R_A es el doble que la de la resistencia R_B .

- a) Calcular el valor de R_B en función de R_A .
- b) Calcular la razón entre las intensidades que circulan por R_A y R_B (I_A/I_B).

Solución

- a) Llamaremos ΔV_A a la caída de potencial en R_A y ΔV_B a la caída en R_B . En el enunciado nos indican que las dos resistencias disipan la misma potencia y que $\Delta V_A = 2 \Delta V_B$. El hecho de que las resistencias disipen la misma potencia implica que:

$$P_A = P_B \rightarrow \frac{\Delta V_A^2}{R_A} = \frac{\Delta V_B^2}{R_B}$$

Despejamos R_B y sustituimos ΔV_A por $2\Delta V_B$ en la ecuación anterior:

$$R_B = R_A \frac{\Delta V_B^2}{\Delta V_A^2} = R_A \frac{\Delta V_B^2}{(2\Delta V_B)^2} = \frac{R_A}{4}$$

- b) Ahora calculamos la relación entre las corrientes. La potencia disipada en ambas resistencias es la misma y se puede expresar en función de las corrientes que circulan por cada una de las resistencias:

$$P_A = P_B \rightarrow R_B \cdot I_B^2 = R_A \cdot I_A^2$$

Si sustituimos los valores de las resistencias obtenemos la razón que se nos pide:

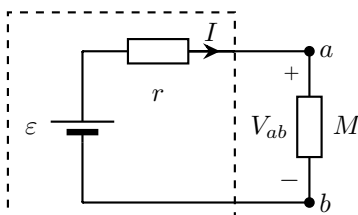
$$\frac{I_A}{I_B} = \sqrt{\frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{R_A/4}{R_A}} = 0,5$$

8. Una batería con una f.e.m. de 12 V tiene una diferencia de potencial en sus extremos de 11,4 V cuando la intensidad suministrada a un motor es de 20 A. Calcular:

- ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?
- ¿Qué potencia suministra la batería?
- De la potencia suministrada, ¿cuánta se pierde dentro de la propia batería?
- Si en lugar de alimentar el motor, alimenta una resistencia de $2\ \Omega$, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de la batería?

Solución

a) El problema se resume en el esquema siguiente:



A partir de esta figura y de los datos del problema, se puede encontrar la resistencia interna r de la batería. Con la ley de Kirchhoff se obtiene:

$$\varepsilon - rI - V_{ab} = 0$$

donde $I = 20\text{ A}$, $V_{ab} = 11,4\text{ V}$, $\varepsilon = 12\text{ V}$.

Despejando de la ecuación anterior obtenemos $r = 0,03\ \Omega$.

b) La potencia suministrada por la batería es:

$$P = V_{ab}I = 11,4 \cdot 20 = 228\text{ W}$$

c) La potencia que se disipa internamente en la batería es la potencia de la resistencia interna r . Esta potencia vendrá dada por:

$$P_r = rI^2 = 0,03 \cdot 20^2 = 12\text{ W}$$

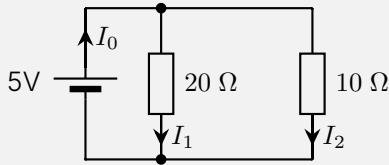
- d) Cambiando el motor por una resistencia de $R = 2 \, \Omega$, se obtiene la ecuación del circuito:

$$\varepsilon - rI - RI = 0$$

La corriente es entonces: $I = 12/2,03 = 5,91 \, \text{A}$. La diferencia de potencial en los bornes de la batería será $V_{ab} = RI = 11,8 \, \text{V}$.

Esta diferencia de potencial también la podríamos calcular mediante la ecuación $V_{ab} = \varepsilon - rI = 12 - 0,03 \cdot 5,91 = 11,8 \, \text{V}$.

9. Calcular las corrientes marcadas en el siguiente circuito:



Solución

Cada resistencia se encuentra conectada en paralelo a la fuerza electromotriz de 5 V. Para calcular la corriente basta con aplicar la ley de Ohm a cada resistencia:

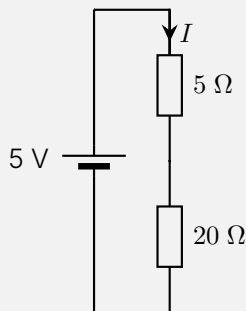
$$I_1 = \frac{5}{20} = 0,25 \, \text{A}$$

$$I_2 = \frac{5}{10} = 0,5 \, \text{A}$$

La corriente I_0 se obtiene aplicando la ley de Kirchhoff en uno de los dos nudos del circuito. El balance de corriente nos proporciona la ecuación:

$$I_0 = I_1 + I_2 = 0,75 \, \text{A}$$

10. Calcular la corriente marcada y la diferencia de potencial de las resistencias en el circuito de la figura:



Solución

La corriente de la malla del circuito se puede hallar calculando la resistencia equivalente formada por las dos resistencias en serie cuyo valor es $R_{eq} = 20 + 5 = 25 \Omega$. La diferencia de potencial en esta nueva resistencia es 5 V y por lo tanto la corriente que atraviesa R_{eq} es:

$$I = \frac{5}{25} = 0,2 \text{ A}$$

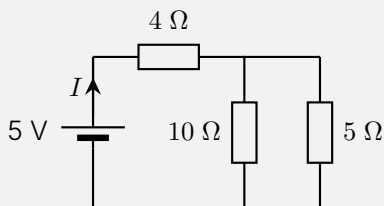
Esta es la misma corriente que atraviesa cada una de las resistencias de 5Ω y 20Ω antes de juntarlas en una única resistencia equivalente.

Una vez obtenida la corriente de la malla, se puede aplicar la ley de Ohm a cada elemento para obtener la diferencia de potencial:

$$V_{20 \Omega} = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ V}$$

$$V_{5 \Omega} = 0,2 \cdot 5 = 1 \text{ V}$$

11. Calcular la corriente marcada del circuito siguiente:



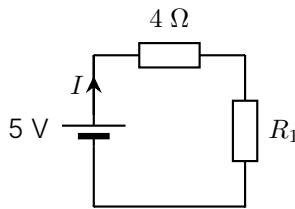
Solución

En este circuito queremos hallar la corriente de la fuente de 5 V conectada a varias resistencias. Para resolver este tipo de circuitos, el método más directo es la reducción de todas las resistencias a una única resistencia equivalente. Dado que solo hay resistencias, se puede encontrar un equivalente único conectado a la fuente de fuerza electromotriz.

Empezando por las resistencias en paralelo tenemos:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$$

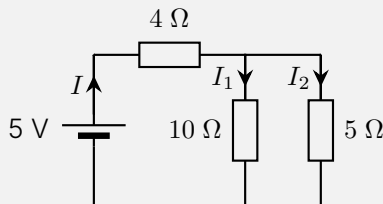
dando el resultado numérico $R_1 = 10/3 \Omega$. El circuito parcial con esta resistencia equivalente es:



Quedan dos resistencias en serie: $R_2 = 4 + R_1 = 22/3 \Omega$. La última etapa consiste en despejar la corriente:

$$I = \frac{5}{22/3} = \frac{15}{22} \text{ A}$$

12. Calcular las corrientes marcadas en el circuito siguiente:

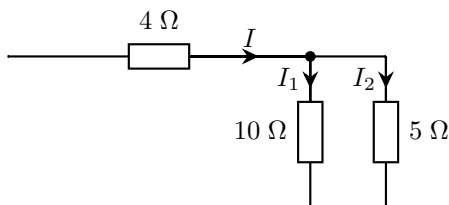
**Solución**

En este problema observamos que las dos resistencias de 10Ω y 5Ω están en paralelo. Por definición tienen la misma diferencia de potencial

en sus bornes. Aplicando la ley de Ohm a cada resistencia se obtiene la igualdad:

$$10I_1 = 5I_2$$

En el ejercicio anterior hemos obtenido la corriente de la fuente de fuerza electromotriz de 5 V, siendo $I = 15/22$ A. En el nudo de marcado en la figura siguiente, se aplica el balance de corriente de la ley de Kirchhoff:

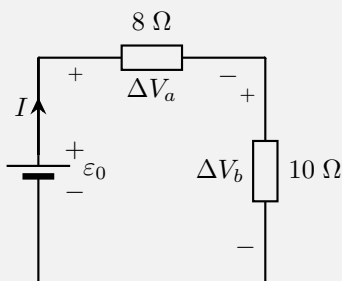


Se obtiene $I = I_1 + I_2$. Usando la relación entre las corrientes I_1 e I_2 , se consigue:

$$I_1 + 2 I_1 = I$$

Despejando la corriente I_1 , llegamos a $I_1 = I/3 = 5/22$ A. La corriente I_2 es $I_2 = 2I_1 = 10/22$ A.

13. Si por el circuito de la figura circula una corriente $I = 1$ A, calcule el valor de la fuerza electromotriz, ε_0 , de la batería.



Solución

Para poder encontrar el valor ε_0 podemos aplicar la ley de Kirchhoff a la malla del circuito eligiendo un sentido para el balance de diferencia de potencial.

Una vez fijada la corriente, en las resistencias la corriente circula de potencial alto a potencial bajo. Por lo que es útil indicar un signo + en el extremo de potencial alto y un - en el potencial más bajo.

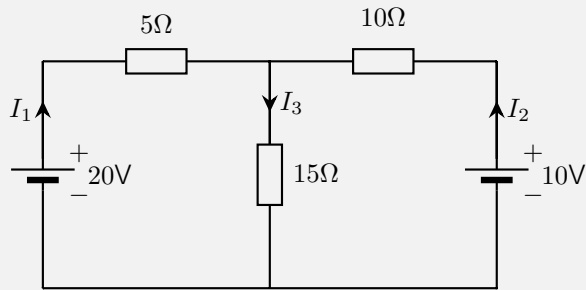
A la hora de aplicar la ley de Kirchhoff sobre un recorrido cerrado del circuito, se pueden observar las bajadas y subidas de potenciales. Al recorrer el circuito, si el potencial baja (de + a -) restamos esta diferencia de potencial al balance de la ecuación. Para subidas (de - a +) sumamos estas diferencias.

La suma neta sobre una malla siempre resulta cero en el contexto de las leyes de Kirchhoff:

$$\varepsilon_0 - \Delta V_a - \Delta V_b = 0$$

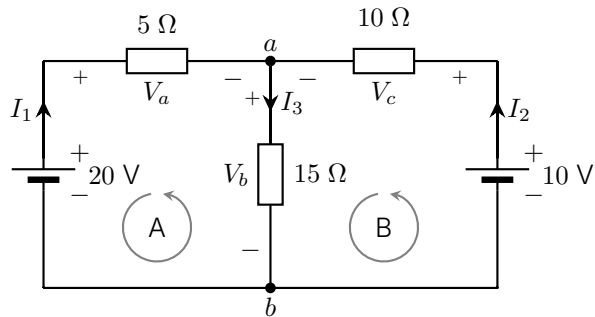
Dada la corriente $I = 1 \text{ A}$, podemos calcular las diferencias de potencial ΔV_a y ΔV_b con la ley de Ohm: $\Delta V_a = 8 \text{ V}$ y $\Delta V_b = 10 \text{ V}$. Suman $\varepsilon_0 = 18 \text{ V}$.

14. Obtener las corrientes marcadas en el circuito siguiente.



Solución

Este circuito tiene dos mallas independientes que no se pueden reducir mediante asociaciones de resistencias en serie o paralelo. Por lo tanto, tendremos que plantear las ecuaciones de Kirchhoff para uno de los dos nudos y para ambas mallas. Un primer paso para la resolución es marcar en el circuito las diferencias de potencial, los nudos y el sentido elegido para aplicar la ley de Kirchhoff:



Empezamos por plantear las ecuaciones de las dos mallas comenzando ambas por el nodo b :

$$A : V_b + V_a - 20 = 0$$

$$B : 10 - V_c - V_b = 0$$

Para completar el sistema aplicamos la ley de Ohm para cada resistencia:

$$A : 15I_3 + 5I_1 - 20 = 0$$

$$B : 10 - 10I_2 - 15I_3 = 0$$

Son dos ecuaciones lineales independientes con tres incógnitas. La última ecuación procede de uno de los dos nudos a y b . El balance de corriente para estos nudos es idéntico, cualquiera de los dos es válido. Para el nudo a):

$$I_1 + I_2 = I_3$$

El sistema de ecuaciones completo es:

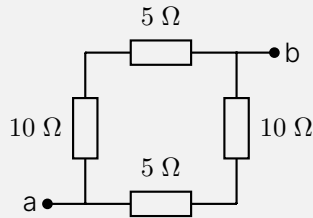
$$15I_3 + 5I_1 = 20$$

$$10I_2 + 15I_3 = 10$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

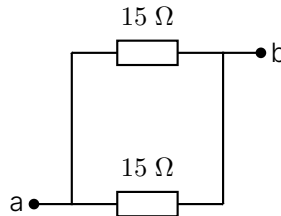
La solución del sistema es: $I_1 = 1,27 \text{ A}$, $I_2 = -0,36 \text{ A}$, $I_3 = 0,91 \text{ A}$.

15. Calcular la resistencia equivalente formada por la asociación de resistencias del circuito siguiente:



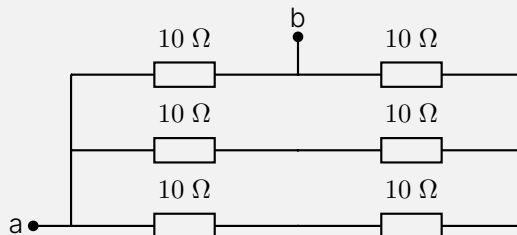
Solución

Cuando tratamos de reducir una red de resistencias a una única resistencia equivalente debemos fijarnos primero en las resistencias en serie. En este caso aparecen dos ramas con una resistencia de $5\ \Omega$ y otra de $10\ \Omega$ en serie. La suma es $15\ \Omega$ y obtenemos el siguiente circuito simplificado:



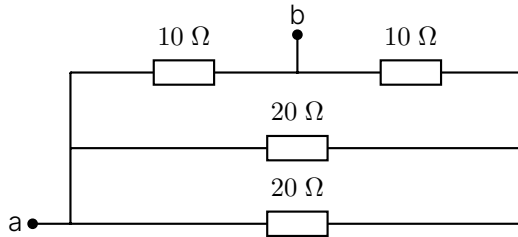
Aparecen claramente dos resistencias en paralelo de $15\ \Omega$ cuya asociación no da una resistencia equivalente de $R_{eq} = \frac{15}{2}\ \Omega$.

16. Calcular la resistencia equivalente entre los puntos a y b formada por la asociación de resistencias del circuito siguiente:

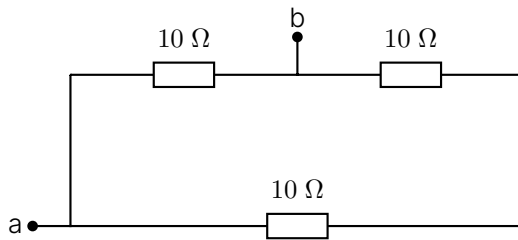


Solución

Para resolver este circuito primero asociamos las resistencias en serie:



Tenemos dos resistencias de $20\ \Omega$ conectadas en paralelo, la asociación de las dos es una resistencia equivalente de $10\ \Omega$:



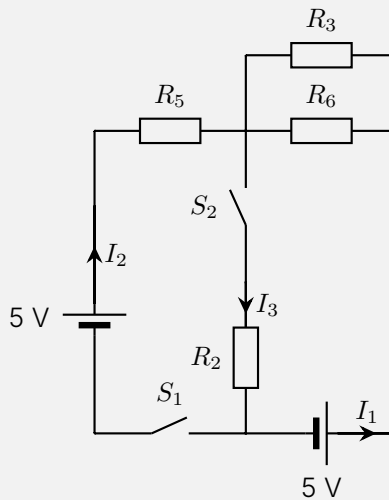
En este último circuito tenemos dos resistencias de $10\ \Omega$ en serie cuya resistencia equivalente es $R_{eq1} = 10\ \Omega + 10\ \Omega = 20\ \Omega$, que a su vez está en paralelo con la tercera resistencia de $10\ \Omega$. La resistencia equivalente total es:

$$R_{eq} = \frac{1}{1/20 + 1/10} = \frac{20}{3}\ \Omega$$

17. En el circuito de la figura siguiente tenemos dos interruptores S_1 y S_2 inicialmente abiertos:

- Calcular las corrientes marcadas estando los dos interruptores abiertos.
- Se cierra el interruptor S_1 , calcular de nuevo las corrientes I_1 e I_2 .
- Se abre el interruptor S_1 y se cierra S_2 , calcular la energía disipada en la resistencia R_2 durante 6 minutos.

Datos: $R_1 = 3 \, \Omega$, $R_2 = 3 \, \Omega$, $R_3 = 2 \, \Omega$, $R_4 = 8 \, \Omega$, $R_5 = 6 \, \Omega$, $R_6 = 2 \, \Omega$



Solución

- Cuando los dos interruptores están abiertos no hay corriente circulando en ninguna de las ramas del circuito y por lo tanto, todas las corrientes son nulas.
- Al cerrar el interruptor S_1 , con el otro interruptor abierto, se conectan en serie las dos fuentes de 5 V. Al estar con polaridades opuestas, la fuerza electromotriz resultante es nula y las corrientes son de nuevo todas nulas.
- Al cerrar S_2 , con S_1 abierto, se establece un circuito formado por

la fuente de 5 V en serie con la resistencia R_2 y las resistencias R_3 y R_6 en paralelo. Como consecuencia, la corriente I_3 e I_1 son idénticas. El resultado numérico es:

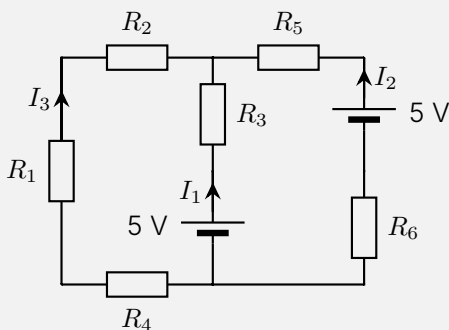
$$I_1 = I_3 = \frac{5}{R_2 + \frac{R_3 \cdot R_6}{R_3 + R_6}} = 1,25 \text{ A}$$

Se puede hallar la energía que disipa la resistencia R_2 durante 6 minutos en julios:

$$\mathcal{E}_{R_2} = R_2 \cdot I_1^2 \cdot \Delta T = 3 \cdot 1,25^2 \cdot 6 \cdot 60 = 1687,5 \text{ J}$$

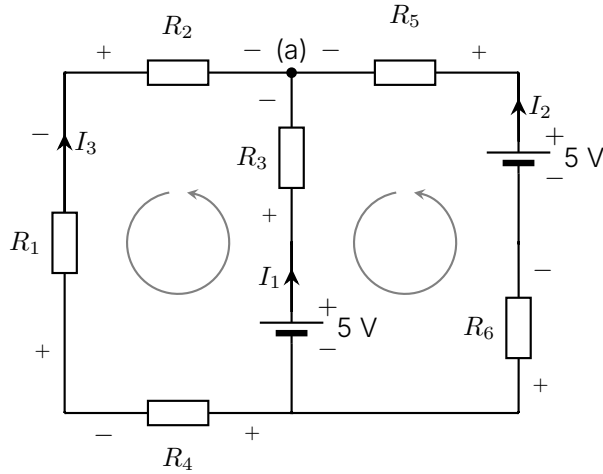
18. Calcular las corrientes I_1 , I_2 , I_3 del circuito siguiente.

Datos: $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 8 \Omega$, $R_5 = 6 \Omega$, $R_6 = 2 \Omega$



Solución

Podemos observar que este circuito tiene únicamente 3 corrientes diferentes que son las que debemos calcular. Necesitaremos por tanto 3 ecuaciones independientes.



Estas ecuaciones las plantearemos aplicando la 1ª Ley de Kirchhoff a dos mallas independientes y la 2ª ley de Kirchhoff al nodo (a) indicado en la figura del circuito. Se consideran las corrientes que entran al nodo como positivas y las corrientes salientes negativas.

$$\begin{aligned} R_3 I_1 - R_2 I_3 - R_1 I_3 - R_4 I_3 - 5 &= 0 \\ R_3 I_1 - R_5 I_2 - R_6 I_2 - 5 + 5 &= 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones que podemos resolver con métodos habituales de resolución de sistemas lineales. Sustituimos los valores en el sistema:

$$\begin{aligned} 2I_1 - 3I_3 - 3I_3 - 8I_3 &= 5 \\ 2I_1 - 6I_2 - 2I_2 &= 0 \\ I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

La segunda ecuación nos da inmediatamente una relación entre I_1 e I_2 : $I_1 = 4I_2$. Usando esta ecuación y sustituyendo I_2 en la tercera obtenemos:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + \frac{1}{4}I_1 + I_3 = \frac{5}{4}I_1 + I_3 = 0$$

Esta última ecuación puede sustituirse en la primera ecuación del sistema para obtener I_1 :

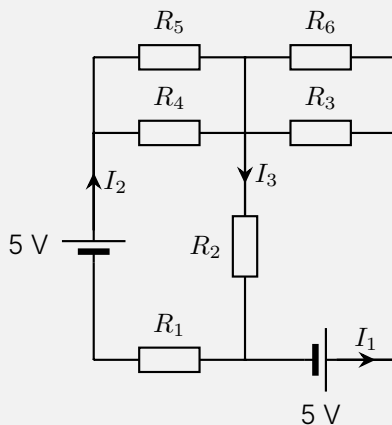
$$2I_1 - 14I_3 = 2I_1 + 14\frac{5}{4}I_1 = \frac{39}{2}I_1 = 5$$

De allí $I_1 = 10/39$ A, $I_2 = 5/78$ A e $I_3 = -25/78$ A.

El hecho de que I_3 tenga un valor negativo significa que la corriente I_3 circula en el sentido opuesto al que nos ha marcado el enunciado. Si observamos el circuito del problema, las tres intensidades se han dibujado saliendo de uno de los nodos (o entrando si nos fijamos en el otro nodo), por lo que si queremos que se cumpla la 2ª Ley de Kirchhoff, alguno de los términos tiene que tener signo negativo simplemente por el principio de conservación de carga.

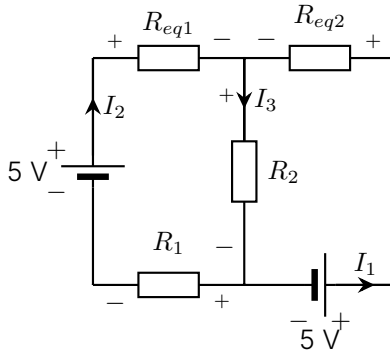
19. Calcular las corrientes I_1 , I_2 , I_3 del circuito siguiente.

Datos: $R_1 = 3 \, \Omega$, $R_2 = 3 \, \Omega$, $R_3 = 2 \, \Omega$, $R_4 = 8 \, \Omega$, $R_5 = 6 \, \Omega$, $R_6 = 2 \, \Omega$



Solución

Para resolver este problema, antes de ponernos a plantear ecuaciones, es conveniente reducir el circuito usando asociaciones de elementos resistivos. Así, por un lado están R_4 y R_5 en paralelo y por otro lado R_3 y R_6 también conectadas en paralelo, de modo que obtenemos R_{eq1} y R_{eq2} respectivamente.

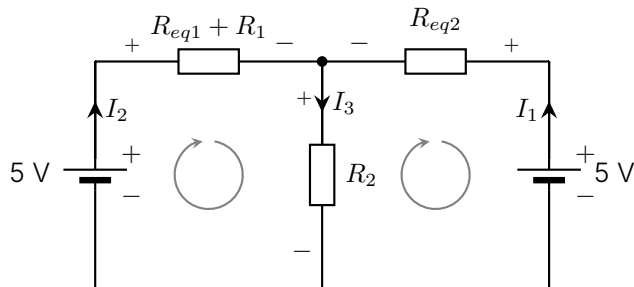


Calculamos las resistencias equivalentes R_{eq1} y R_{eq2} :

$$R_{eq1} = 1 / (1/R_4 + 1/R_5) = \frac{24}{7} \Omega$$

$$R_{eq2} = 1 / (1/R_3 + 1/R_6) = 1 \Omega$$

En el circuito obtenido tras la simplificación, aparecen R_1 y R_{eq1} en serie, con lo que podemos redibujar el circuito de una forma más amena para su resolución:



Podemos establecer el sistema de ecuaciones independientes usando las leyes de Kirchhoff que permite resolver el circuito. Las dos primeras ecuaciones proceden de las mallas siguiendo el sentido marcado. La última ecuación se deduce aplicando la Ley de Kirchhoff al nudo marcado arriba:

$$(R_{eq1} + R_1)I_2 + R_2I_3 - 5 = 0$$

$$R_{eq2}I_1 + R_2I_3 - 5 = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Sustituimos los valores y resolvemos el sistema de ecuaciones:

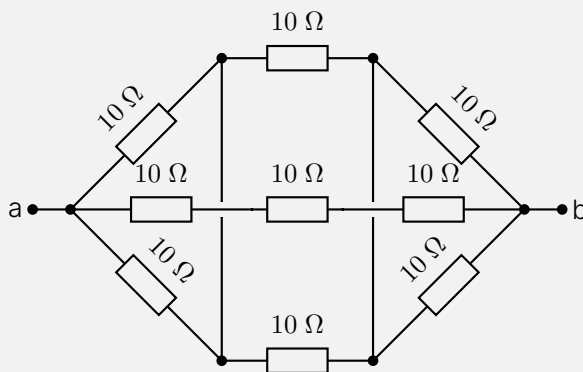
$$\frac{45}{7}I_2 + 3I_3 = 5$$

$$I_1 + 3I_3 = 5$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

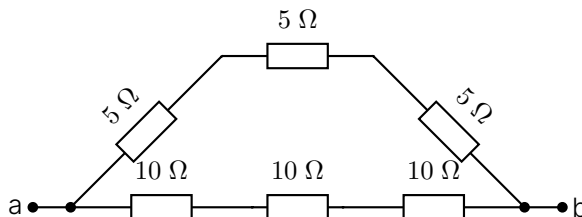
La solución es: $I_1 = \frac{75}{67} \text{ A}$, $I_2 = \frac{35}{201} \text{ A}$, $I_3 = \frac{260}{201} \text{ A}$.

20. Calcular la resistencia equivalente entre los puntos a y b formada por la asociación de resistencias del circuito siguiente:



Solución

Aunque este circuito parece complicado, se puede reducir con facilidad si nos damos cuenta de que las resistencias de 10Ω de la rama de arriba y de la rama de abajo están en paralelo dos a dos. Para ello debemos observar que los vértices de las ramas superior e inferior están conectados mediante un hilo conductor, lo que hace que se encuentren al mismo potencial.



La reducción es ahora trivial, en la rama de abajo tenemos 3 resistencias en serie de 10Ω y en la rama de arriba son 3 resistencias de 5Ω en serie.

El resultado es una resistencia de $30\ \Omega$ en paralelo con una resistencia de $15\ \Omega$ en serie cuyo equivalente vale: $R_{eq} = 10\ \Omega$.

5 GENERACIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO

5.1 Ecuaciones Relevantes.

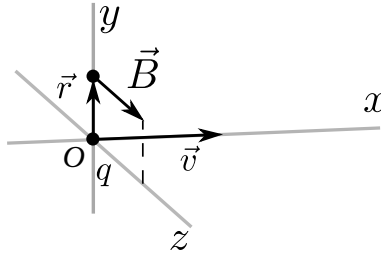
■ Campo magnético generado por una carga puntual en movimiento.

Cuando una partícula con carga q se mueve con una cierta velocidad $\vec{v}$ genera un campo magnético en el espacio que la rodea. Este campo magnético viene determinado por la siguiente ecuación:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (5.1)$$

Con $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ y $r = |\vec{r}|$, siendo $\vec{r}$ el vector que parte de la carga y finaliza en el punto donde se quiere determinar el campo magnético.

Las unidades del campo magnético en el Sistema Internacional es el *Tesla* [T], que viene definido como $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$



y la constante μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío que en unidades del Sistema Internacional tiene un valor de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$.

■ Ley de Biot y Savart.

Cuando en lugar de una única carga tenemos una corriente eléctrica I , deberemos aplicar la Ley de Biot y Savart cuya expresión para un elemento diferencial de corriente viene dada por:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (5.2)$$

Aplicando la ecuación (5.2) podemos obtener los campos generados por distintos conductores por los que circula una corriente I .

A continuación se presentan varios resultados sencillos de obtener mediante integración directa.

En ellos únicamente representamos el módulo de $\vec{B}$, y su sentido vendrá determinado por el producto $I d\vec{l} \times \vec{u}_r$. Como regla sencilla para obtener el

sentido del campo magnético aplicaremos la conocidad como regla de la mano derecha o regla del sacacorchos.

- **Campo magnético generado por una espira de radio R en su centro.**

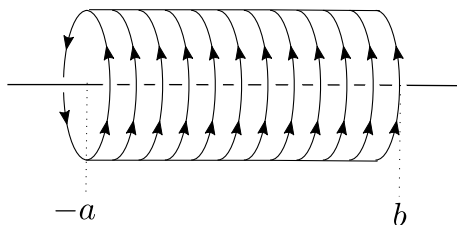
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (5.3)$$

- **Campo magnético generado por una espira de radio R en un punto de su eje longitudinal situado a una distancia x del centro de la espira.**

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (5.4)$$

Obsérvese que las expresiones (5.3) y (5.4) coinciden cuando consideramos la distancia $x = 0$.

- **Campo magnético generado por un solenoide finito en un punto de su eje.**



Si consideramos que respecto del punto del eje donde queremos calcular el campo magnético los extremos del solenoide están en los puntos $-a$ y b , el campo magnético lo podemos expresar como:

$$B = \frac{\mu_0}{2} I n \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) \quad (5.5)$$

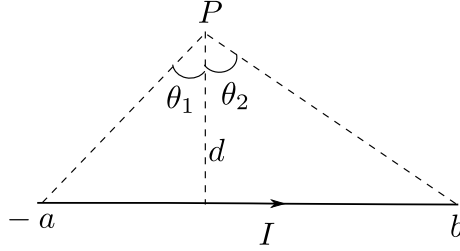
donde n es la densidad de espiras o número de espiras por unidad de longitud ($n = N/L$), L es la longitud del solenoide y N su número total de espiras.

- **Campo magnético generado por un solenoide infinito en su interior.**

$$B = \mu_0 n I \quad (5.6)$$

Podemos comprobar que las expresiones (5.5) y (5.6) coinciden cuando particularizamos la primera para el caso $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$.

- **Campo magnético generado por un conductor rectilíneo de longitud L en un punto situado a una distancia d .**



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + d^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (5.7)$$

■ **Campo magnético generado por un hilo rectilíneo infinito.**

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \quad (5.8)$$

donde d es la distancia del hilo al punto.

Podemos comprobar que las expresiones (5.7) y (5.8) coinciden cuando particularizamos la primera para el caso $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$, o cuando $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$.

■ **Campo magnético generado en el interior de un toroide de radios a y b .**

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad (5.9)$$

donde N es el número de vueltas del solenoide y donde $a \leq r \leq b$.

En este caso el campo magnético generado en el interior del solenoide tiene sentido tangente a la circunferencia de centro el centro del toroide y radio r .

Fuera del toroide el campo magnético es nulo.

■ **Ley de Gauss para el magnetismo.**

De forma similar a como se definió en el capítulo 1 el flujo eléctrico ϕ_e , podemos definir el flujo magnético como una cantidad relacionada con el número de líneas de campo que atraviesan una superficie. Sin embargo a diferencia de las líneas de campo eléctrico, las líneas de campo magnético son líneas cerradas. Esto nos lleva a afirmar que el flujo magnético a través de la superficie que delimita un volumen cerrado siempre es cero.

$$\phi_m = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{u}_n dA = \oint_S B_n dA = 0 \quad (5.10)$$

En el Sistema Internacional la unidad del flujo magnético es el Weber [Wb] y su valor es $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

■ Ley de Ampère.

La Ley de Ampère se utiliza para calcular el campo eléctrico generado por distribuciones continuas de carga bajo unas determinadas condiciones de simetría.

En este caso, la Ley de Ampère nos permitirá calcular el campo magnético generado por corrientes continuas con un alto grado de simetría tales como el conductor rectilíneo infinito, el toroide y el solenoide infinito.

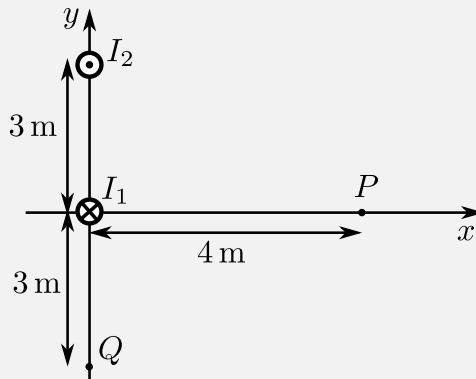
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B_t dl = \mu_0 I_C \quad (5.11)$$

I_C representa la suma algebraica de las intensidades de corriente que atraviesan la superficie delimitada por la curva C . El sentido positivo para el camino de integración viene dado por la dirección de la corriente I_C de acuerdo con la regla de la mano derecha.

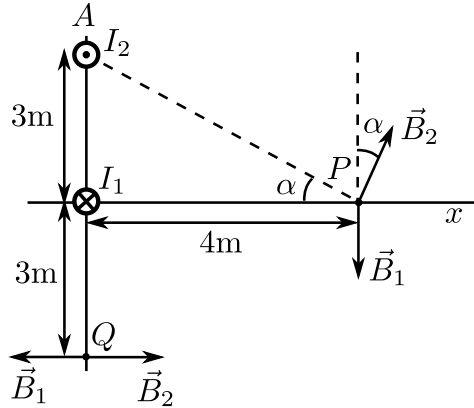
5.2 Ejercicios

1. Dos hilos conductores paralelos están situados según la dirección del eje z . El primero de ellos pasa por el origen de coordenadas $(0,0)$ y por él circula una intensidad $I_1 = 3,2$ A. El segundo pasa por el punto $(0,3)$ m y por él circula una intensidad $I_2 = 5$ A. Los sentidos de ambas corrientes vienen indicados en la figura.

- a) Dibuje el campo generado por cada uno de los hilos en los puntos P y Q que se indican en la figura.
- b) Determine el valor del campo magnético total en los puntos P y Q.

Solución

- a) Para proceder al dibujo de los campos magnéticos generados por cada hilo, deberemos tener en cuenta la ley de Biot y Savart, según la cual el campo magnético generado por un elemento de corriente es perpendicular al plano generado por el hilo y el vector que va desde el hilo hasta el punto donde queremos calcular el campo. Teniendo en cuenta esto,



- b) Procedamos a calcular el valor de los campos en los puntos P y Q . Para ello, una vez que sabemos el sentido de cada uno de los campos, calcularemos su módulo mediante la ecuación (5.8) y los sumaremos vectorialmente.

Punto Q

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi 3}(-\vec{i}) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 6}\vec{i} = -0,47 \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

Punto P

En este caso lo primero que debemos hacer es la descomposición del campo $\vec{B}_2$ en sus componentes x e y , para lo cual haremos uso de las razones trigonométricas del ángulo α que hemos indicado en la figura.

$$B_{2,x} = B_2 \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{5}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{2,y} = B_2 \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{5}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Finalmente procedemos a sumar los campos, teniendo en cuenta que el campo $\vec{B}_1$ únicamente tiene componente y :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi 4}(-\vec{j}) = -\frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \vec{j}$$

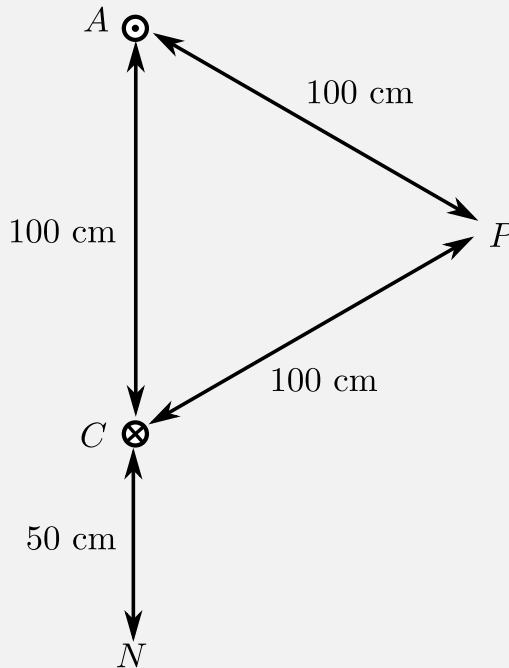
El campo total que obtendremos será:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_1 + B_{2,x}\vec{i} + B_{2,y}\vec{j}$$

$$\vec{B}_T = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \vec{i} + \left(\frac{8}{5} \cdot 10^{-7} - \frac{8}{5} \cdot 10^{-7} \right) \vec{j} = \frac{6}{5} \cdot 10^{-7} \vec{i} \text{ T}$$

2. Dos hilos rectilíneos, paralelos y horizontales están separados 100 cm. Por el punto A pasa una corriente $I_A = 3$ A dirigida hacia fuera del plano de la figura. Determine:

- La intensidad y el sentido de la corriente en el conductor C si el campo magnético en el punto N es nulo.
- El campo magnético en el punto P .



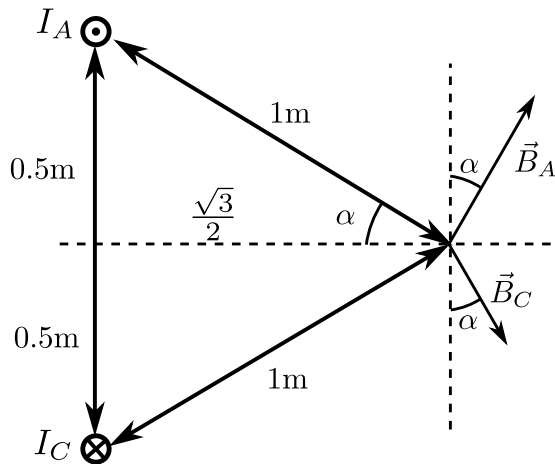
Solución

- Como queremos que el campo magnético en el punto N sea nulo, la corriente que pasa por el punto C deberá generar un campo magnético que anule el generado por la corriente I_A . Aplicando la regla de la mano derecha, el campo magnético generado por I_A tiene sentido hacia la derecha, por lo tanto, el campo generado por I_C deberá ir hacia la izquierda. I_C deberá apuntar hacia dentro del papel. Para determinar su intensidad deberemos igualar los módulos de los campos generados por ambas corrientes aplicando la

ecuación del campo de un hilo infinito (5.8).

$$B_A = B_C \rightarrow \frac{\mu_0 I_A}{2\pi d_A} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi d_C} \rightarrow \frac{\mu_0 3}{2\pi 1,5} = \frac{\mu_0 I_C}{2\pi 0,5} \rightarrow I_C = 1 \text{ A}$$

- b) Una vez que hemos obtenido la corriente I_C y su sentido, para calcular el campo magnético en el punto P lo primero que debemos hacer es un dibujo de los campos generados por ambas corrientes, pues esto nos facilitará la descomposición de los campos y su posterior suma.



Una vez dibujados los campos magnéticos, los descompondremos en sus componentes x e y . Para calcular sus módulos aplicaremos la ecuación (5.8).

$$B_{A,x} = B_A \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{3}{1} \frac{0,5}{1} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{A,y} = B_A \cos \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{3}{1} \frac{\sqrt{3}/2}{1} = 3\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{C,x} = B_C \sin \alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{1} \frac{0,5}{1} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

$$B_{C,y} = -B_C \cos \alpha = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{1} \frac{\sqrt{3}/2}{1} = -\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Sumando las componentes x e y , obtendremos el valor total del campo en P.

$$\vec{B}_P = (4 \cdot 10^{-7} \vec{i} + 2\sqrt{3} \cdot 10^{-7} \vec{j}) \text{ T}$$

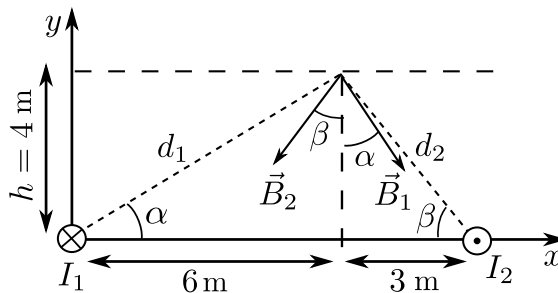
3. Dos corrientes indefinidas, I_1 e I_2 , dirigidas según el eje z cortan el plano xy por los puntos $(0, 0)$ m y $(9, 0)$ m respectivamente. La corriente I_1 lleva sentido negativo y tiene un valor de 2 amperios. Sabiendo que el campo magnético generado por ambas corrientes en el punto $(6, 4)$ m solo tiene componente según el eje y , calcule el valor y sentido de la corriente I_2 .

Solución

Para afrontar este problema lo primero que debemos hacer es un dibujo en el que se representen ambas corrientes así como los campos magnéticos que generan.

Para la corriente I_1 , dado que nos dan su sentido, el campo es sencillo de dibujar sin más que aplicar la regla de la mano derecha. Sin embargo, para determinar el sentido de la corriente I_2 , deberemos utilizar el hecho de que el campo magnético total en el punto $(6, 4)$ m solo tiene componente y y, por lo tanto, el campo magnético que genera la corriente I_2 debe tener una componente según el eje x que se oponga a la del campo magnético generado por la corriente I_1 . Con todo esto, deducimos que el sentido de la corriente I_2 debe ir en el sentido positivo del eje z o lo que es lo mismo hacia fuera del papel.

Una vez que tenemos el sentido de ambas corrientes, podemos dibujar los campos magnéticos que generan, obteniendo la siguiente figura. En esta figura se han marcado los ángulos necesarios para proceder a la descomposición de ambos campos.



Tal y como se ha comentado antes, las componentes x de ambos campos deben anularse. En este caso, el sentido de la corriente I_2 ya se ha tomado de modo que la componente del campo que genera anula la componente x del generado por I_1 , por lo tanto, lo único que tenemos

que hacer es igualar el módulo de ambas componentes. Para proceder a la descomposición de los campos magnéticos haremos uso de los ángulos y distancias que se han señalado en la figura anterior. De este modo:

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d_1} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1}{d_1} \frac{h}{d_1}$$

$$B_{2x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{d_2} \sin \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_2}{d_2} \frac{h}{d_2}$$

Si finalmente igualamos ambas componentes,

$$\frac{I_1}{d_1^2} = \frac{I_2}{d_2^2} \rightarrow \frac{2}{6^2 + 4^2} = \frac{I_2}{3^2 + 4^2} \rightarrow I_2 = 0,96 \text{ A}$$

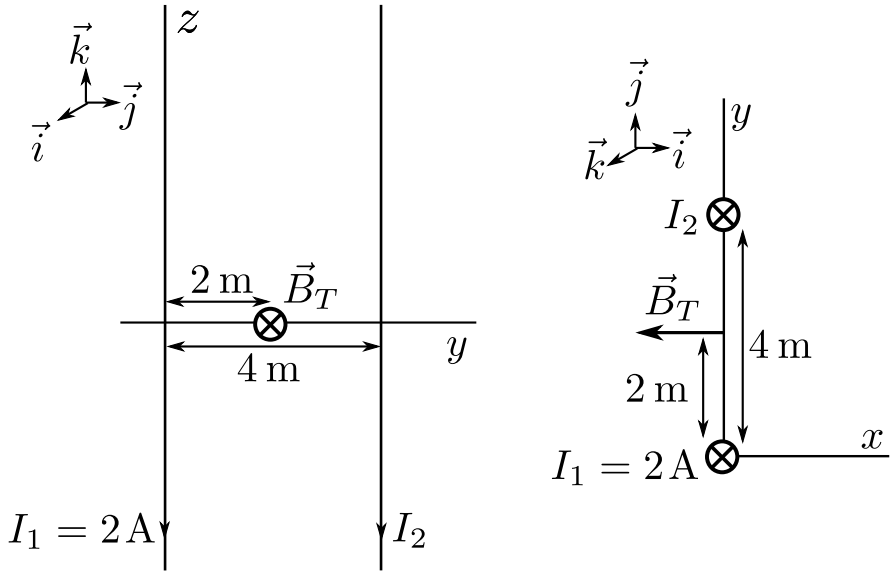
4. Se tienen dos cables rectilíneos paralelos indefinidos. El primero de ellos situado sobre el eje z es recorrido por una intensidad $I_1 = 2 \text{ A}$ en el sentido negativo del eje. El segundo hilo pasa por el punto $(0, 4, 0) \text{ m}$.

a) Calcule la intensidad que circula por este segundo hilo conductor (módulo y sentido) sabiendo que el campo magnético en el punto $(0, 2, 0) \text{ m}$ es $\vec{B}_T = -0,3\mu\text{T } \vec{i}$

b) ¿En qué punto(s) del eje y el campo magnético será nulo?

Solución

Antes de ponernos a resolver el problema es conveniente realizar un dibujo en el que se pueda apreciar de forma clara la posición de los hilos y que nos permita determinar la dirección y sentido de los campos magnéticos que estos van a generar. Cuando se hagan este tipo de dibujos es fundamental tener en cuenta que el sistema de referencia debe cumplir $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. A continuación, presentamos dos posibles esquemas válidos para la resolución del problema.



- a) Puesto que el campo magnético total en el punto $(0, 2, 0)\text{ m}$ lleva sentido $-\vec{i}$ y como la corriente I_1 situada sobre el eje z genera un campo según $\vec{i}$, esto nos lleva a deducir que la corriente I_2 , situada en el punto $(0, 4, 0)\text{ m}$, deberá llevar sentido $-\vec{k}$ para que de este modo el campo que genere lleve sentido $-\vec{i}$.

Calculemos el valor de la intensidad de corriente que circula por el segundo conductor. Para ello aplicaremos la ecuación (5.8) a cada una de las corrientes y haremos su suma vectorial. De este modo,

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow -0,3 \cdot 10^{-6} \vec{i} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \vec{i} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2} (-\vec{i})$$

$$\frac{\mu_0 I_2}{2\pi 2} = 0,3 \cdot 10^{-6} + \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \rightarrow I_2 = 5\text{ A}$$

- b) Fijándonos en el esquema de la izquierda, observamos que a la izquierda del hilo 1 ambos campos apuntan hacia el interior del papel, mientras que a la derecha del hilo 2 ambos campos apuntan hacia fuera. Por lo tanto, el único punto del eje y en el que el campo magnético es nulo debe estar situado entre ambos hilos.

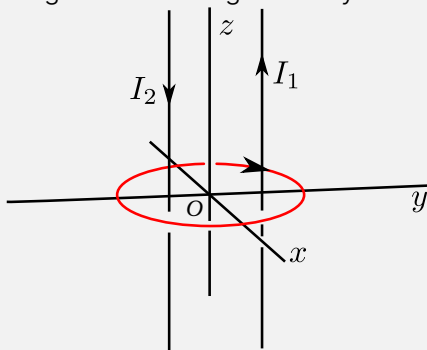
Para calcular la posición exacta, deberemos igualar los módulos de los campos generados por ambas corrientes. Si consideramos que la distancia desde el punto hasta el hilo 1 es d , la distancia desde el punto hasta el hilo 2 será $(4 - d)$. De este modo,

$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi (4 - d)} \rightarrow d = \frac{8}{7}\text{ m}$$

El punto del eje y donde el campo magnético es nulo es $(0, \frac{8}{7}, 0)$ m.

5. Consideramos un trayecto orientado siguiendo un círculo de radio 10 cm centrado en el origen en el plano Oxy . La orientación del trayecto sigue el sentido horario del círculo. Tenemos un cable con corriente $I_1 = 2$ A que cruza el círculo en el sentido de los z crecientes y otro cable con corriente $I_2 = 5$ A que cruza el círculo en el sentido de los z decrecientes.

Aplicando la Ley de Ampère, calcular la circulación del campo magnético a lo largo del trayecto descrito.



Solución

Si aplicamos la Ley de Ampère al trayecto marcado, se puede obtener el resultado sin realizar la integración del campo. Sin embargo, hay que tener cuidado con la suma de las corrientes dado que la orientación del trayecto y el sentido de las corrientes influyen en el resultado.

Fijándonos en el trayecto y usando la regla de la mano derecha, podemos ver que la corriente I_2 contribuye a una suma positiva a la integral: si colocamos el pulgar en el sentido de I_2 , podemos observar que cerrando la mano el sentido descrito coincide con la orientación del trayecto. Al contrario que la corriente I_1 que restará a la integral.

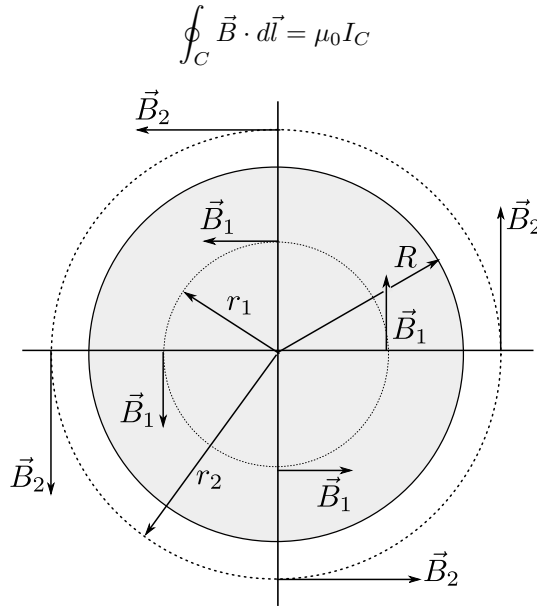
Por lo tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_2 - I_1) = 4\pi(5 - 2) = 3,77 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m}$$

6. Obtenga la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito de radio R por el que circula una corriente I uniformemente distribuida por la sección del hilo.

Solución

Para resolver este problema aplicaremos la ley de Ampère (5.11) en dos regiones distintas, una dentro del hilo ($r < R$) y otra fuera ($r > R$). Para facilitar la comprensión del problema es útil realizar una visión frontal del hilo y tomar como superficies para aplicar Ampère dos secciones circulares centradas en el eje del hilo de radios $r_1 < R$ y $r_2 > R$. En este caso supondremos que la corriente apunta hacia nosotros, por lo tanto el campo que se genera en las circunferencias que limitan ambas superficies son tangentes a ellas tal y como se muestra en la figura adjunta.



■ $r > R$

Este caso es sencillo ya que la corriente que atraviesa la superficie de radio r_2 es toda la corriente total que transporta el hilo conductor, es decir $I_C = I$ y por lo tanto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_2 2\pi r_2 = \mu_0 I_C \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

De este modo si generalizamos a cualquier punto externo al hilo obtenemos:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

■ $r < R$

Ahora la corriente que atraviesa la superficie limitada por la circunferencia de radio r_1 no es la corriente total, I , sino que es solo una proporción de esta la que nos interesa. Esta corriente I_C la podemos determinar en función de las secciones del hilo y de la superficie de radio r_1 , de este modo:

$$I_C = \frac{I}{\pi R^2} \pi r_1^2 = \frac{I r_1^2}{R^2}$$

Una vez determinada I_C aplicamos la ley de Ampère

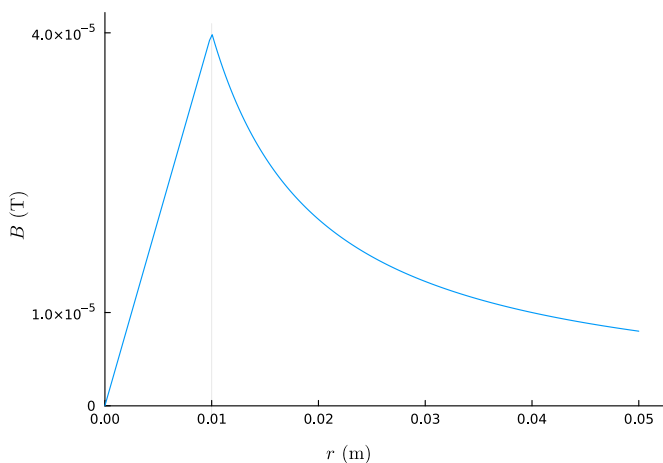
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_1 2\pi r_1 = \mu_0 I_C = \mu_0 \frac{I r_1^2}{R^2}$$

De este modo si generalizamos a cualquier punto interno al hilo obtenemos:

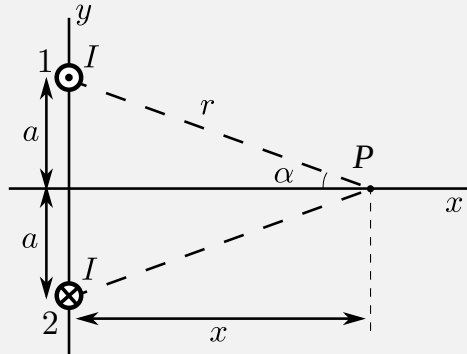
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Resumiendo, el campo magnético en el interior del hilo va aumentando su módulo de forma lineal conforme nos alejamos del eje central, mientras que una vez fuera del hilo el módulo del campo decrece como $1/r$.

A modo de ejemplo, si suponemos que por un hilo de 1 cm de radio circula una corriente de 1 amperio, la gráfica que obtenemos es la siguiente. En esta gráfica se pueden apreciar claramente las dos regiones: en el interior del hilo la intensidad del campo magnético crece de forma lineal con la distancia al centro del hilo, mientras que una vez fuera el campo decrece como $\frac{1}{r}$.



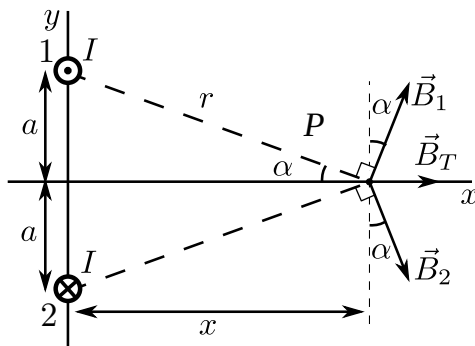
7. La figura muestra dos secciones frontales de conductores paralelos, muy largos y perpendiculares al plano xy . Cada uno de ellos transporta una corriente I , pero en sentidos contrarios, tal y como se muestra en la siguiente figura.



- Dibujar el campo magnético creado por cada uno de los conductores, así como el campo magnético resultante en el punto P.
- Hallar la expresión del módulo de B para cualquier punto del eje x , en función de la coordenada x .
- ¿Para qué valor de x B es máximo?
- Construir una gráfica que represente B en función de x .

Solución

- Aplicando la regla de la mano derecha, podemos dibujar los campos magnéticos generados por los cables 1 y 2, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ respectivamente, obteniendo la siguiente figura:



- b) Para calcular el campo magnético resultante, primero calcularemos el módulo de cada uno de los campos para posteriormente descomponerlos en sus componentes x e y y proceder a su suma. Para calcular el módulo de ambos campos magnéticos aplicaremos la fórmula de campo magnético generado por un hilo infinito:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde la distancia r se deduce directamente aplicando el teorema de Pitágoras $r = \sqrt{x^2 + a^2}$. En este caso, tanto la distancia entre los conductores y el punto P como la intensidad que circula por los hilos es la misma, y por lo tanto los módulos de ambos campos serán iguales $|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| = B$, y su valor vendrá dado por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Al descomponer ambos campos en sus componentes según los ejes x e y obtendremos:

$$B_{1x} = B_{2x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \sin \alpha$$

$$B_{1y} = -B_{2y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \cos \alpha$$

Observe que las componentes según el eje y tienen igual módulo pero sentidos opuestos, lo que implica que ambas componentes se anulan mutuamente, con lo que el campo magnético total será únicamente la suma de las componentes x de ambos campos. Si además expresamos $\sin \alpha$ en función de los parámetros geométricos del problema nos queda:

$$B_T = B_{1x} + B_{2x} = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$B_T = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

Dándole carácter vectorial al campo magnético resultante obtenemos:

$$\vec{B}_T = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \vec{i}$$

- c) Para calcular el valor de x para el cual el campo magnético es máximo simplemente deberemos calcular el máximo de la función obtenida anteriormente:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \right) = -\frac{\mu_0 I a 2x}{\pi(x^2 + a^2)^2} = 0$$

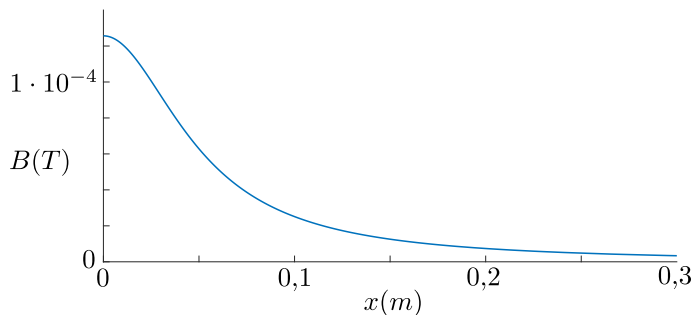
La única solución de la ecuación anterior nos lleva a obtener que el punto $x = 0$ es un punto extremal. Para saber si es máximo o mínimo debemos volver a derivar y estudiar el signo de esta derivada en dicho punto

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2 + a^2)} \right) = -\frac{2\mu_0 I a(a^2 - 3x^2)}{\pi(a^2 + x^2)^3}$$

Al sustituir $x = 0$, la expresión tiene signo negativo y por lo tanto obtenemos que el punto $x = 0$ es el punto del eje x para el cual el campo magnético alcanza su valor máximo.

A este resultado podríamos haber llegado de una forma intuitiva simplemente razonando que el módulo del campo magnético es inversamente proporcional a la distancia y el punto que se encuentra a una distancia mínima de ambos cables en este caso es el punto $x = 0$, por lo tanto si la distancia es mínima, el campo será máximo. Esto es posible hacerlo porque la distribución de los hilos es simétrica y las corrientes que circulan por ellos son iguales, en caso de no ser así deberemos proceder como se ha mostrado anteriormente.

- d) Para construir una gráfica del valor del campo magnético a lo largo del eje x deberemos hacer uso de algún programa de representación gráfica (Excel, Matlab, Mathematica, etc.). En nuestro caso presentamos la gráfica obtenida para los valores $I=5$ A, $a=5$ cm



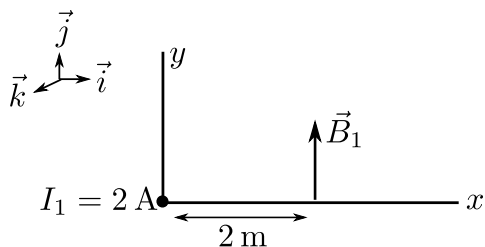
8. Sea un hilo infinito situado sobre el eje z por el que circula una corriente $I_1 = 2 \text{ A}$ en el sentido positivo de dicho eje. Calcule:

- El campo magnético que genera la corriente en el punto $(2, 0, 0) \text{ m}$.
- El punto del plano xy por el que debe pasar un segundo hilo, paralelo al anterior, por el que circula una corriente $I_2 = 3 \text{ A}$ para que el campo magnético total en el punto $(2, 0, 0) \text{ m}$ sea nulo. Considere que la corriente en este segundo hilo también lleva el sentido positivo del eje z .
- Repita los apartados anteriores para el punto $(3, 4, 0) \text{ m}$. ¿Y si la corriente en el segundo hilo llevase sentido opuesto?

Solución

- En este tipo de problemas siempre es útil realizar un esquema en el que se representen las corrientes y los campos magnéticos que estas generen teniendo cuidado de representar correctamente los sistemas de referencia.

En este ejercicio, el esquema sería el siguiente:



Para obtener el módulo del campo magnético que se nos pide aplicaremos (5.8) y su sentido vendrá dado por (5.2) o la regla de la mano derecha, de este modo obtenemos:

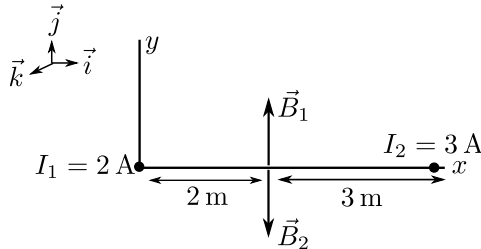
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 2} \rightarrow \vec{B}_1 = 2 \cdot 10^{-7} \vec{j} \text{ T}$$

- b) Lo primero que hacemos es calcular la distancia d_2 que debe haber entre el punto (2, 0, 0) y el punto de intersección entre el plano xy y el segundo hilo. Para ello aplicamos (5.8) y exigimos que el módulo del campo generado por el segundo hilo sea igual al obtenido en el apartado anterior.

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_2} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ T} \rightarrow d_2 = 3 \text{ m}$$

Una vez obtenida esta distancia deducimos el punto de intersección que se nos pide. Para ello nos basaremos en (5.2) y en el hecho de que el campo magnético que genera la segunda corriente debe llevar sentido $-\vec{j}$. De este modo, el punto de corte deberá situarse en el eje x a la derecha del punto (2, 0, 0) y por lo tanto el punto que dista a 3 m del anterior será (5, 0, 0) m.

El esquema que representa este problema lo podemos ver en la figura siguiente:



- c) Para resolver el problema en el nuevo punto que se nos propone procederemos de modo similar. Primero calculamos el campo magnético generado por la corriente I_1 en el punto (3, 4, 0), donde $d_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d_1} = \frac{\mu_0 2}{2\pi 5} = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

Para calcular el vector unitario en la dirección del campo debemos aplicar (5.2) donde el vector unitario de la corriente es $\vec{k}$ y $\vec{u}_r = (0,6,0,8,0)$ es el vector unitario que apunta desde el origen de coordenadas (punto del plano por el que pasa el hilo infinito 1)

al punto donde queremos calcular el campo magnético. Para calcular este vector unitario debemos utilizar los cosenos directores del vector. Con todo ello, obtenemos que el campo magnético en el punto (3, 4) m es:

$$\vec{B}_1 = 0,8 \cdot 10^{-7} (-0,8\vec{i} + 0,6\vec{j}) \text{ T}$$

Por lo tanto, el campo magnético que genera el hilo 2 deberá ser:

$$\vec{B}_2 = 0,8 \cdot 10^{-7} (0,8\vec{i} - 0,6\vec{j}) \text{ T}$$

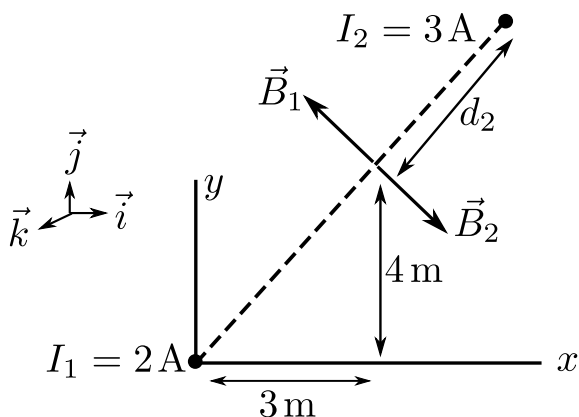
Para que la corriente I_2 genere un campo de intensidad $0,8 \text{ T}$ debe situarse a una distancia d_2 que obtenemos aplicando la ecuación (5.8)

$$B_2 = 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ T} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_2} \rightarrow d_2 = 7,5 \text{ m}$$

Finalmente, para calcular el punto del plano xy por el que debe pasar el segundo hilo aplicaremos (5.2) y deducimos que dicho punto debe situarse sobre la recta que une el origen de coordenadas con el punto (3, 4) a 7,5 m de dicho punto en la parte de la semirecta delimitada por el punto (3, 4, 0) y el infinito. Esta deducción del sentido del campo también lo podríamos hacer mediante la regla de la mano derecha.

$$\vec{r} = (3, 4) + 7,5 \cdot (0,6, 0,8) = (7,5, 10) \text{ m}$$

El esquema de este último apartado nos permite comprobar que nuestros razonamientos son ciertos. En muchos casos, la realización de este tipo de dibujos nos facilitan la localización de la segunda corriente.



Si el sentido de la segunda corriente fuese el opuesto, el razonamiento sería similar pero deduciríamos que el punto está situado en el tramo de la recta delimitada por el punto (3, 4) y $-\infty$, de este modo:

$$\vec{r} = (3, 4) - 7,5 \cdot (0, 6, , 0, 8) = (-1, 5, -2) \text{ m}$$

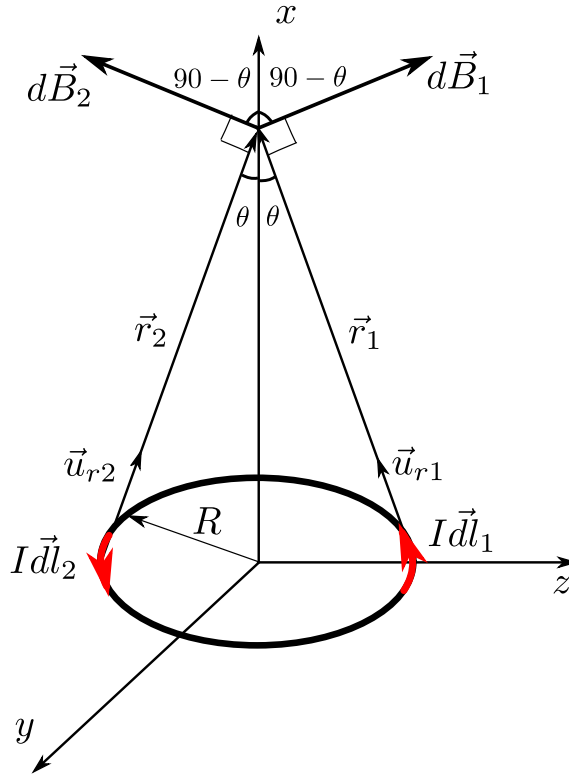
En este tipo de problemas en los que únicamente intervienen dos hilos paralelos, para que el campo resultante en un determinado punto del espacio sea nulo estos hilos y el punto en cuestión siempre deberán estar alineados sobre la misma recta.

9. Obtenga la expresión del campo magnético generado por una espira de radio R por la que circula una corriente I en un punto de su eje longitudinal situado a una distancia x del centro de la espira.

Solución

Lo primero que queremos indicar al lector es que la expresión que se pide es la fórmula (5.4).

Para proceder a la resolución de este problema, lo más conveniente es realizar un dibujo que nos permita identificar la dirección y sentido del campo magnético. Este dibujo nos va a permitir apreciar la simetría del campo magnético lo que facilitará la obtención de la expresión que se nos pide.



Si tomamos un elemento diferencial de corriente $I d\vec{l}_1$ y aplicamos la ley de Biot y Savart (5.2) obtenemos el campo $d\vec{B}_1$

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2}$$

Este campo magnético lo podemos descomponer en dos componentes: la componente según la dirección del eje x , $d\vec{B}_x$ y la componente en el plano perpendicular a la dirección x , $d\vec{B}_{yz}$. De este modo obtenemos:

$$d\vec{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2} \cos(90 - \theta)$$

y

$$d\vec{B}_{yz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{r1}}{r_1^2} \sin(90 - \theta)$$

Si analizamos el esquema de la figura, podemos observar que el elemento $d\vec{l}_1$ tiene un elemento simétrico $d\vec{l}_2$ que genera un campo magnético $d\vec{B}_2$ cuya componente en el plano perpendicular a la dirección x

anula la componente del campo generada por el elemento $d\vec{l}_1$. Esto nos lleva a la simplificación del problema puesto que únicamente tenemos que calcular la componente x del campo magnético total.

$$\vec{B}_x = \int d\vec{B} \cos(90 - \theta) = \int \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}_1}{4\pi r_1^2} \cos(90 - \theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{r_1^2} \sin\theta$$

La distancia desde el elemento de corriente $d\vec{l}_1$ hasta el punto donde queremos calcular, lo podemos escribir en función de su coordenada x y el radio de la espira R : $r_1 = \sqrt{x^2 + R^2}$ y de forma similar también podemos relacionar $\sin\theta = R/r$. Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación anterior obtenemos

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \sin(\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R}{x^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Simplificando y teniendo en cuenta que hemos demostrado que el campo magnético total únicamente tiene componente x , podemos obtener la expresión que se nos pide:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$$

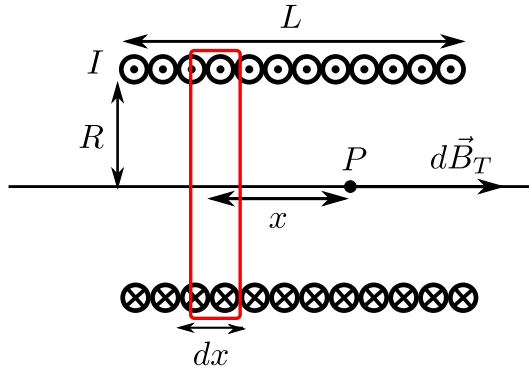
10. Obtenga la expresión del campo magnético generado por un solenoide de longitud L y N espiras de radio R por el que circula una corriente I en un punto de su eje longitudinal.

Solución

La expresión que se pide es una generalización de la fórmula (5.5) que hemos mostrado en la introducción de este capítulo.

Para proceder a la resolución de este problema, nos basaremos en la ecuación (5.4) que nos proporciona el campo magnético generado por una espira en un punto de su eje.

Para plantear el problema realizamos un dibujo en el que se representa un corte transversal del solenoide en el que se puede apreciar el sentido de la corriente en el propio solenoide. En este caso viendo el sentido de la corriente y teniendo en cuenta la regla de la mano derecha deducimos que el campo magnético en el punto P lleva sentido $+\vec{i}$ apuntando hacia la derecha como se muestra en la figura siguiente:



Tomamos un elemento diferencial de longitud dx del solenoide, observamos que contiene $n dx$ espiras, siendo n la densidad de espiras por unidad de longitud ($n = N/L$). El campo magnético generado por las espiras contenidas en este elemento diferencial de longitud lo podemos averiguar basándonos en la ecuación (5.4), y vendrá dado por la siguiente expresión:

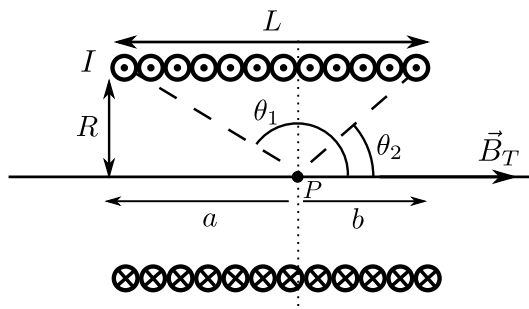
$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 n I dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \frac{N}{L}$$

Integrando esta expresión obtendremos el campo magnético generado por todo el solenoide.

Para realizar la integral hacemos el cambio de variable $R = x \operatorname{tg} \theta$ y tenemos en cuenta que $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$.

$$x = \frac{R}{\operatorname{tg} \theta} \rightarrow dx = \frac{-R}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

Esto nos lleva a poder expresar el dB anterior en función de la variable θ .



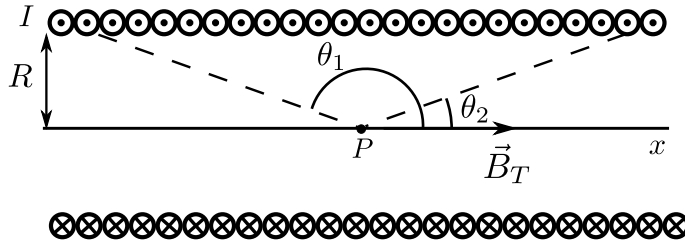
Operando e integrando, llegamos a la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

Esta expresión la podemos transformar escribiendo los cosenos en función de las características físicas del solenoide. En este caso, respecto del punto P , el extremo izquierdo del solenoide está en el punto $-a$ y el extremo derecho en b , lo que nos lleva a:

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} - \frac{-a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0 In}{2} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

Un caso particular de este problema sería considerar que el solenoide es muy largo y que el punto P está situado en el medio del propio solenoide. Esto nos lleva a que $\theta_1 \rightarrow \pi$ y que $\theta_2 \rightarrow 0$.

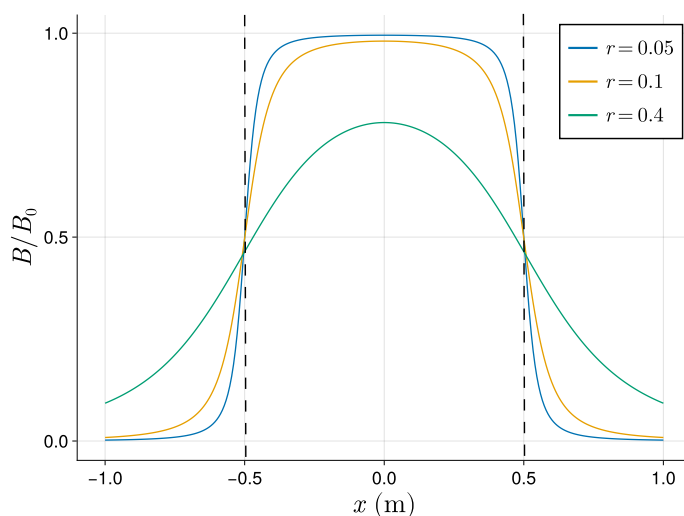


De este modo,

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2L} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = \frac{\mu_0 IN}{L} = \mu_0 nI$$

que se corresponde con la expresión del campo magnético en el interior de un solenoide infinito.

Aunque no se pide, para que el lector entienda por qué en la mayoría de los problemas directamente usamos la fórmula correspondiente al campo magnético de un solenoide infinito en lugar de particularizar la expresión que hemos obtenido, presentamos la siguiente gráfica.



En ella se representa la relación entre el campo magnético exacto en el eje de un solenoide, B , y la aproximación de solenoide infinito, $B_0 = \mu_0 n I$. Esta relación la hemos calculado para 3 solenoides distintos de longitud 1 m y de radios $r = 5$ cm, $r = 10$ cm y $r = 40$ cm. En la gráfica también se han marcado con una línea punteada vertical los puntos que se corresponderían con los extremos del solenoide.

Si analizamos los resultados comprobamos que para los valores más pequeños de los radios el valor del campo magnético permanece prácticamente constante y con un valor muy próximo al valor ideal del solenoide infinito $B/B_0 \approx 1$ siendo esta aproximación más válida cuanto más pequeño es el radio. Asimismo, podemos observar que el campo magnético decrece en el exterior del solenoide y que este decrecimiento es más pronunciado cuanto más pequeño es el radio del solenoide.

Estos resultados nos llevan a aceptar la aproximación del campo magnético generado por un solenoide infinito como opción válida para simplificar los problemas en los que aparecen campos magnéticos generados por solenoides, puesto que normalmente los radios serán mucho menores que las longitudes de los solenoides implicados.

6 FUERZAS MAGNÉTICAS

6.1 Ecuaciones Relevantes.

■ Fuerza magnética sobre partícula cargada o Ley de Lorentz.

Cuando una partícula con carga q se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en una región del espacio en la que hay un campo magnético $\vec{B}$, esta experimenta una fuerza perpendicular al plano generado por ambos vectores y que viene determinada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.1)$$

Si en lugar de una carga puntual lo que tenemos es una corriente eléctrica, I , la fuerza sobre cada elemento diferencial de corriente será:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (6.2)$$

siendo $d\vec{l}$ un vector de módulo dl y sentido el que lleva la corriente.

Un aplicación particular de este fenómeno es el caso de dos corrientes paralelas infinitas separadas una distancia d .

En este caso, aparecerá una fuerza sobre cada una de las corrientes debido al campo magnético que la otra genera en la zona donde se encuentra la primera. Obviamente, al tratarse de corrientes infinitas, no tiene sentido hablar de fuerza total, pero sí de fuerza por unidad de longitud, F/l . Haciendo uso de las ecuaciones (5.8) y (6.2), obtenemos:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \quad (6.3)$$

Para determinar el sentido de la fuerza deberemos hacer el producto vectorial $d\vec{l} \times \vec{B}$.

El resultado que obtendremos es sencillo, corrientes paralelas con el mismo sentido se atraen, mientras que si las corrientes llevan sentidos opuestos, las corrientes se repelen.

■ Movimiento de cargas puntuales en el seno de un campo magnético.

Una partícula de masa m y carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ perpendicular a un campo magnético describirá una órbita circular de radio R y periodo T .

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad (6.4)$$

$$T = \frac{2\pi m}{|q|B} \quad (6.5)$$

En este caso el campo magnético no realiza trabajo sobre la partícula y no modifica la energía cinética de la partícula, modifica $\vec{v}$ pero no $|\vec{v}|$.

■ Espiras de corriente.

Cuando una espira de corriente es introducida en un campo magnético las fuerzas que actúan sobre ella generan un momento $\vec{M}$ (o torque, $\vec{\tau}$) que viene dado por:

$$\vec{M} = NI\vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (6.6)$$

donde N es el número de vueltas de la espira, I la intensidad de corriente que circula por ella y $\vec{S} = S\vec{u}_n$ es el vector normal a la superficie de la espira y cuyo sentido viene determinado por el sentido de la corriente y la regla de la mano derecha.

La magnitud $\vec{\mu}$ se conoce como momento dipolar magnético o momento magnético,

$$\vec{\mu} = NIS\vec{u}_n \quad (6.7)$$

En función de estos términos podemos definir la energía potencial de la espira:

$$U = -\mu B \cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (6.8)$$

6.2 Ejercicios

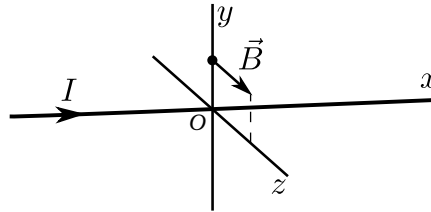
1. Un cable rectilíneo situado sobre el eje x lleva una corriente $I = 10$ A en el sentido positivo del eje. Una partícula de carga $q = 10 \mu\text{C}$ se encuentra en la coordenada $y = 1$ cm. Determine la fuerza que actúa sobre la partícula en los siguientes casos:

- a) $\vec{v} = 1\vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- b) $\vec{v} = 1\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- c) $\vec{v} = 0,5\vec{i} + 0,8\vec{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
- d) $\vec{v} = 0,5\vec{i} + 0,8\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Solución

El campo magnético generado por el cable en el punto $y = 1 \text{ cm}$ se puede expresar vectorialmente por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y} \vec{k} = 2 \cdot 10^{-4} \vec{k} \text{ T} \quad (6.9)$$



El vector se deduce de la regla de la mano derecha aplicada al hilo de corriente.

Se puede ahora calcular las fuerzas en cada situación:

- a) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4} (\vec{i} \times \vec{k}) = 2 \cdot 10^{-9} (-\vec{j}) \text{ N}$
- b) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4} (\vec{j} \times \vec{k}) = 2 \cdot 10^{-9} \vec{i} \text{ N}$
- c) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4} ((0,5\vec{i} + 0,8\vec{j}) \times \vec{k}) = 2 \cdot 10^{-9} (-0,5\vec{j} + 0,8\vec{i}) \text{ N}$
- d) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-4} ((0,5\vec{i} + 0,8\vec{j} + 2\vec{k}) \times \vec{k}) = 2 \cdot 10^{-9} (-0,5\vec{j} + 0,8\vec{i}) \text{ N}$

2. Una partícula $q = 1\mu\text{C}$ pasa por el origen de coordenadas en el instante t_0 con velocidad $\vec{v} = 100\vec{i} + 14\vec{k} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Si el campo magnético en el origen de coordenadas vale $\vec{B} = 0,3\vec{i} + 0,01\vec{j} + 0,1\vec{k} \text{ T}$, determine la fuerza magnética sobre la partícula en este instante.

Siendo la masa de la partícula $m = 1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$, ¿cuál es la aceleración sobre la partícula?

Solución

Aplicamos la definición de la fuerza de Lorentz:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 10^{-6} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 100 & 0 & 14 \\ 0,3 & 0,01 & 0,1 \end{vmatrix} = -1,4 \cdot 10^{-7} \vec{i} - 5,8 \cdot 10^{-6} \vec{j} + 1 \cdot 10^{-6} \vec{k} \text{ N} \end{aligned}$$

La aceleración se deduce de las leyes de Newton. Siendo $\vec{F}$ la fuerza, tenemos:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -0,14\vec{i} - 5,8\vec{j} + 1,0\vec{k} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

3. Una corriente eléctrica de $I = 1 \text{ A}$ circula en un cable infinito a lo largo del eje x en dirección x creciente. En un determinado instante, una partícula cargada, $q = 1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, pasa por el punto $(0, 10, 0) \text{ cm}$ con una velocidad $\vec{v} = -10\vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calcule el vector fuerza que aparece sobre la carga.

Solución

Para resolver este problema deberemos aplicar la ecuación 6.1 teniendo en cuenta que el campo magnético que actúa sobre la partícula es el que genera el hilo. Su módulo viene determinado por $B = \mu_0 I / 2\pi d$ y su sentido por la ley de Biot-Savart o por la regla de la mano derecha. Combinando ambas ecuaciones, obtendremos:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{k} = 1 \cdot 10^{-6} 10(-\vec{i}) \times \frac{\mu_0 1}{2\pi 0,1} \vec{k} = 2 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}$$

4. Dos alambres paralelos y rectilíneos separados una distancia d , transportan intensidades de corriente I_1 e I_2 en el mismo sentido. Calcular la relación entre las fuerzas magnéticas que uno ejerce sobre el otro, es decir, F_{12}/F_{21} .

Solución

Para resolver este problema deberemos hacer uso de la ecuación (6.2), la cual una vez integrada y particularizada para el caso de la fuerza que el conductor 1 ejerce sobre el 2 nos queda

$$\vec{F}_{12} = I_2 \vec{l} \times \vec{B}_1$$

donde $\vec{B}_1$ es el campo magnético que la corriente 1 genera en los puntos del espacio donde está el hilo 2. Este campo vendrá dado por la ecuación:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde únicamente hemos calculado el módulo del campo. En este caso al ser los hilos paralelos, el campo magnético que genera cada uno de

los hilos es perpendicular a la corriente del otro hilo de modo que el módulo de la fuerza F_{12} es:

$$F_{12} = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

Procediendo de forma análoga podemos obtener la fuerza que el conductor 2 ejerce sobre el conductor 1, F_{21}

$$F_{21} = I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d}$$

con lo que obtenemos que la relación que buscábamos $F_{12}/F_{21} = 1$.

El resultado es una solución lógica si tenemos en cuenta la 3ª Ley de Newton.

5. Un protón (carga $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C y masa $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ kg) se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de $\Delta V = 1000$ V. Posteriormente entra en una región donde hay un campo magnético uniforme de magnitud $B = 0,9$ T perpendicular a su velocidad. Calcular la velocidad del protón en esta región y el radio de su trayectoria circular.

Solución

La diferencia de potencial en el espacio lleva asociada una diferencia en la energía potencial del protón. Como el campo eléctrico es un campo conservativo podemos aplicar el principio de conservación de la energía. De este modo, la pérdida de energía potencial se transforma en energía cinética.

$$\Delta U = q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando la velocidad de la ecuación anterior obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}}{1,7 \cdot 10^{-27}}} = 433,86 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Para calcular el radio de la trayectoria circular que describirá el protón una vez que entre en la región del espacio en la que está definido el campo magnético, simplemente debemos sustituir los datos en la ecuación (6.4):

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 433,86 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,9} = 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

6. Se lanza un electrón desde el reposo hasta alcanzar una velocidad $v = 10^3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (que dibujaremos en el papel hacia la derecha) en una región donde hay un campo magnético $B = 10^{-2} \text{ T}$ constante perpendicular a la velocidad del electrón (que dibujaremos hacia dentro del papel).

- a) Calcular el módulo de la fuerza que actúa sobre el electrón indicando su dirección y sentido. Calcular el radio de la trayectoria descrita por el electrón.
- b) ¿Cuál es la variación de potencial que habrá experimentado ese electrón antes de entrar en dicha región para pasar del reposo a la velocidad $v = 10^3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?

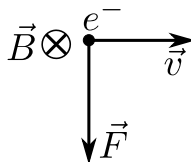
Datos: $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Solución

- a) Para calcular el módulo de la fuerza que actuará sobre el electrón deberemos aplicar ecuación de la fuerza de Lorentz (6.1), teniendo en cuenta que el enunciado nos dice que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares:

$$|\vec{F}| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ N}$$

Para dibujar la fuerza $\vec{F}$ simplemente deberemos aplicar la regla de la mano derecha, y tener en cuenta que la carga del electrón es negativa, con lo que obtenemos el dibujo que se presenta a continuación:



Este dibujo es válido únicamente para el instante inicial en el que el electrón entra en la región donde hay campo magnético. Una vez que el electrón avance en esa región, debido a la fuerza que hemos

representado anteriormente, el electrón comenzará a describir una trayectoria circular y la fuerza $\vec{F}$ cambiará su dirección y sentido, apuntando siempre hacia el centro de la trayectoria circular.

Otra opción sería expresar los vectores en un sistema de referencia cartesiano. De este modo, podríamos considerar que en el instante inicial el electrón se mueve según la dirección positiva del eje x y por lo tanto el vector velocidad lo podemos describir como $\vec{v} = v\vec{i}$. Con esta asignación el campo magnético lo podemos escribir como $\vec{B} = -B\vec{k}$ y la ecuación (6.1) nos quedará:

$$\vec{F} = -1,6 \cdot 10^{-19} v B (\vec{i} \times -\vec{k}) = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} (\vec{i} \times -\vec{k})$$

$$\vec{F} = -1,6 \cdot 10^{-15} \vec{j} \text{ N}$$

- b) La única fuerza que actúa sobre el electrón es la fuerza generada por el campo eléctrico, que está relacionado con la diferencia de potencial que nos pregunta el problema. Como ya hemos comentado, el campo eléctrico es un campo conservativo y por lo tanto la ganancia de energía cinética se debe a una pérdida de energía potencial o, lo que es lo mismo, $\Delta E_c = -\Delta U$. Dado que nos dicen que el electrón parte del reposo y acaba teniendo una velocidad $v = 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, obtenemos:

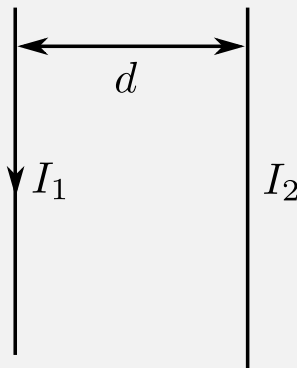
$$\Delta E_c = 4,55 \cdot 10^{-19} = -q\Delta V = 1,6 \cdot 10^{-19} \Delta V$$

$$\Delta V = 2,84 \text{ V}$$

La diferencia de potencial positiva confirma que el electrón se dirige de forma espontánea a una región con mayor potencial eléctrico. Al ser la carga negativa, esto se corresponde con zonas de menor energía potencial.

7. Disponemos de dos cables rectilíneos infinitos paralelos separados una distancia $d = 4 \text{ cm}$, dispuestos tal y como se muestra en la figura. Se sabe que la corriente I_1 vale 1 A , y que en el punto medio entre ambos conductores el campo es $B = 1 \text{ } \mu\text{T}$ dirigido hacia dentro del papel. Determine:

- El sentido y el valor de la corriente I_2 .
- ¿En qué punto del espacio se anula el campo magnético?
- ¿Qué fuerza por unidad de longitud ejerce un conductor sobre el otro? ¿Se atraen o se repelen?

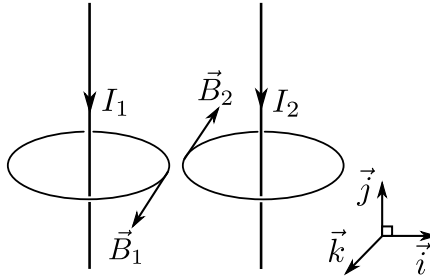


Solución

- a) Lo primero que debemos averiguar es el campo magnético generado por la corriente I_1 ($\vec{B}_1$), para lo cual deberemos hacer uso de la ecuación (5.8) para calcular el módulo de dicho campo magnético y tener en cuenta la regla de la mano derecha para determinar su sentido.

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot 0,02} = \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 0,02} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

y con sentido apuntando hacia fuera del papel.



Nos dice el enunciado que el campo total es $1 \mu\text{T}$ dirigido hacia dentro del papel, por lo tanto el campo $\vec{B}_2$ deberá ser capaz de anular el campo $\vec{B}_1$ y además generar $1 \mu\text{T}$ extra hacia dentro del papel para que el campo total sea el que nos dice el enunciado (tomamos el eje z positivo hacia fuera del papel como se muestra en la figura). De este modo,

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -1 \cdot 10^{-6} \vec{k}$$

Proyectamos y obtenemos:

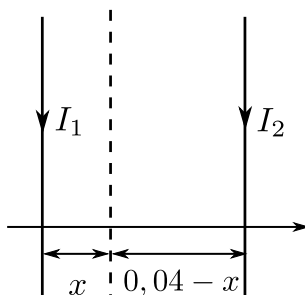
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot 0,02} = B_1 + 1 \cdot 10^{-6} = 1 \cdot 10^{-5} + 1 \cdot 10^{-6} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos $I_2 = 1,1 \text{ A}$ y su sentido será el mismo que el de I_1 de acuerdo con la regla de la mano derecha.

- b) Aunque se pregunta por el punto en el que se anula el campo magnético, en realidad se anulará en toda la línea de puntos paralela a los hilos conductores que esté a una determinada distancia de ellos. Basándonos en la regla de la mano derecha, podemos deducir que esta línea deberá estar en la región que hay entre ambos conductores, pues es la única región en la que los campos generados por ambos hilos tienen sentidos opuestos.

Una vez que sabemos la región en la que debemos buscar el punto, únicamente deberemos exigir que el módulo de ambos campos sea el mismo. Si denominamos x a la distancia entre la línea que buscamos y el conductor 1, la condición anterior queda expresada como:

$$|\vec{B}_1| = |\vec{B}_2| \rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0,04 - x)} \rightarrow x = 0,019 \text{ m}$$



- c) Para calcular la fuerza por unidad de longitud que un conductor realiza sobre el otro deberemos aplicar la ecuación $\vec{F}_1 = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2$ donde calculamos el campo B_2 en el lugar en el que se encuentra la corriente I_1 :

$$\frac{F_1}{l} = I_1 \cdot B_2 \rightarrow \frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi 0,04} = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Para determinar el sentido de la fuerza podemos fijarnos en la fuerza que el conductor 1 realiza sobre el 2. Aplicando la regla de la mano derecha, el conductor 1 genera un campo magnético en la región del espacio donde se encuentra el conductor 2 que apunta hacia fuera del papel. Si ahora multiplicamos vectorialmente este campo magnético por la corriente I_2 que apunta hacia abajo, obtenemos que la fuerza obtenida irá dirigida hacia la derecha, es decir ambos conductores se atraen.

Otra opción consiste en aplicar directamente el producto vectorial usando el sistema de referencia definido en la pregunta a). Tenemos $\vec{B}_2 = -B_2 \vec{k}$ y $I_1 \vec{l} = -l I_1 \vec{j}$. Se deduce del producto vectorial: $\vec{F}_1 = l I_1 \cdot B_2 (-\vec{j} \times -\vec{k}) = l I_1 B_2 \vec{i}$

8. Un protón (carga $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ y masa $m = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de $|\Delta V| = 1000 \text{ V}$. Después entra en una región donde hay un campo magnético de $B = 0,9 \text{ T}$ perpendicular a su velocidad. Calcular la velocidad del protón en esta región y el radio de su trayectoria circular.

Solución

Para calcular la velocidad del protón deberemos aplicar el principio de conservación de la energía.

$$E_{m0} = E_{mf} \rightarrow q_e V_0 = \frac{1}{2} m v_f^2 + q_e V_f \rightarrow q_e |\Delta V| = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 q |\Delta V|}{m}} = 433,86 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Observe el lector que en el enunciado se dice diferencia de potencial $|\Delta V| = 1000 \text{ V}$, ya que en este caso la diferencia de potencial en realidad es $\Delta V = -1000 \text{ V}$, pues para que una partícula de carga positiva se acelere la diferencia de potencial tiene que ser negativa (la carga positiva se mueve espontáneamente hacia las regiones de potencial bajo ya que su energía potencial es menor).

Para calcular el radio de la trayectoria aplicaremos la ecuación (6.4)

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 433,86 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,9} = 5,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

9. Una partícula de carga $q = 10 \mu\text{C}$ y masa $m = 1 \cdot 10^{-9} \text{ kg}$ se acelera en un campo eléctrico hasta obtener la velocidad $\vec{v} = 100\vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La partícula entra a continuación en una región donde existe un campo magnético $\vec{B} = 0,1\vec{j} \text{ T}$.

- Calcular el radio de la trayectoria.
- ¿En qué plano se sitúa la trayectoria?
- ¿Cuál es el periodo del movimiento?

Solución

- a) Para obtener el radio de la trayectoria debemos sustituir los valores numéricos que nos proporciona el enunciado en la ecuación del radio de la trayectoria de la partícula

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 100}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1} = 0,1 \text{ m}$$

- b) Recordemos que la fuerza que actúa sobre una partícula puntual cuando se mueve en una región del espacio en la que hay un campo magnético viene dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Por lo tanto, como la fuerza es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad, la partícula se situará en el plano xz .

- c) Se aplica la ecuación que relaciona el período con los parámetros del problema:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,1} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

10. Por un solenoide largo de 1000 espiras y de longitud 10 cm circula una corriente continua de 5 A.

- a) Calcular el campo magnético en el interior del solenoide.
- b) ¿Cuál sería el módulo de la fuerza sobre una carga inmóvil en su interior?

Solución

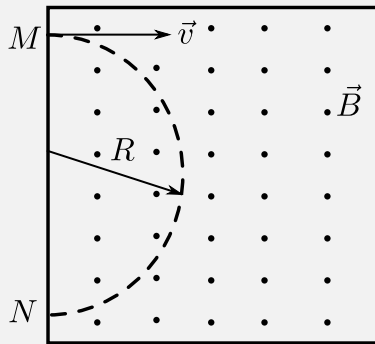
- a) Para calcular el campo magnético en el interior del solenoide aplicaremos la ecuación (5.6), para lo cual lo primero que debemos calcular es la densidad de espiras n . Con los datos del problema $n = N/l = 1000/0,1 = 10^4 \text{ espiras} \cdot \text{m}^{-1}$.

$$B = \mu_0 n I = 4\pi 10^{-7} \cdot 10^4 \cdot 5 = 0,063 \text{ T}$$

- b) La fuerza resultante sobre una partícula cargada viene dada por la ecuación (6.1), pero en este caso nos dicen que la partícula está en reposo, es decir, $v = 0$, por lo tanto la fuerza es nula.

11. Una partícula cargada de masa m , penetra por el punto M perpendicularmente en un campo magnético uniforme B (que sale del papel) y tras describir media circunferencia de radio R sale por el punto N , ver figura. La partícula tarda t segundos en ir de M a N . Justifique si son ciertas o no las siguientes afirmaciones:

- El valor absoluto de la carga de la partícula es $q = m\pi/Bt$.
- La carga de la partícula es negativa.
- La energía cinética de la partícula en N es mayor que en M .



Solución

- a) El valor absoluto de la carga de la partícula es $q = m\pi/Bt$. **VERDADERO.**

Para demostrarlo simplemente debemos combinar las ecuaciones del radio $R = mv/qB$ y periodo $T = 2\pi m/(qB)$, teniendo en cuenta que en este caso la partícula no describe una circunferencia completa sino media, por lo que el tiempo t que nos da el enunciado no es el periodo, sino el semiperiodo.

- b) La carga de la partícula es negativa. **FALSO.**

Si la partícula fuese negativa la fuerza magnética $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ resultaría en sentido opuesto (apuntaría hacia arriba) y por lo tanto la trayectoria llevaría sentido antihorario.

- c) La energía cinética de la partícula en N es mayor que en M . **FALSO**

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula que se desplaza viene dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Por lo tanto, es perpendicular a la

velocidad de la propia partícula lo que nos lleva a que al aplicar la definición de trabajo ($dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$) obtenemos que el trabajo realizado es nulo (producto escalar de dos vectores perpendiculares).

12. Se lanza un electrón con una velocidad $\vec{v} = 10^4 \vec{i} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ en una región donde existe un campo magnético $\vec{B} = -10^{-2} \vec{k} \text{ T}$ constante.

- Calcular el módulo de la fuerza que actúa sobre el electrón indicando su dirección y sentido.
- Calcular el radio de la trayectoria descrita por el electrón.
- Calcular la energía cinética del electrón a su entrada en el campo.
- ¿Cuál es la variación de potencial que habrá experimentado ese electrón antes de entrar en dicha región para pasar del reposo a una velocidad $v = 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$?

Datos: $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Solución

- a) Para calcular la fuerza magnética que actúa sobre el electrón simplemente tenemos que calcular la fuerza de Lorentz, teniendo en cuenta que el vector velocidad y el campo magnético son perpendiculares.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow |\vec{F}| = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}$$

En el instante en el que entra en la región donde está definido el campo magnético, la dirección de la fuerza será vertical y el sentido vendrá determinado por el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B} = v\vec{i} \times (-B\vec{k})$. En este caso el producto vectorial lleva sentido hacia arriba, pero como la partícula es un electrón y tiene carga negativa la fuerza total llevará sentido hacia abajo. En instantes posteriores, la fuerza cambiará de orientación al ser un movimiento circular uniforme.

- b) Para calcular el radio debemos sustituir los datos numéricos en la ecuación del radio de la trayectoria:

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 5,68 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

c) La energía cinética del electrón vendrá dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}9,1 \cdot 10^{-31} (1 \cdot 10^7)^2 = 4,55 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

d) Para esta última pregunta deberemos tener en cuenta el principio de conservación de la energía. La energía mecánica del electrón tiene que permanecer constante en la región en la que se le aplica la diferencia de potencial, de este modo:

$$E_{m0} = E_{mf} \rightarrow E_{c0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + q_e V_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + q_e V_f$$

Como el enunciado nos dice que el electrón parte del reposo, $v_0 = 0$.

$$q_e V_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + q_e V_f$$

$$q_e (V_0 - V_f) = -q_e (V_f - V_0) = -q_e \Delta V = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Si sustituimos por sus valores numéricos

$$\Delta V = 284,37 \text{ V}$$

13. Un haz de electrones pasa, sin ser desviado de su trayectoria rectilínea, a través de una región del espacio en la que hay un campo eléctrico y otro magnético, mutuamente perpendiculares. El campo eléctrico está producido por dos placas metálicas paralelas situadas a ambos lados de la trayectoria, separadas 1 cm y conectadas a una diferencia de potencial de 80 voltios. El campo magnético tiene una intensidad $B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$. A la salida de las placas, el campo magnético sigue actuando perpendicularmente a la trayectoria del haz, y observamos que esta se curva convirtiéndose en una trayectoria circular de 1,14 cm de radio.

- a) Hallar la razón carga/masa de los electrones.
- b) Calcular el tiempo que cada electrón invierte en recorrer una circunferencia completa.

Solución

- a) Lo primero que nos dice el enunciado es que el haz de electrones pasa sin ser desviado por una región en la que hay un campo eléctrico y otro magnético. Esto nos indica que la suma de las fuerzas que actúan sobre los electrones debe ser nula, $\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$. Por lo tanto ambas fuerzas deberán tener igual módulo y sentidos opuestos. Igualando los módulos de ambas fuerzas obtenemos una relación entre el módulo del campo eléctrico y el módulo del campo magnético.

$$|\vec{F}_e| = |q\vec{E}| = |-\vec{F}_m| = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow E = v B$$

Para generar el campo eléctrico entre las placas se nos dice que la diferencia de potencial entre dichas placas es 80 voltios y que tienen una separación de 1 cm, asumiendo el campo uniforme tenemos:

$$\Delta V = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow E = \frac{\Delta V}{d} = 8000 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$$

Finalmente, dado que a la salida de las placas el haz de electrones describe una trayectoria circular de radio 1,14 cm, si hacemos uso de la ecuación del radio de la trayectoria $R = mv/qB$, podemos deducir la relación carga/masa que se nos pide teniendo en cuenta las relaciones obtenidas anteriormente.

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mE}{|q|B^2} = \frac{m\Delta V}{|q|B^2d} \rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{\Delta V}{R B^2d} = 1,75 \cdot 10^{13} \text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}$$

- b) Para calcular el periodo de los electrones debemos aplicar la ecuación que relaciona el periodo con las magnitudes del problema:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi R B d}{\Delta V} = 1,79 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

14. En una cavidad de sección rectangular generamos un campo magnético y un campo eléctrico perpendiculares entre sí. A la entrada de la cavidad incide un flujo de iones de masa m y carga q positiva con velocidades v_i distintas para cada ión.

- Escribir la fuerza que se ejerce sobre cada ión cuando entra en la cavidad.
- Determinar la velocidad de los iones que pasarán a través de la cavidad sin desviarse del eje.

Solución

- a) En este caso cuando un ión entre en la cavidad experimentará dos fuerzas, la fuerza producida por el campo eléctrico $\vec{F}_e = q\vec{E}$ y la producida por el campo magnético $\vec{F}_m = q\vec{v}_i \times \vec{B}$, por lo tanto la fuerza total que se ejerce sobre cada ión será:

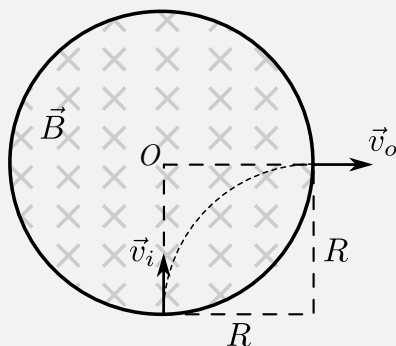
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v}_i \times \vec{B}$$

- b) Para que un ión no se desvíe la fuerza total debe ser nula, o lo que es lo mismo la $\vec{F}_e$ y la $\vec{F}_m$ deben tener igual módulo y misma dirección, pero sentidos opuestos. El enunciado nos dice que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares, por lo que deberemos suponer que llevan el sentido necesario para que las fuerzas que generan tengan sentido opuesto (si no este problema no tendría sentido). Una vez que se cumple la condición anterior solo debemos exigir que ambas fuerzas tengan el mismo módulo:

$$|\vec{F}_e| = |\vec{F}_m| \rightarrow q|\vec{E}| = q|\vec{v}_i \times \vec{B}| \rightarrow v_i = \frac{E}{B}$$

15. Se dispone de un solenoide largo con densidad de espiras $n = 2000$ espiras por metro y radio $R = 1$ m. Desde la sección inferior del solenoide disparamos partículas con carga negativa $q = -1 \mu\text{C}$ hacia el eje central del solenoide siguiendo el radio de la sección transversal. Si las partículas entran en la sección con una energía $E_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ J y suponiendo que el campo es uniforme en todo el interior del solenoide, calcule:

- La velocidad de entrada para partículas de masa $m_p = 1 \cdot 10^{-10}$ kg.
- La corriente del solenoide si deseamos que las partículas salgan con una dirección perpendicular a la dirección de entrada tal y como se muestra en la figura.



Solución

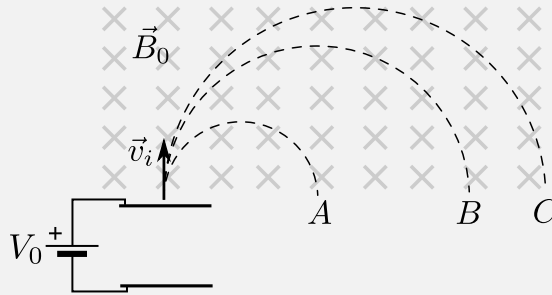
- Para calcular la velocidad de entrada de las partículas, simplemente debemos aplicar la definición de energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-10}}} = 141,42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Para que las partículas salgan tal y como se muestra en la figura, deberán describir una trayectoria circular de radio $R = 1$ m. Por lo tanto, debemos aplicar la ecuación del radio $R = mv/qB$, donde el campo magnético de un solenoide largo vendrá dado por la ecuación $B = \mu_0 nI$. El hecho de que la partícula sea negativa solo influye en la dirección de salida de la partícula, por lo tanto, utilizaremos el valor absoluto de la carga.

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv}{|q|\mu_0 nI} \rightarrow I = \frac{mv}{|q|\mu_0 nR} = 5,63 \text{ A}$$

16. Participamos en un juego en el que debemos disparar partículas cargadas en una zona y recuperarlas en otra. Disponemos de dos controles para alcanzar el objetivo: la tensión V_0 que nos permite acelerar las partículas y B_0 el valor del campo magnético que consideraremos uniforme en la zona de juego y perpendicular a la trayectoria en todo momento. Existen tres salidas posibles: A, B y C, y en cada nueva fase del juego se pide alcanzar una salida diferente. Las salidas se encuentran a 2, 10 y 20 cm de la puerta de entrada de las cargas eléctricas respectivamente.



El jugador dispone de un panel con un número finito de valores de V_0 y B_0 , se debe buscar una combinación adecuada de ambos para alcanzar el objetivo. Se dan los valores posibles en el cuadro siguiente, siendo posibles combinaciones de cualquiera de los valores:

V_0	64 V	100 V	400 V
B_0	1 mT	10 mT	50 mT

Datos: $m/q = \frac{1}{2} \cdot 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{C}^{-1}$

- Determinar la velocidad inicial con la que entra la partícula en la zona del campo en función de V_0 .
- ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria de la partícula en función de V_0 y B_0 ?
- ¿Qué valores de V_0 y B_0 permiten alcanzar las salidas A, B y C?

Solución

- a) En este apartado deberemos tener en cuenta que la fuerza que actúa es la fuerza eléctrica, la cual es conservativa; por lo tanto, las partículas perderán energía potencial eléctrica y ganarán energía cinética, de modo que su energía mecánica total permanecerá constante.

$$E_m = \frac{1}{2}mv_i^2 + qV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_f$$

Si consideramos que $v_i = 0$ y que $V_i = 0 \rightarrow V_f = V_0$.

$$v_f = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

- b) Para calcular el radio de curvatura en función de V_0 y B_0 , debemos aplicar la ecuación del radio de la trayectoria de una carga en un campo magnético teniendo en cuenta la expresión de la velocidad obtenida en el apartado anterior.

$$R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{m\sqrt{\frac{2qV_0}{m}}}{|q|B} = \sqrt{\frac{2mV_0}{q}} \frac{1}{B}$$

- c) Finalmente, para ver qué combinación (V_0 , B_0) se corresponde con cada salida debemos ir sustituyendo por los valores numéricos que nos da el enunciado. De este modo obtenemos (unidades en m):

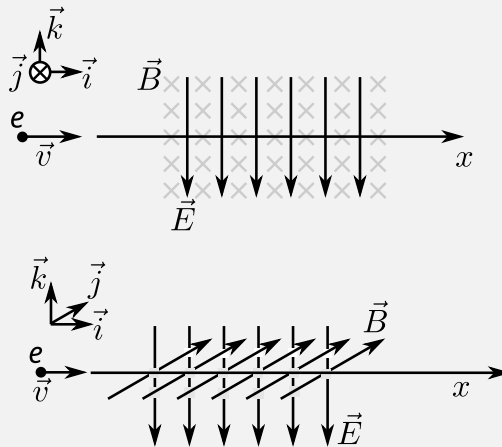
$B_0 \backslash V_0$	64 V	100 V	400 V
1 mT	0,08	0,1	0,2
10 mT	0,008	0,01	0,02
50 mT	0,0016	0,002	0,004

Podemos ahora seleccionar en la tabla los valores de V_0 y B_0 para alcanzar las salidas A , B y C .

17. Un cañón de electrones dispara electrones en la dirección $\vec{i}$ con una energía cinética E_c . A continuación entran en una zona donde coexisten un campo eléctrico $\vec{E} = -E_0\vec{k}$ y un campo magnético $\vec{B} = B_0\vec{j}$ (siendo E_0 y B_0 cantidades positivas expresadas en el S.I.).

- Calcular el vector fuerza que actúa sobre los electrones cuando entran en la zona donde coexisten ambos campos.
- ¿Qué energía deben tener los electrones para pasar por la zona con campos sin desviarse del eje x ?
- Los electrones que no se desvían impactan sobre átomos de hidrógeno cuya energía de ionización es 25 eV. Calcular la relación entre E_0 y B_0 para que los electrones puedan ionizar el hidrógeno.

Datos : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.



Solución

- Cuando los electrones entren en la zona en la que existen ambos campos la fuerza que experimentarán será la suma de la fuerza generada por el campo eléctrico $\vec{F}_e$ y la generada por el campo magnético, $\vec{F}_m$. Por lo tanto:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = -qE_0\vec{k} + qv\vec{i} \times B_0\vec{j} \text{ N}$$

donde v es la velocidad de los electrones y que podemos deducir del valor de su energía cinética.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Si combinamos ambas ecuaciones obtenemos la fuerza total que nos piden

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -qE_0\vec{k} + q\sqrt{\frac{2E_c}{m}}\vec{i} \times B_0\vec{j} = -qE_0\vec{k} + q\sqrt{\frac{2E_c}{m}}B_0\vec{k} = \\ &= \left(-qE_0 + q\sqrt{\frac{2E_c}{m}}B_0\right)\vec{k} \text{ N}\end{aligned}$$

- b) Se nos pide la energía cinética que tienen que llevar los electrones para que no se desvíen, lo que implica $\vec{F} = \vec{0}$. Por lo tanto deberemos despejar la energía cinética de la ecuación anterior aplicando que la fuerza total es nula.

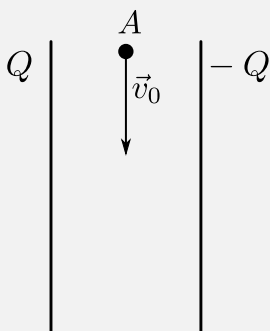
$$0 = qE_0(-\vec{k}) + q\sqrt{\frac{2E_c}{m}}B_0\vec{k} \rightarrow E_c = \left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2 \frac{m}{2} \text{ J}$$

- c) Para poder ionizar los átomos de hidrógeno la energía cinética de los electrones deberá ser 25 eV. Teniendo en cuenta que 1 eV = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$$\begin{aligned}E_c &= \left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2 \frac{m}{2} = 25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 4 \cdot 10^{-18} \text{ J} \\ \rightarrow \frac{E_0}{B_0} &= 2,96 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}\end{aligned}$$

18. Un condensador plano formado por dos placas paralelas separadas 4 cm y situado en el vacío, tiene una capacidad de 200 pF. Se carga este condensador mediante una fuente de tensión 200 V. Calcule:

- La energía almacenada en el condensador cuando está completamente cargado.
- El valor del campo eléctrico en el interior del condensador.
- Si un protón ($m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg, $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) penetra por el punto A en el interior del condensador con una velocidad $v_0 = 2 \cdot 10^5$ m·s⁻¹ paralela a las placas como muestra la figura, determine el campo magnético (módulo, dirección y sentido) necesario para que el protón realice un movimiento rectilíneo uniforme.



Solución

- El condensador se carga con una tensión de 200 V, teniendo la capacidad podemos calcular la energía acumulada en su interior:

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 10^{-12} \cdot 200^2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

- Las placas están separadas 4 cm con una diferencia de potencial de 200 V. Siendo el condensador plano podemos aproximar el campo entre placas por:

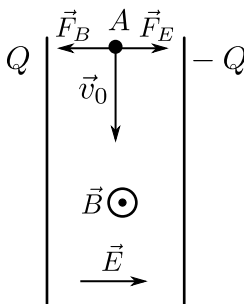
$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{200}{4 \cdot 10^{-2}} = 5000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Al entrar el protón en la zona entre los planos del condensador, se

ve sometido a una fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = q_p \vec{E}$$

Si queremos anular esta fuerza para que el protón siga una trayectoria rectilínea podemos añadir un campo magnético perpendicular al campo eléctrico. Debemos determinar su módulo, dirección y sentido.



La fuerza del campo magnético se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\vec{F}_B = q_p \vec{v}_0 \times \vec{B}$$

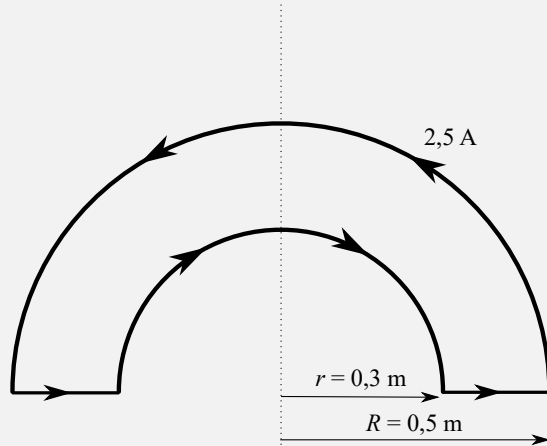
El sentido requerido para el campo magnético para obtener una fuerza contraria al campo eléctrico es perpendicular al campo eléctrico apuntando hacia fuera del papel (ver figura). Para hallar el módulo podemos igualar el módulo de las dos fuerzas:

$$q_p \cdot v_0 \cdot B = q_p \cdot E$$

Obtenemos:

$$B = \frac{E}{v_0} = \frac{5000}{2 \cdot 10^5} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

19. Un alambre por el que circula una corriente de 2,5 amperios se dobla formando una espira tal y como se indica en la figura. Calcule su momento magnético.



Solución

Para calcular el momento magnético de esta espira aplicaremos la ecuación (6.7)

$$\vec{\mu} = IS\vec{u}_n$$

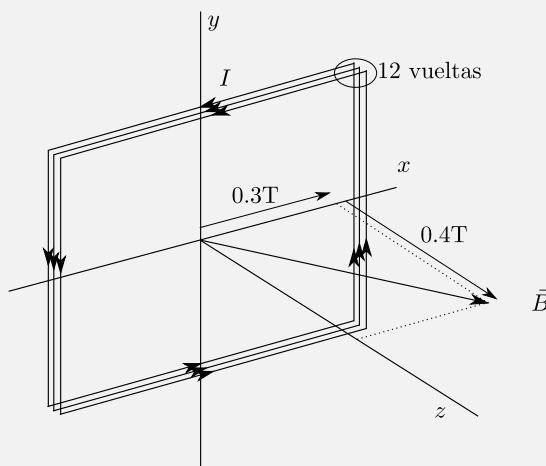
Calculemos primero su módulo

$$\mu = IS = 2,5 \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2) = 2,5 \frac{1}{2}\pi(0,5^2 - 0,3^2) = 0,629 \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

Para obtener el sentido del vector aplicaremos la regla de la mano derecha o del sacacorchos. En este caso el vector momento magnético apuntaría hacia nosotros.

20. Por una espira cuadrada de 40 cm de lado y 12 vueltas circula una corriente de 3 amperios tal y como se indica en la figura. La espira está situada sobre el plano xy . Si en la zona de la espira existe un campo magnético $\vec{B} = 0,3\vec{i} + 0,4\vec{k}$ T, calcule:

- El momento magnético de la espira.
- El momento o torque que experimentará la espira.
- La energía potencial de la espira.



Solución

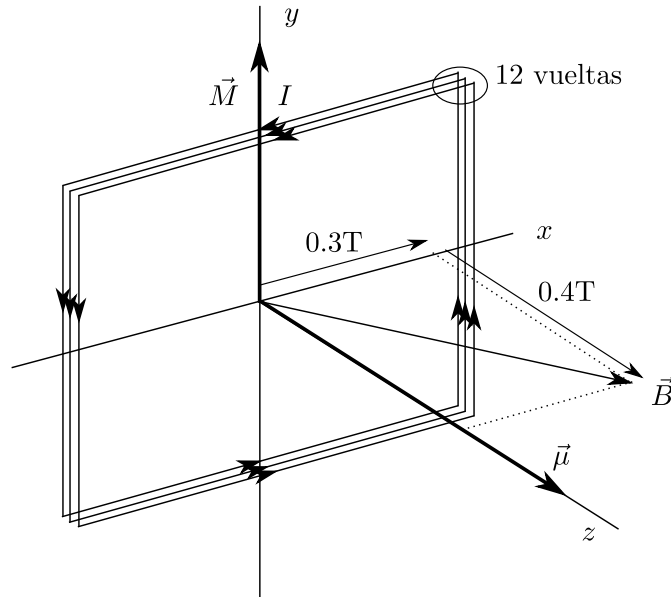
- Para calcular el momento magnético de la espira deberemos aplicar la fórmula (6.7), teniendo en cuenta que al aplicar la regla de la mano derecha al sentido de la corriente en la espira, el vector unitario normal a la superficie de la espira será el vector $\vec{k}$

$$\vec{\mu} = NIS\vec{u}_n = 12 \cdot 3 \cdot 0,4 \cdot 0,4\vec{k} = 5,76\vec{k} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

- Una vez calculado el momento magnético obtendremos el momento o torque que actúa sobre la espira aplicando la ecuación (6.6):

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = NIS\vec{S} \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B} = 1,728\vec{j} \text{ N}\cdot\text{m}$$

Las magnitudes vectoriales que se han obtenido en ambos apartados se muestran en la siguiente figura:



- c) Para calcular la energía potencial acumulada en la espira aplicaremos la ecuación (6.8)

$$U = -\mu B \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -2,304 \text{ J}$$

Analicemos un poco los resultados que hemos obtenido en este ejercicio. Lo primero que observamos es que el momento, ($\vec{M}$), que genera el campo magnético sobre la espira lleva sentido $+\vec{j}$, esto nos indica que si aplicásemos las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido la espira comenzaría a rotar con una aceleración angular $\alpha \vec{j}$ haciendo que se alineen los vectores $\vec{B}$ y $\vec{\mu}$. Esta aceleración no es constante e irá modificando su valor en función del ángulo que forman ambos vectores. Una vez que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{\mu}$ están alineados la energía potencial de la espira será:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -2,88 \text{ J}$$

que es el valor mínimo que puede tomar.

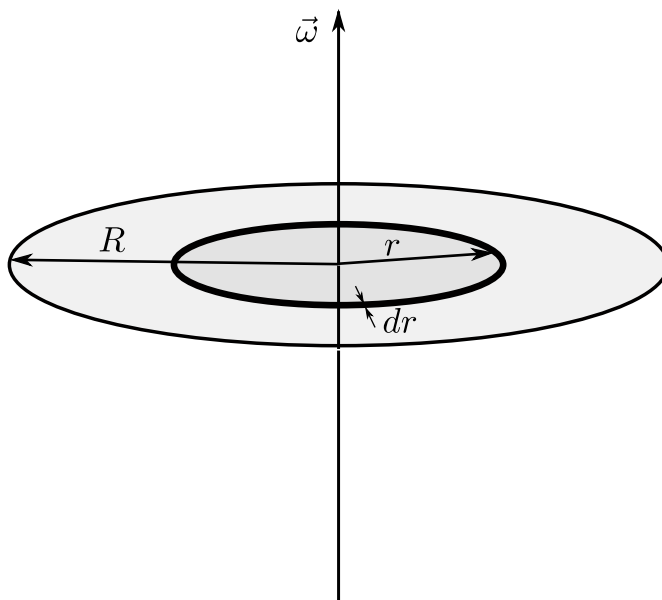
Esto nos indica que de forma espontánea la espira tiende a orientarse en la dirección del campo magnético con el objetivo de minimizar su energía potencial. En ese momento el momento o torque que actúa sobre la espira es nulo $\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = 0$.

21. Un disco delgado, no conductor, de masa m y radio R tiene una densidad superficial de carga constante de valor σ . El disco rota con una velocidad angular $\vec{\omega}$ respecto del eje transversal que pasa por su centro. Calcule:

- El campo magnético en el centro del disco.
- El momento magnético de este disco.

Solución

- Para calcular las magnitudes que nos piden lo primero que vamos a hacer es un dibujo esquemático en el que consideraremos un anillo de radio r y anchura dr .



Este elemento diferencial de superficie que hemos definido contiene una carga dq ,

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

Esta carga gira con velocidad angular ω y es equivalente a una espira de radio r por la que circula una corriente dI ,

$$dI = \frac{\sigma 2\pi r dr}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \omega \sigma r dr$$

Basándonos en la ecuación (5.3) podemos deducir el campo generado por la corriente que circula por esta espira que hemos definido:

$$dB = \mu_0 \frac{\omega \sigma r dr}{2r} = \mu_0 \frac{\omega \sigma dr}{2}$$

Integrando esta expresión a todo el disco obtendremos la ecuación que se nos pide

$$B = \int_0^R dB = \int_0^R \mu_0 \frac{\omega \sigma dr}{2} = \mu_0 \frac{\omega \sigma R}{2}$$

El sentido del campo magnético lo podemos deducir aplicando la regla de la mano derecha y puesto que el disco rota con una velocidad ω tal y como nos indica el dibujo, el campo magnético llevará su mismo sentido.

- b) Para calcular el momento magnético del disco comenzaremos calculando el momento de la espira de radio r y grosor dr que hemos señalado en el dibujo. Para ello haremos uso de (6.7), siendo el vector unitario el mismo que el de la velocidad de rotación $\vec{\omega}$

$$d\vec{\mu} = dIS\vec{u}_\omega = dI\pi r^2\vec{u}_\omega = \omega \sigma r dr \pi r^2 \vec{u}_\omega = \omega \sigma r^3 dr \pi \vec{u}_\omega$$

Ahora ya podemos integrar a todo el disco y obtener el momento magnético que nos piden:

$$\vec{\mu} = \int_0^R d\vec{\mu} = \int_0^R \omega \sigma r^3 dr \pi \vec{u}_\omega = \omega \sigma \pi \frac{R^4}{4} \vec{u}_\omega$$

7 INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

7.1 Ecuaciones relevantes.

■ Ley de Faraday.

Cuando el flujo magnético, ϕ_m , a través de la superficie delimitada por un circuito cerrado varía, se induce una fuerza electromotriz (f.e.m.= ε) en el circuito que está relacionada con la tasa de variación del flujo. El valor de esta fuerza electromotriz viene dada por la Ley de Faraday

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (7.1)$$

El signo – de la ecuación (7.1) viene determinado por la Ley de Lenz, según esta ley, la corriente inducida en el circuito tiende a oponerse al cambio que la genera.

Por todo ello en muchos casos calcularemos el valor absoluto de la fuerza electromotriz inducida para posteriormente aplicar la Ley de Lenz y deducir el sentido de la corriente inducida. Puesto que la fuerza electromotriz es el trabajo por unidad de carga, habrá fuerzas que se ejercerán sobre las cargas móviles que realizan trabajo sobre ellas. Como las fuerzas magnéticas no pueden realizar trabajo, no podemos atribuir la fuerza electromotriz a estas fuerzas y por lo tanto serán las fuerzas eléctricas las responsables de ella. Esto nos lleva a señalar que estas fuerzas eléctricas estarán asociadas a un campo eléctrico **no conservativo**.

■ Inductancia.

La autoinducción L , es una magnitud que permite relacionar el flujo magnético ϕ_m que atraviesa la superficie delimitada por un conductor con la intensidad que circula él.

$$\phi_m = LI \quad (7.2)$$

La unidad en el Sistema Internacional de la inductancia es el Henrio (H), que se define como $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1}$. La unidad del flujo magnético ϕ_m es el *Weber* Wb.

Haciendo uso de la ecuación (7.2) y considerando que el coeficiente de autoinducción es constante en el tiempo, podemos reescribir la Ley de Faraday como:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.3)$$

Si consideramos un solenoide de longitud l y con N espiras, podemos deducir que el coeficiente de autoinducción del solenoide viene dado por la expresión:

$$L = \mu_0 n^2 A l \quad (7.4)$$

donde n es la densidad de espiras por unidad de longitud $n = N/l$, A es el área de cada una de las espiras que forman el solenoide.

Cuando dos circuitos o más están próximos el uno al otro, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no solo de la corriente en el propio circuito sino que depende también de la corriente que circula por los otros circuitos. De este modo, supongamos que tenemos dos circuitos próximos, 1 y 2 por los cuales circulan las corrientes I_1 e I_2 . En la superficie delimitada por el circuito 2 existirá un campo magnético que será el resultado de la superposición de los campos generados respectivamente por las corrientes I_1 e I_2 . El flujo a través de la superficie del circuito 2 debido a la corriente I_1 la podemos escribir como:

$$\phi_{m12} = M_{12} I_1 \quad (7.5)$$

De igual modo el flujo magnético a través de la superficie del circuito 1 debido a la corriente I_2 se puede escribir como:

$$\phi_{m21} = M_{21} I_2 \quad (7.6)$$

a los coeficientes M_{12} y M_{21} se les denomina coeficiente de inducción mutua y se puede demostrar que ambos coeficientes tienen el mismo valor $M_{12} = M_{21} = M$.

Un ejemplo de cálculo del coeficiente de inducción mutua es el de dos solenoides de radios r_1 y r_2 respectivamente, con $r_1 < r_2$ y densidades de espiras n_1 y n_2 y ambos de longitud l . Para este caso, obtenemos:

$$M = \mu_0 n_1 n_2 l \pi r_1^2 \quad (7.7)$$

■ Energía magnética almacenada en un solenoide.

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (7.8)$$

■ Densidad de energía magnética por unidad de volumen.

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (7.9)$$

7.2 Ejercicios

1. El flujo magnético a través de una bobina viene dado por la expresión:

$$\phi_m(t) = \frac{1}{\pi} N \cos(100\pi t),$$

donde todas las unidades vienen expresadas en el Sistema Internacional.

Si la bobina tiene $N = 100$ vueltas, calcule el valor de la fuerza electromotriz inducida en la bobina en el instante de tiempo $t = 1/200$ s.

Solución

Para resolver este problema debemos aplicar la ley de Faraday y particularizar para el tiempo que se nos dice.

$$\varepsilon(t) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\pi} N \cos(100\pi t) \right) = \frac{1}{\pi} N 100\pi \sin(100\pi t)$$

$$\varepsilon(0,005) = 100^2 \sin(\pi/2) = 100^2 \text{ V}$$

2. Una bobina tiene una longitud de 15 cm y está compuesta por 400 espiras circulares de 2 cm de radio. Por la bobina pasa una corriente continua $I = 0,05$ A. Calcule:

- El flujo magnético a través de la bobina.
- La fuerza electromotriz inducida en la bobina si la corriente se extingue uniformemente de forma lineal en 0,05 s.

Solución

- a) Para calcular el flujo lo primero que debemos hacer es calcular el campo magnético generado por la bobina para lo cual consideraremos la aproximación de solenoide infinito:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 400/0,15 0,05 = 400\mu_0/3 \text{ T}$$

Una vez conocido el campo magnético en el interior de la bobina obtenemos el flujo total multiplicando por la sección total siendo la

sección de una espira por el número total de espiras:

$$S = 400\pi r^2 = 400\pi 0,02^2 = 0,16\pi \text{ m}^2$$

Finalmente, teniendo en cuenta que el campo magnético y el vector superficie de la bobina son paralelos, obtenemos:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S = 400\mu_0/3 \cdot 0,16\pi = 8,42 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

- b) Para la segunda cuestión, el concepto clave es el hecho de que la corriente se extinga uniformemente. Esto nos permite calcular la variación temporal del flujo magnético como un cociente entre la variación de flujo magnético y el tiempo total que tarda en extinguirse la corriente eléctrica.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{8,42 \cdot 10^{-5}}{0,05} = 1,68 \text{ mV}$$

3. Una espira circular de 16 cm de diámetro y $0,05 \Omega$ de resistencia está situada en una zona donde hay un campo magnético uniforme $\vec{B}$, perpendicular al plano de la espira. Inicialmente el campo magnético tiene un valor de $0,1 \text{ T}$ y disminuye uniformemente hasta anularse a razón de $0,2 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcule:

- a) la fuerza electromotriz inducida.
b) la intensidad de la corriente inducida en la espira.

Solución

- a) Para calcular la fuerza electromotriz inducida, en este caso no es necesario calcular el flujo a través de la espira, ya que el propio enunciado nos da la tasa de variación del campo magnético en función del tiempo y la superficie de la espira permanece constante, por lo tanto:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{dB}{dt} S \right| = 0,2 \pi r^2 = 4,02 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

- b) Una vez conocida la fuerza electromotriz inducida, deducir la intensidad es automático

$$I = \frac{2,01 \cdot 10^{-3}}{0,05} = 8,04 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

4. Una bobina de 500 espiras, de sección circular de 6 cm de radio, está colocada en un campo magnético uniforme. La dirección del campo coincide con el eje de la bobina y su valor varía según $B = 0,2 - 0,004t^2$, en unidades del S.I. Calcule:
- El flujo magnético que atraviesa la bobina y la fuerza electromotriz inducida en ella en función del tiempo.
 - La intensidad de la corriente inducida para $t = 5$ s si su resistencia es de 3Ω .

Solución

- a) Para calcular el flujo magnético debemos aplicar su definición, teniendo en cuenta que la superficie es el producto de las 500 espiras por el área de una de ellas.

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (0,2 - 0,004t^2)\pi r^2 500 = 1,8\pi(0,2 - 0,004t^2) \text{ Wb}$$

La fuerza electromotriz inducida la obtenemos aplicando la ecuación (7.1),

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{1,8\pi(0,2 - 0,004t^2)}{dt} \right| = 0,0144\pi t \text{ V}$$

- b) Para obtener la corriente inducida, simplemente debemos aplicar la ley de Ohm, particularizada para $t = 5$ s

$$|\varepsilon| = 0,0144\pi t = 0,0144\pi 5 = 0,072\pi = IR \rightarrow I = \frac{0,072\pi}{3} = 0,024\pi \text{ A}$$

5. Una espira de superficie S se mueve siguiendo un movimiento rectilíneo uniforme en un espacio donde existe un campo magnético uniforme y estático perpendicular al plano de la espira, $B = 1 \text{ T}$.

- ¿Cuánto vale la inducción electromagnética en este caso?
- Se para la espira y empieza a girar respecto de un eje perpendicular al campo con una velocidad angular ω . Calcule la inducción electromagnética en este caso.

Solución

- a) Al ser el campo uniforme, el flujo del campo magnético sobre la espira es constante. No hay variación de flujo y como consecuencia la tensión inducida es nula.
- b) Ahora la espira gira con velocidad angular constante sobre un eje perpendicular al campo magnético. El flujo del campo magnético sobre la espira se calcula como:

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos(\theta) \text{ Wb}$$

siendo $\theta = \omega t$ el ángulo que forma el vector normal al plano de la espira con el campo magnético. La tensión inducida se obtiene con la ley de Faraday:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = BS\omega \sin(\omega t) \text{ V}$$

6. Por un solenoide de 2000 vueltas, área 4 cm^2 y longitud 30 cm circula una corriente de 4 amperios . Calcule la energía acumulada en el solenoide.

Solución

Para calcular la energía que nos piden podemos proceder de dos formas distintas.

La primera de ellas aplicaremos directamente la fórmula (7.8) donde el valor de la autoinducción de un solenoide lo obtenemos a partir de (7.4) ($L = \mu_0 n^2 Al$). Sustituyendo ambas expresiones obtenemos:

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 Al I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{2000}{0,3} \right)^2 4 \cdot 10^{-4} 0,3 \cdot 4^2 = 53,6 \text{ mJ}$$

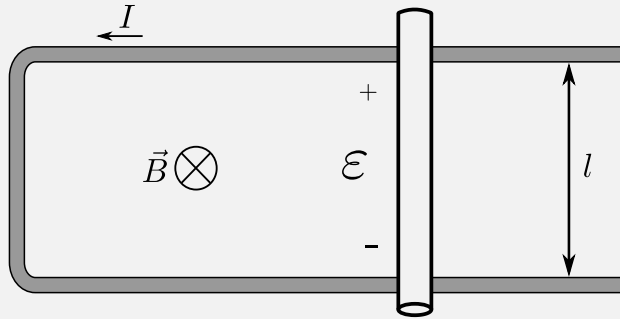
Otra forma sería aplicando la ecuación (7.9) donde el campo magnético sería el generado por el solenoide y cuya ecuación conocemos (5.6) ($B = \mu_0 nI$).

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0}$$

Si una vez conocida la densidad de energía multiplicamos por el volumen del solenoide $V = Al$, obtenemos la misma expresión que hemos obtenido mediante la primera forma que hemos propuesto

$$U_m = u_m V = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0} Al = 53,6 \text{ mJ}$$

7. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme de valor $0,5 \text{ T}$ que penetra perpendicularmente al plano del papel, tal y como se muestra en la figura. La resistencia de la varilla vale 2Ω y su longitud es $l = 20 \text{ cm}$. ¿Hacia dónde y con qué velocidad constante hay que desplazar la varilla, permaneciendo constante el valor del campo magnético, para producir una corriente de 1 A en sentido antihorario? Se puede despreciar la resistencia de los raíles.



Solución

Para resolver este problema, debemos estudiar cómo varía la sección de la espira en función del tiempo. Para ello consideraremos que en un instante inicial los lados del circuito eléctrico son x_0 y l respectivamente, con lo que el área total será $x_0 l$. Conforme se desplace la varilla hacia un lado u otro esta superficie vendrá dada por $l(x_0 \pm vt)$, donde el signo $+$ nos indica que la varilla se mueve hacia la derecha y el signo $-$ hacia la izquierda. De este modo, la ecuación de Faraday queda:

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d(B \cdot S)}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt}(Bl(x_0 - vt)) \right| = B l v$$

El enunciado nos dice que la corriente tiene que ser de 1 A y que la resistencia de la varilla es 2Ω , por lo tanto la fuerza electromotriz inducida tiene que ser de 2 V . Igualando este valor a la expresión anterior y sustituyendo por los valores numéricos correspondientes, obtenemos:

$$B l v = 2 \text{ V} \rightarrow 0,5 \cdot 0,2 \cdot v = 2 \rightarrow v = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

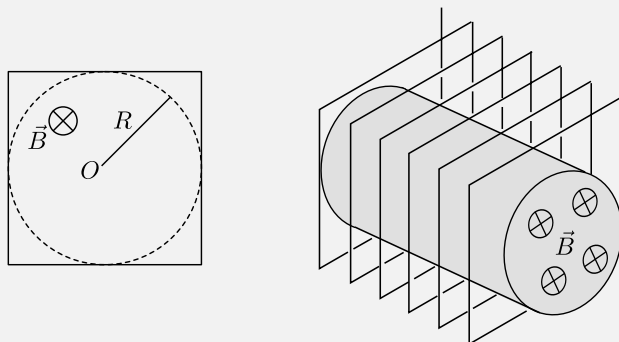
Ahora queremos averiguar hacia qué lado tiene que ir la varilla para generar una corriente en sentido antihorario. Aquí es útil calcular las fuer-

zas que se van a ejercer sobre las cargas situadas en la barra conductora. La fuerza magnética es:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza sobre los electrones tiene que ir en sentido opuesto a la corriente I . Aplicando la regla de la mano derecha, para que la fuerza $\vec{F}_B$ vaya hacia abajo, encontramos que el vector $q\vec{v}$ va hacia la izquierda. Dado que una carga q es negativa, el vector $\vec{v}$ va hacia la derecha.

8. Un campo magnético uniforme espacialmente tiene un módulo que aumenta linealmente con el tiempo $B(t) = kt$. El campo es perpendicular al plano del papel y entrante y se limita a una región cilíndrica cuya sección recta es la circunferencia de radio R de la figura. Se introduce en el campo una espira conductora cuadrada de resistencia $r \, \Omega$ tal y como se muestra en la figura. Calcule la corriente inducida en la espira e indicar su sentido.



Solución

Para calcular el flujo magnético a través de la espira cuadrada, únicamente debemos tener en cuenta la sección circular en la que el campo magnético está definido. De este modo el flujo magnético es:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = kt\pi R^2 \text{ Wb}$$

Aplicamos la ley de Faraday para calcular la fuerza electromotriz inducida

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt}(kt\pi R^2) \right| = k\pi R^2 \text{ V}$$

La corriente inducida vendrá dada por la ley de Ohm:

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{r} = \frac{k\pi R^2}{r} \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente inducida deberemos tener en cuenta la ley de Lenz, la cual nos dice que la corriente inducida se opone al cambio que la genera. En este caso el campo magnético aumenta conforme pasa el tiempo y por lo tanto el flujo también aumenta, si la corriente inducida se opone al cambio, en este caso deberá generar un campo magnético cuyo sentido sea hacia fuera del plano del papel para disminuir el flujo del campo magnético. Por lo tanto aplicando la regla de la mano derecha la corriente inducida deberá tener sentido antihorario.

9. Una bobina circular de 10 espiras y de 10 cm de radio se coloca perpendicularmente a un campo de intensidad $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$ T. ($B_0 = 0,5$ T, $\tau = 1$ ms)
- Calcular el flujo magnético que atraviesa la bobina en función del tiempo.
 - Calcular la fuerza electromotriz inducida.
 - Siendo la resistencia de la espira $r = 0,1 \Omega$, calcule la potencia disipada en función del tiempo.
 - ¿Cuánta energía se habrá disipado al cabo de 1 s? (consideramos el tiempo inicial $t = 0$).

Solución

- a) El área total de la bobina incluyendo todas las espiras viene dada por $S = n\pi R^2 = 10\pi 0,1^2 = 0,1\pi \text{ m}^2$.

Para calcular el flujo magnético, debemos aplicar su definición:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 e^{-t/\tau} \cdot 0,1\pi = 0,5 e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \text{ Wb}$$

- b) La fuerza electromotriz inducida vendrá dada por la Ley de Faraday

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} 0,5 e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \right| = \left| \frac{-0,5}{0,001} e^{-t/0,001} \cdot 0,1\pi \right| =$$

$$|\varepsilon| = 157,07 e^{-t/0,001} \text{ V}$$

- c) Para calcular la potencia disipada en la espira, primero deberemos obtener la intensidad que circula por la espira

$$I = \frac{|\varepsilon|}{r} = \frac{157,07 e^{-t/0,001}}{r} = 1570,7 e^{-t/0,001} \text{ A}$$

Una vez conocida dicha corriente calculamos la potencia disipada

$$P(t) = |\varepsilon| \cdot I = 157,07 e^{-t/0,001} \cdot 1570,7 e^{-t/0,001} = 246740,1 e^{-2t/0,001} \text{ W}$$

- d) La energía disipada en el intervalo $t = 0 \rightarrow 1 \text{ s}$, se obtiene integrando la potencia disipada.

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 P(t) \cdot dt = \int_0^1 246740,1 e^{-2t/0,001} dt = 246740,1 \int_0^1 e^{-2t/0,001} dt = \\ &= 246740,1 \left[\frac{-1}{2000} e^{-2t/0,001} \right]_0^1 = 123,3 \text{ J} \end{aligned}$$

10. Queremos lanzar un objeto metálico a alta velocidad y para ello disponemos de dos rieles paralelos deslizantes separados una distancia de 0,5 m. Los rieles se encuentran inmersos en un campo magnético $B = 0,2 \text{ T}$ perpendicular al plano definido por los rieles. Si el proyectil es una barra metálica de masa $m = 0,2 \text{ kg}$ que se apoya en ambos rieles, calcule:

- ¿La intensidad de corriente que debe circular por la barra para, una vez colocada sobre los rieles, experimente una aceleración de $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?
- ¿Si los rieles tienen una longitud de $l = 1 \text{ m}$, ¿qué velocidad alcanzará la barra cuando salga despedida de los rieles?

Solución

Para este problema se va a despreciar el rozamiento.

- a) En este caso lo primero que debemos calcular es la fuerza que actúa sobre la barra que queremos proyectar, para posteriormente aplicar la 2ª Ley de Newton. Dicha fuerza vendrá dada por:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

En este caso los vectores $\vec{l}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, y por lo tanto, al aplicar la 2ª Ley de Newton obtenemos:

$$F = I l B = m a$$

Finalmente despejamos el valor de la intensidad de corriente que se nos pide:

$$I = \frac{m a}{l B} = \frac{0,2 \cdot 10}{0,5 \cdot 0,2} = 20 \text{ A}$$

- b) El segundo apartado es un simple problema de cinemática, para lo cual calcularemos el tiempo que tarda la barra en recorrer los rieles teniendo en cuenta que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$s = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \rightarrow 1 = \frac{1}{2}10 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,447 \text{ s}$$

Una vez conocido el tiempo simplemente deberemos sustituir en la ecuación de la velocidad, siendo la velocidad inicial nula

$$v = a \cdot t = 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

11. En el centro de un solenoide de 2 cm de radio, 10 cm de longitud y 5000 espiras se sitúa una espira de 1 cm de radio y 0,5 Ω de resistencia. El plano de la espira es perpendicular al eje del solenoide.

Si por el solenoide circula una corriente de 2 A, calcule:

- El campo magnético en el interior del solenoide.
- El coeficiente de inducción mutua M entre el solenoide y la espira.
- Si la corriente del solenoide se extingue uniformemente en 0,5 ms calcule la fuerza electromotriz inducida y la corriente inducida en la espira.

Solución

- a) El campo magnético generado por el solenoide se obtiene directamente con la aplicación de la fórmula:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \cdot 5000/0,1 \cdot 2 = 100000\mu_0 \text{ T}$$

- b) Para el cálculo del coeficiente de inducción mutua, primero debemos calcular el flujo magnético a través de la espira situada en el interior del solenoide,

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = 100000\mu_0 \pi r^2 = 100000\mu_0 \pi 0,01^2 = 10\pi\mu_0 \text{ Wb}$$

Es el flujo entre espira y solenoide. Finalmente aplicamos su definición, es decir la relación entre flujo y corriente I del solenoide:

$$M = \frac{\phi_m}{I} = \frac{10\pi\mu_0}{2} = 5\pi\mu_0 \text{ H}$$

- c) Para calcular la fuerza electromotriz inducida, aplicaremos la Ley de Faraday teniendo en cuenta que la corriente en el solenoide se extingue uniformemente:

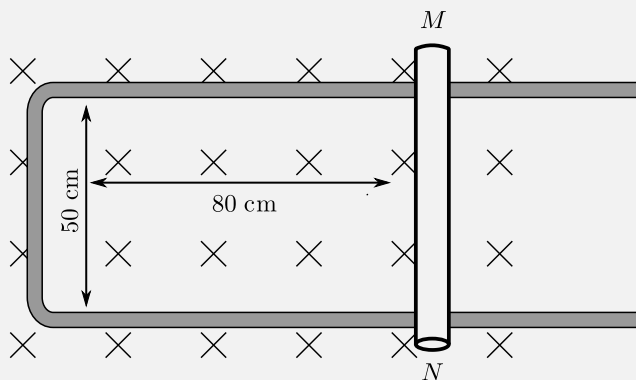
$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{10\pi\mu_0}{0,5} = 20\pi\mu_0 \text{ V}$$

12. En una región del espacio hay un campo magnético uniforme de intensidad 0,5 T que penetra perpendicularmente al plano del papel tal y como se muestra en la figura. Si la resistencia de la varilla MN vale 2Ω .

- a) ¿Con qué velocidad, módulo y sentido, debe moverse la varilla si queremos que en el circuito se induzca una corriente de 0,2 A en sentido horario?

Volvemos a la situación inicial y, manteniendo fija la varilla, procedemos a modificar uniformemente el campo magnético durante 2 s. Comprobamos que la corriente inducida durante este proceso es la misma que en el caso anterior.

- b) ¿Cuál es el valor final del campo magnético (módulo y sentido)?



Solución

- a) El enunciado nos dice que la corriente inducida tiene que ser 0,2 A en sentido horario. Por lo tanto, de acuerdo con la regla de la mano derecha, el campo generado por la corriente inducida tiene sentido hacia dentro del plano del papel. La ley de Lenz nos dice que el

sentido de la corriente inducida se tiene que oponer al cambio que la genera. La corriente en el sentido horario aumenta el flujo del campo. Por lo tanto la barra debe moverse hacia la izquierda para compensar este aumento de flujo.

Para calcular el módulo de la velocidad aplicaremos la ley de Faraday y la ley de Ohm a la varilla:

$$I \cdot R = 0,2 \cdot 2 = 0,4 = |\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = B l v$$

$$\rightarrow v = \frac{|\varepsilon|}{B \cdot l} = \frac{0,4}{0,5 \cdot 0,5} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- b) En la segunda parte debemos tener en cuenta que la variación de flujo magnético se produce debido a la variación del campo magnético, pues la sección va a permanecer constante.

Basándonos en los mismos razonamientos que en el apartado anterior, para que la corriente inducida tenga sentido horario, el campo magnético deberá disminuir. La corriente vale 0,2 A como en el apartado anterior, podemos obtener $|\varepsilon| = RI = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ V}$. Podemos aplicar la ley de Faraday y deducir la variación de campo magnético

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}$$

despejando

$$|\Delta B| = \frac{|\varepsilon| \Delta t}{S} = \frac{0,4 \cdot 2}{0,5 \cdot 0,8} = 2 \text{ T}$$

Dado que $|\Delta B| = 2 \text{ T}$ y como hemos deducido que el campo magnético está disminuyendo, $B_f = B_0 - 2 \text{ T} = -1,5 \text{ T}$, o lo que es lo mismo el campo magnético final tiene un valor de 1,5 T con sentido hacia fuera del papel (decrece hacia el cero para volver a crecer en sentido positivo).

13. Una bobina circular de radio $a = 10 \text{ cm}$ y 1000 espiras gira perpendicularmente a un campo magnético de intensidad $B = 1 \text{ T}$. La bobina se conecta a una resistencia de valor $R = 100 \Omega$. Siendo el pico de corriente (es decir, la corriente máxima) en la resistencia de $\pi/10 \text{ A}$, hallar:

- la fuerza electromotriz inducida en la bobina en función del tiempo.
- la frecuencia de giro de la bobina, expresada en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Solución

- a) La obtención de la f.e.m. inducida es una aplicación directa de la Ley de Faraday.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \vec{B} \cdot \vec{S} \right| =$$

$$= \left| \frac{d}{dt} B S \cos(\omega t) \right| = |-B S \omega \sin(\omega t)| = B S \omega \sin(\omega t) \text{ V}$$

- b) Teniendo en cuenta que el valor de pico de la intensidad es el valor máximo de la corriente, este se corresponderá con el valor máximo de la f.e.m. en la resistencia dado que son proporcionales. Coincide con los tiempos para los cuales $\sin(\omega t) = 1$. Por lo tanto,

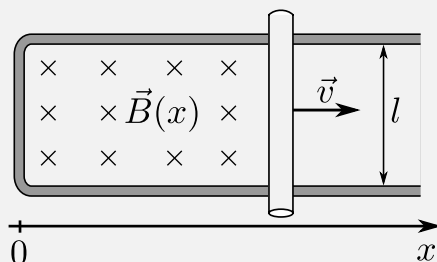
$$I_{max} R = B S \omega \rightarrow \omega = \frac{I_{max} R}{B S} = \frac{(\pi/10) 100}{1 \pi 0,1^2} = 1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

14. Una barra conductora desliza con una velocidad constante $\vec{v} = 10\vec{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ sobre unos railes conductores paralelos separados por una distancia $l = 0,5 \text{ m}$. Existe un campo magnético perpendicular al plano de movimiento de la barra $\vec{B}(x) = 0,1x\vec{k} \text{ T}$.

- a) Calcule el flujo magnético en la espira formada por los railes y la barra en función de x , es decir $\phi_m(x)$.

- b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en el circuito en función de x .

Nota: la regla de la cadena nos permite escribir $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt}$.

**Solución**

- a) Para calcular el flujo magnético en la espira, deberemos aplicar su definición, considerando que en este caso el campo magnético y el

vector superficie son paralelos, y que ambas magnitudes dependen de x

$$\phi_m(x) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^x 0,1x\vec{k} \cdot l \, dx\vec{k} = \left[\frac{0,1 l x^2}{2} \right]_0^x = \frac{0,1 l x^2}{2}$$

- b) Una vez conocida la expresión del flujo magnético en función de x tal y como nos dice el enunciado, debemos aplicar la regla de la cadena, teniendo en cuenta que $x(t) = v t + x_0$. De este modo:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right|$$

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} \left(\frac{0,1 l x^2}{2} \right) \frac{dx}{dt} = 0,1 \, 0,5 x v = 0,5 x \, \text{V}$$

Concluimos que $|\varepsilon| = |0,5x|$.

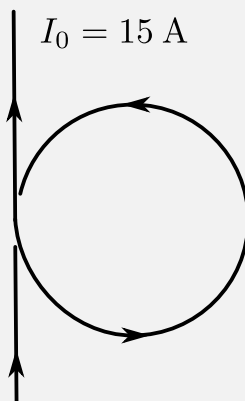
15. Un conductor rectilíneo infinito se dobla tal y como se indica en la figura. Se sabe que por él circula una corriente $I_0 = 15 \text{ A}$ y que el campo magnético en el centro de la espira formada con el conductor vale $3,21 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ y apunta hacia fuera del papel.

- a) Calcular el radio R de la espira circular que se ha formado con el conductor rectilíneo que permite obtener el campo de $3,21 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ en su centro.

A continuación en el centro de la espira se coloca una segunda espira de radio $r = 1 \text{ cm}$ y resistencia $2 \text{ m}\Omega$. Modificando de forma lineal el valor de la intensidad que circula por el hilo tal que $I(t) = at + I_0$ se observa que se induce una corriente en la segunda espira de valor $2 \text{ }\mu\text{A}$ en sentido horario.

- b) La intensidad que circulará por el conductor al cabo de 3 segundos.
- c) Repita el apartado anterior considerando que la corriente inducida en la segunda espira tuviese sentido antihorario.

Nota: Considere que el campo magnético es constante en la sección de la segunda espira y que su valor es el que tiene en el centro.



Solución

- a) Para este primer apartado deberemos considerar que el hueco que

se genera al doblar el hilo entre los dos tramos rectos es despreciable, de modo que podremos considerar que el campo magnético total generado en el centro de la espira, $\vec{B}_T$, es la suma del campo generado por un hilo rectilíneo infinito (5.8), $\vec{B}_h$, más el generado por una espira circular en su centro (5.3), $\vec{B}_e$. De este modo:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_h + \vec{B}_e$$

Para establecer el carácter vectorial de los campos, consideraremos que el eje perpendicular al plano de la figura es el eje z , y tomaremos sentido positivo saliendo del plano. Con esta consideración y teniendo en cuenta el sentido de los campos generados, la fórmula anterior nos queda:

$$\vec{B}_T = B_h(-\vec{k}) + B_e\vec{k} \rightarrow 3,21 \cdot 10^{-4}\vec{k} = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R}\vec{k} + \frac{\mu_0}{2} \frac{I_0}{R}\vec{k}$$

Despejamos R :

$$R = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1 - 1/\pi}{3,21 \cdot 10^{-4}}$$

Sustituyendo los valores numéricos que nos proporciona el enunciado, obtenemos

$$R = 2 \text{ cm}$$

- b) Se nos dice que al introducir una espira de radio $r = 1 \text{ cm}$ y de resistencia $2 \text{ m}\Omega$ se induce una corriente de $2 \mu\text{A}$ en sentido horario. Recordamos que en este problema, el campo se considera uniforme con un valor igual al del centro de la espira. Como la intensidad varía de forma lineal podemos expresar la ecuación (7.1) como:

$$|\varepsilon| = \frac{|\Delta\phi_m|}{\Delta t} = \frac{|B_f - B_i| S}{\Delta t}$$

En este caso, la corriente inducida en la pequeña espira tiene sentido horario. Razonando con la ley de Lenz podemos deducir que el campo magnético generado por el hilo y la espira inicial debe aumentar. El campo magnético del cable + espira va dirigido hacia dentro del papel y el campo de la pequeña espira hacia fuera. El campo de la pequeña espira debe oponerse al aumento de flujo generado por el cable.

Siendo $|\varepsilon| = RI = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ V}$, la ecuación anterior nos queda:

$$|\varepsilon| = \frac{(B_f - B_i) S}{\Delta t} \rightarrow 4 \cdot 10^{-9} \text{ V} = \frac{(B_f - B_i) \pi r^2}{3}$$

$$B_f - B_i = 3,82 \cdot 10^{-5} \text{ T} \rightarrow B_f = 3,59 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Este campo es generado por la configuración de corriente inicial, por lo tanto, simplemente deberemos aplicar la misma fórmula que en el primer apartado:

$$3,59 \cdot 10^{-4} \vec{k} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{k} + \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \vec{k} \rightarrow I = 16,76 \text{ A}$$

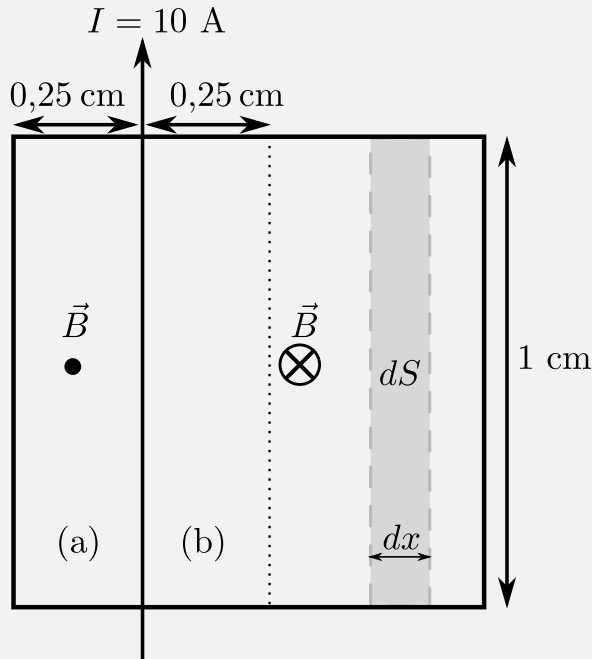
- c) Al igual que en el apartado anterior, al aplicar la ley de Faraday y procediendo de forma similar obtenemos:

$$|B_f - B_i| = 3,82 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Sin embargo, en este caso, la corriente inducida tiene sentido antihorario, lo que nos indica que el campo magnético generado por el hilo y la espira inicial disminuye, con lo que obtenemos:

$$B_f = 2,828 \cdot 10^{-4} \vec{k} \text{ T} \rightarrow I = 13,43 \text{ A}$$

16. Sobre una espira cuadrada, de lado $a = 1 \text{ cm}$ y resistencia $R = 1 \Omega$, descansa un cable conductor rectilíneo muy largo, paralelo a un lado de la espira y a una distancia $d = 0,25 \text{ cm}$ del centro de esta. El cable conduce una corriente $I = 10 \text{ A}$. Si esta corriente se anula uniformemente en $0,1 \text{ s}$, determine la corriente inducida en la espira y su sentido.



Solución

Para resolver este problema, lo primero que debemos darnos cuenta es el sentido que lleva el campo a ambos lados del hilo conductor, lo cual se obtiene directamente aplicando la regla de la mano derecha. Es importante observar que el campo magnético generado por el hilo a uno y otro lado lleva sentido opuesto, por lo que el flujo que en la región izquierda del dibujo (a) se anula con el de la parte simétrica respecto del hilo de la derecha (b).

Una vez que tenemos el planteamiento claro, aplicamos la definición de flujo magnético, para lo cual deberemos tener en cuenta la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito en un punto es $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ siendo x la distancia desde el hilo hasta dicho punto. El diferencial de

superficie dS que se toma vendrá dado por la banda estrecha que se muestra en la figura. Tendrá como longitud el lado de la espira y como anchura dx , por lo tanto $dS = 0,01dx$ (ver figura)

$$\begin{aligned}\phi_m &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{0,0025}^{0,0075} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} 0,01 dx = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \int_{0,0025}^{0,0075} \frac{dx}{x} = \dots \\ \dots &= \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} [\log(x)]_{0,0025}^{0,0075} = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \log\left(\frac{0,0075}{0,0025}\right) = \frac{\mu_0 I 0,01}{2\pi} \log(3) \\ \phi_m &= 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}\end{aligned}$$

Una vez conocido el flujo magnético a través de la espira, calcularemos la f.e.m. inducida aplicando la Ley de Faraday y teniendo en cuenta que el enunciado nos dice que la corriente se apaga uniformemente en 0,1 s.

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\Delta\phi_m}{\Delta t} \right| = \frac{2,2 \cdot 10^{-8}}{0,1} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

Una vez conocida la f.e.m. inducida, aplicando la Ley de Ohm obtenemos la corriente inducida

$$I_{ind} = \frac{|\varepsilon|}{R} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

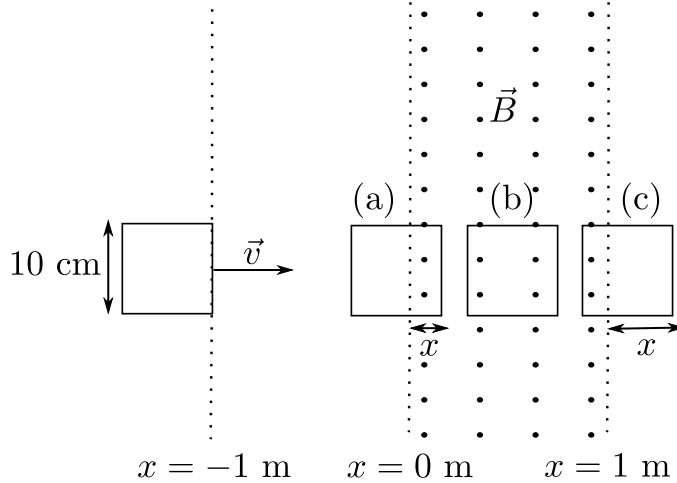
Finalmente para determinar el sentido de la corriente inducida aplicaremos la Ley de Lenz. Dado que el flujo magnético disminuye (la corriente que genera el campo se anula), la corriente inducida debe oponerse a dicha disminución y por lo tanto deberá generar campo magnético hacia dentro del papel. La corriente llevará sentido horario en la espira.

17. Una espira cuadrada conductora de lado $l = 10 \text{ cm}$ y resistencia $0,1 \Omega$ situada en el plano xy se desplaza a velocidad constante $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en dirección creciente del eje x . En la región comprendida entre $x = 0 \text{ m}$ y $x = 1 \text{ m}$ se ha definido un campo magnético $\vec{B} = 0,5\vec{k} \text{ T}$.

- Calcule la corriente inducida en la espira en función de x , si inicialmente el lado más próximo a la zona donde hay campo magnético se encuentra en $x = -1 \text{ m}$.
- Calcule la energía que se ha disipado en la bobina una vez que la espira ha atravesado totalmente la región donde había campo magnético.

Solución

- a) A la hora de resolver el problema lo primero es hacer un dibujo esquemático en el que veamos claramente el planteamiento del problema.



Podemos observar que hasta que la espira no llega a la posición $x = 0$ m se está desplazando por una región en la que no hay campo magnético y por lo tanto, el flujo magnético a través de la espira será nulo. Dicho flujo no varía por el desplazamiento, lo que implica que tanto la f.e.m. inducida como la corriente inducida son nulas. A continuación en el esquema podemos ver tres situaciones marcadas por su importancia en la resolución del problema. La situación (a) representa una posición genérica en la que la espira se encuentra entrando en la región donde hay campo magnético. En este caso el flujo magnético vendrá dado por:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{S} = Blx$$

donde l es el lado de la espira y x es la longitud de la espira que está inmersa en la región en la que hay campo magnético. A continuación, podemos calcular la f.e.m. inducida, simplemente aplicando la regla de la cadena

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} \right| = Blv$$

y por lo tanto la corriente inducida será:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R} = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 10}{0,1} = 5 \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente debemos observar que el flujo magnético aumenta conforme la espira penetra en la región con campo y por lo tanto la corriente inducida deberá oponerse a este aumento para lo cual generará un campo magnético que se opone al que tenemos en dicha región, es decir, la corriente inducida tendrá un sentido horario.

La situación (b) representa los momentos para los cuales la espira está totalmente sumergida en la región con campo. En esta situación, el flujo magnético permanecerá constante y por lo tanto tanto la f.e.m. inducida como la corriente inducida serán nulas.

Finalmente la situación (c) representa las posiciones para las cuales la espira está saliendo de la región con campo. Podemos proceder de forma análoga al caso (a), teniendo en cuenta que la sección de la espira que permanece en la región con campo magnético será $l(l-x)$. El hecho de que la espira esté saliendo implica que el flujo magnético es cada vez menor y que por lo tanto la corriente inducida llevará sentido antihorario. Dada la simetría entre las situaciones (a) y (c) nos permite no tener que realizar ningún cálculo y finalizar diciendo que la corriente inducida en este caso es $I = 5 \text{ A}$ en sentido antihorario.

- b) La energía únicamente se disipa en las situaciones (a) y (c) puesto que en (b) la corriente inducida es nula. La potencia que se disipa en ambas situaciones es:

$$P = I^2 R = 5^2 \cdot 0,1 = 2,5 \text{ W}$$

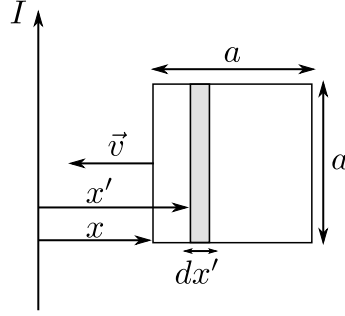
Para calcular la energía disipada debemos multiplicar la potencia, dado que es constante, por el tiempo que tarda la espira en entrar (salir) a la zona en la que está definido el campo magnético.

$$E = 2 \cdot P \Delta t = 2,5 \cdot \frac{0,1}{10} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

18. Sobre el eje y se extiende un conductor rectilíneo por el que circula una corriente I en sentido positivo de dicho eje. Una espira cuadrada de lado a se encuentra sobre el plano xy de modo que dos de sus lados son paralelos al conductor. Si inicialmente la espira se encuentra en la parte positiva del eje x , calcule el valor de la fuerza electromotriz inducida cuando la espira se desplaza hacia la parte negativa del eje x con una velocidad $\vec{v} = -v\vec{i}$

Solución

Veamos el dibujo esquemático del problema. En este caso supondremos que la espira se encuentra a una distancia x del hilo, y procedemos a calcular el flujo total a través de la espira.



Para ello deberemos utilizar la expresión del campo magnético generado por un hilo infinito en un punto situado a una distancia x' del propio hilo, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$. Si tomamos como elemento diferencial de superficie la banda oscura marcada en la figura $dS = a dx'$, podemos calcular el flujo aplicando su definición:

$$\phi_m(x) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_x^{x+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{x+a}{x}.$$

Una vez que tenemos el flujo magnético, procedemos a calcular su derivada temporal, para lo cual aplicaremos la regla de la cadena $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt}$

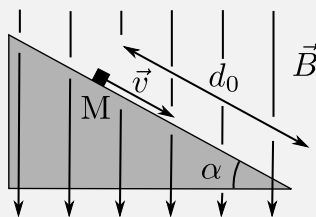
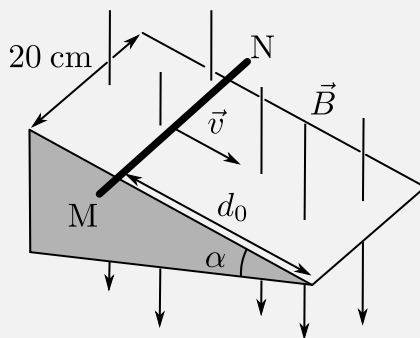
$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{d\phi_m}{dx} \frac{dx}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left| \frac{d}{dx} \left(\log \frac{x+a}{x} \right) \frac{dx}{dt} \right| = \dots \\ &\dots = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left| \frac{-a}{x(x+a)} v \right| = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi x(x+a)} v \text{ V} \end{aligned}$$

Nótese que existe un problema cuando la espira llega a tocar el cable en $x = 0$. En este punto el campo diverge y el flujo también.

19. La varilla conductora MN , que tiene una masa de 10 g, baja deslizándose con velocidad constante v sobre los dos carriles conductores paralelos. Dichos carriles distan 20 cm y se cierran por la parte inferior formando un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con el plano horizontal. En la región existe un campo magnético uniforme, dirigido verticalmente hacia abajo y de intensidad 1 T. Si la resistencia de los carriles es despreciable y la de la varilla vale $10\ \Omega$. Calcule, en función de la velocidad v de la varilla:

- El flujo magnético a través del circuito.
- La fuerza electromotriz inducida.
- La intensidad de la corriente inducida.
- La fuerza magnética que actúa sobre la varilla.
- Si el coeficiente de rozamiento entre los carriles y la varilla es $\mu = 0,2$ ¿cuánto vale la velocidad v ?

Dato: $g = 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$



Solución

- a) Para calcular el flujo magnético debemos aplicar su definición teniendo en cuenta que el ángulo que forman el campo magnético y el vector superficie es el mismo que el que forma el circuito con el plano horizontal. De este modo:

$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

El producto escalar $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ debe tomar en cuenta el ángulo entre los dos vectores que corresponde al ángulo de inclinación del plano inclinado:

$$\phi_m = B \, 0,2 (d_0 - vt) \cos \alpha = 0,1 \sqrt{3} (d_0 - vt) \text{ Wb}$$

- b) La fuerza electromotriz inducida vendrá dada por:

$$|\varepsilon| = \left| \frac{d\phi_m}{dt} \right| = 0,1 \sqrt{3} v \text{ V}$$

- c) Para calcular la corriente inducida aplicaremos la Ley de Ohm

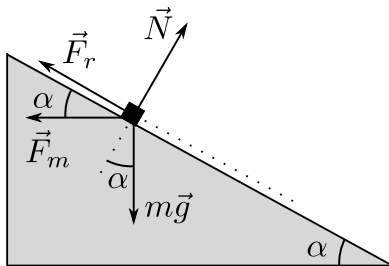
$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{0,1 \sqrt{3} v}{10} = 0,01 \sqrt{3} v \text{ A}$$

Para determinar el sentido de la corriente inducida hay que observar que conforme la varilla desciende el flujo magnético a través de la espira disminuye y por lo tanto la corriente inducida deberá generar un campo magnético con el mismo sentido que el campo existente. De este modo, en la figura inferior la corriente iría hacia dentro del papel en el extremo M de la varilla. El flujo de la corriente compensa la pérdida de flujo de la espira.

- d) Una vez calculada la corriente inducida, obtenemos la fuerza magnética que actúa sobre la varilla. Si observamos el dibujo podemos ver que el sentido de la corriente I y la dirección de $\vec{B}$ son perpendiculares, además, si aplicamos la regla de la mano derecha obtenemos el sentido de la fuerza. En este caso, asumiendo que $\vec{B}$ lleva sentido vertical según $(-\vec{j})$ y que la intensidad, tal y como hemos deducido antes, sale del papel ($\vec{k}$) la fuerza llevará sentido horizontal hacia la izquierda ($-\vec{i}$).

$$\vec{F}_m = l \vec{I} \times \vec{B} = -0,002 \sqrt{3} v \vec{i} \text{ N}$$

- e) Finalmente para calcular la velocidad necesaria para que la varilla descienda con movimiento uniforme, deberemos aplicar la segunda Ley de Newton. Antes de proceder a los cálculos es recomendable realizar un dibujo esquemático en el que se aprecien todas las fuerzas que intervienen.



En el eje perpendicular al plano de la espira las fuerzas que actúan son la normal y las componentes del peso y de la fuerza magnética. Proyectamos esta vez en la dirección del plano, obtenemos:

$$N = mg \cos \alpha + F_m \sin \alpha.$$

En la dirección paralela al plano la fuerza de rozamiento y la componente de la fuerza magnética deben contrarrestar la componente del peso. Matemáticamente obtenemos:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha &= F_r + F_m \cos \alpha = \mu N + F_m \cos \alpha = \\ &= \mu mg \cos \alpha + \mu F_m \sin \alpha + F_m \cos \alpha \end{aligned}$$

$$mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 0,002\sqrt{3} v (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$v = \frac{mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{0,002\sqrt{3} (\mu \sin \alpha + \cos \alpha)} = 9,57 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$



Material docente

Javier Used
Alexandre Wagemakers



Universidad
Rey Juan Carlos

**Material
docente**

Editorial Academia Abierta